

UNIwersYTET JAGIELOŃSKI  
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

Dawid Tarłowski

# Szczególna Teoria Względności z Elementami Mechaniki Klasycznej

Wersja robocza. Proszę nie rozpowszechniać.

KRAKÓW 2020

## CONTENTS

1. Mechanika Newtona.	1
2. Siły i energia. Jedna cząstka	3
2.1. Wymiar $n=1$	4
2.2. Wymiar $n=3$	6
2.3. Słowo o równaniach różniczkowych stopnia 2	9
2.4. Pola siłowe zachowawcze. Siły Centralne.	11
2.5. Pole zależne od prędkości.	14
2.6. Siły centralne	15
3. Układ cząstek	24
3.1. Pęd. Moment pędu	25
3.2. Energia układu	26
3.3. Problem dwóch ciał. Problem trzech ciał	27
4. Układy nieinercjalne	28
4.1. Prędkość kątowna i obroty	29
4.2. Układy obracające się	30
5. Zasada Najmniejszego działania. Lagranżjan.	33
5.1. Rachunek wariacyjny. Równania Lagrange'a- Eulera	34
5.2. Równania Hamiltona	35
5.3. Zasada najmniejszego działania.	36
6. Szczególna teoria względności.	36
6.1. Postulaty szczególnej teorii względności. Transformacja Lorentza.	37
6.2. Czas i zegary. Synchronizacja zegarów.	40
6.3. Konsekwencje transformacji Lorentza.	41
6.4. Diagram czasoprzestrzenny (diagram Minkowskiego)	47
6.5. Geometria Minkowskiego	49
6.6. Mechanika relatywistyczna	54
6.7. Układy nieinercjalne. Ruch jednostajnie przyspieszony	58

## 1. MECHANIKA NEWTONA.

- (1) Podstawy mechaniki klasycznej zostały sformułowane aksjomatycznie przez Newtona w jego monumentalnym dziele *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) i znane są jako 3 zasady dynamiki Newtona. Są one oparte są na fundamentalnych pojęciach **siły**, **masy** oraz **cząstki**. Teoria Newtona stanowi potężne narzędzie do (deterministycznego) opisu świata klasycznego (ograniczenia tej teorii ujawniają się w przypadku: wielkich prędkości, wielkich mas oraz obiektów bardzo małych). We wspomnianym dziele, poza sformułowaniem praw mechaniki, Newton m.in. sformułował prawo powszechnego ciążenia oraz wyprowadził z niego prawa Keplera. Doniosłość teorii Newtona trafnie oddał XVIII-wieczny fizyk i matematyk Alexis Clairaut: Principia Newtona naznaczyły jego epokę wielką rewolucją w fizyce ... a jego metodologia rzuciła światło matematyki na nauki przyrodnicze które wcześniej pozostawały w cieniu przypuszczeń i zabobonów.
- (2) Teoria Newtona opisuje ruch cząstek pod wpływem działających na nie sił. Poniżej bardzo skrótowo przytaczam podstawowe pojęcia oraz notację, której będziemy używać:
- (a) **Cząstka** jest obiektem o zaniedbywalnym rozmiarze, obdarzonym masą (wielkość skalarna), posiadającą położenie i prędkość (wielkości wektorowe, potrzebujemy do

nich konkretnego układu odniesienia, standardowo używamy kartezjańskiego układu współrzędnych).

- (b) Położenie cząstki w chwili  $t$ :

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

przy wielu okazjach zaniedbujemy argument  $t$ , pisząc:  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Trajektoria cząstki to obraz funkcji  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$

- (c) **Prędkość cząstki** to pochodna położenia po czasie,

$$v = d\mathbf{x}/dt =: \dot{\mathbf{x}}.$$

Naturalnie,

$$d\mathbf{x}/dt = (dx/dt, dy/dt, dz/dt).$$

Dla dowolnej gładkiej funkcji czasu  $H$  jej pochodną "po czasie" będziemy oznaczać

$$\dot{H} = \frac{d}{dt}H.$$

**Ćwiczenie:** Pokaż, że  $d(a \cdot b)/dt = da/dt \cdot b + a \cdot db/dt$ , gdzie  $a \cdot b$  to iloczyn skalarny położenia dwóch cząstek

- (d) **Przyśpieszenie cząstki** to pochodna prędkości po czasie,

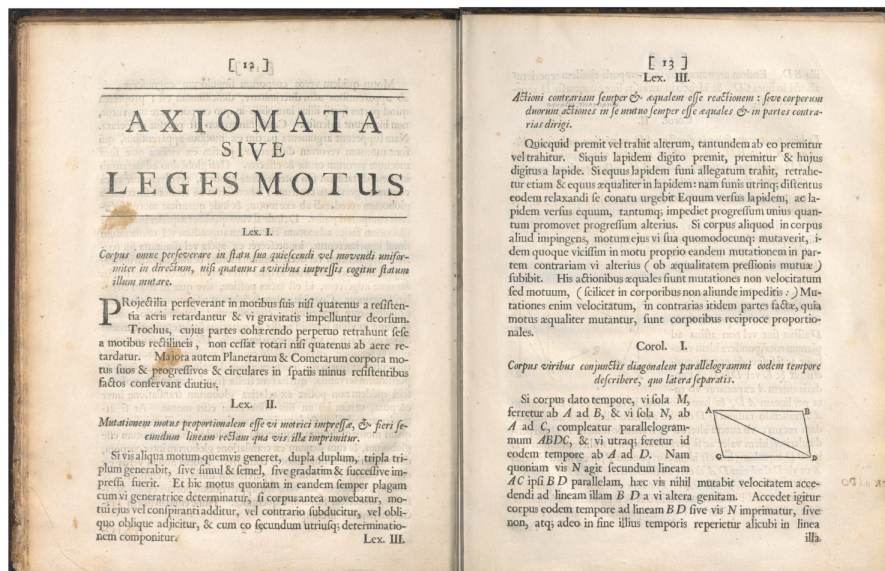
$$a = dv/dt = \ddot{\mathbf{x}}$$

- (e) **Siła** (wielkość wektorowa) jest przyczyną przyśpieszenia ciał. Kilka sił działających na cząstkę (o wspólnym punkcie przyłożenia) działa na ciało zgodnie z siłą wypadkową (sumą wektorową sił).

### (3) Zasady dynamiki Newtona

- (a) I. Ciało, na które nie działa żadna siła, porusza się ruchem jednostajnym lub pozostaje w spoczynku.  
 (b) II. Przyśpieszenie cząstki o masie  $m$  jest wprost proporcjonalne do działającej siły  $F$  zgodnie ze wzorem  $a = \frac{F}{m}$   
 (c) III. Oddziaływania ciał są zawsze wzajemne (wzajemne oddziaływania mają te same kierunki i przeciwne zwroty, różne punkty przyłożenia).

Poniżej powyższe trzy zasady w oryginale (domena publiczna):



(4) **Dyskusja:**

Z matematycznego punktu widzenia I-sza zasada jest jedynie szczególnym przypadkiem drugiej zasady. Została ona wyróżniona nie bez powodu - w fizyce starożytnych Greków siły były odpowiedzialne za ruch ciał a ciało na które nie działała żadna siła dążyło do stanu spoczynku. Fizyka newtonowska jest tymczasem oparta na poglądzie, że nigdy nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy ciało znajduje się w spoczynku, ponieważ obserwujemy jedynie ruch względny - obserwowany ruch jest zawsze związany z przyjętym układem odniesienia. I-sza zasada dynamiki jest w pewnym sensie deklaracją istnienia **inercjalnych układów odniesienia** - czyli takich układów, w których jest ona spełniona (wraz z pozostałymi zasadami dynamiki). W układach inercjalnych jedynie przyspieszenia ciał są tłumaczone działającymi siłami (ciała swobodne poruszają się ruchem jednostajnym). Fizyka newtonowska oparta jest na galileuszowej **zasadzie względności** stwierdzającej, że prawa fizyki we wszystkich układach inercjalnych są takie same. Innymi słowami, żaden z układów inercjalnych nie jest wyróżniony.

(5) Załóżmy, że mamy ustalony inercjalny układ odniesienia  $S$  ze współrzędnymi kartezjańskimi. Następujące transformacje zmiennych zdefiniują układ również inercjalny:

- (a)  $x' = x + c$  (żaden punkt w przestrzeni nie jest wyróżniony)
- (b)  $x' = Rx$ , gdzie  $R \in M(3,3)$  spełnia  $RR^T = I$  (macierze ortogonalne - obroty właściwe i niewłaściwe oraz ich złożenia - żadne kierunki, współrzędne w przestrzeni nie są wyróżnione)
- (c)  $x' = x + vt$ , gdzie  $v$  jest ustalonym wektorem (żadna prędkość nie ma wyróżnionego charakteru - względność ruchu).

Łatwo sprawdzić, że cząstka poruszająca się w układzie  $S$  ze stałą prędkością będzie poruszać się ze stałą prędkością w każdym z powyższych układów (co gwarantuje równoważność I-szej zasady dynamiki w tych układach). Przykładowo, niech  $x(t)$  oznacza położenie cząstki w układzie  $S$  w chwili  $t$ . Łatwo widać, że

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = 0 \iff \ddot{\mathbf{x}}'(t)$$

Powyższe transformacje tworzą grupę Galileusza. Nie uwzględniamy w nich zamiany jednostek pomiędzy układami (takich jak transformacja  $x'=1000x$ , zmieniająca, przykładowo, jednostkę z kilometra na metr).

(6) **Absolutność czasu.** W dynamice Newtona czas płynie z taką samą prędkością we wszystkich układach odniesienia niezależnie od zjawisk zachodzących w tych układach. Jedyną dopuszczalną transformacją zmiennej czasowej to translacja (przestawienie zegara):  $t' = t + t_0$ (7) Inercjalne układy odniesienia poruszają się względem siebie ze stałą prędkością. Pamiętając, o tym że żadne kierunki, współrzędne, itp. nie są wyróżnione i przyjmując, że wzajemny ruch odbywa się wzdłuż osi  $x$  oraz po zsynchronizowaniu zegarów obu układów (w chwili zero współrzędne obu układów pokrywają się), dostajemy **transformację Galileusza**:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

## 2. SIŁY I ENERGIA. JEDNA CZĄSTKA

### 2.1. Wymiar $n=1$ .

Rozważmy cząstkę (o stałej masie  $m$ ) poruszającą się po prostej, której położenie w chwili  $t$  oznaczamy przez  $\mathbf{x}(t) = x(t) \in \mathbb{R}$ . Tymczasowo zakładamy, że siła działająca na cząstkę w tym prostym układzie zależy tylko i wyłącznie od położenia cząstki (nie zależy od prędkości cząstki oraz, jak w całym niniejszym kursie, nie zależy od czasu - zachowanie układu jest jednorodne w czasie). Tak więc piszemy skrótowo  $F = F(x)$ , standardowo zaniedbując argument funkcji w notacji. W całym kursie zakładamy, że siła  $F$  jest klasy gładkości  $C^1$  (lub wyższej, jeśli będzie to potrzebne). W każdym punkcie  $x$  definiujemy **energię potencjalną**  $V(x)$  równaniem:

$$(2.1) \quad F = -\frac{dV(x)}{dx}.$$

Widać, że potencjał  $V$  jest wyznaczony z dokładnością do stałej. Odwracając (całkując) równanie (2.13), mamy:

$$(2.2) \quad V(x) = -\int_{x_0}^x F(y)dy,$$

gdzie  $x_0$  jest ustalonym punktem.

Zgodnie z II zasadą dynamiki, równanie ruchu w obecnej sytuacji przyjmuje następującą postać:

$$(2.3) \quad m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{dV}{dx}$$

Ruch cząstki wyrażony równaniem (2.3) jest **zachowawczy**, inaczej: cząstka porusza się w **zachowawczym polu sił**, a zachowywaną (stałą) wielkością jest energia cząstki  $E$ , tj. wielkość wyrażona wzorem:

$$(2.4) \quad E = \frac{1}{2}m \cdot (\dot{\mathbf{x}})^2 + V(x).$$

Spełniona zatem jest **zasada zachowania energii**, co oznacza, że energia czątki jest stała w czasie, tzn. w zapisie argumentowym:

$$E(t) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}}(t))^2 + V(x(t)) = \text{const.}$$

Czynnik  $\frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}})^2$  nazywamy **energią kinetyczną** cząstki, zatem całkowita energia cząstki jest sumą jej energii kinetycznej oraz potencjalnej.

Powyższą równość sprawdzamy, różniczkując:

$$\dot{E} = m\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}} + \frac{dV}{dx}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}\left(m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{dV}{dx}\right) = 0,$$

gdzie ostatnia równość wynika z równania ruchu (2.3)

**Przykład 1. Jednorodne pole grawitacyjne.** W każdym punkcie na prostej na cząstkę działa stała siła  $F = -gm$ , gdzie  $g$  to stała wartość przyśpieszenia grawitacyjnego a  $m$  to masa cząstki. Oznaczmy zwyczajowo położenie cząstki współrzędną  $z$  (nawiązując do "pionowej" prostej kartezjańskiego układu współrzędnych)

Za energię potencjalną można przyjąć

$$V = mgz,$$

by uzyskać (dla wygody) że w punkcie zero energia cząstki wynosi zero. Łatwo widać, że naszym równaniem ruchu jest:

$$\ddot{z} = -g,$$

skąd wyprowadzamy równanie na prędkość

$$\dot{z} = v_0 - gt,$$

gdzie prędkość początkowa  $v_0 = \dot{z}(0)$ , oraz równanie na położenie cząstki ("wysokość")

$$z = z(0) + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

gdzie  $z(0)$  nazwiemy położeniem początkowym cząstki.

**Przykład 2. Prosty oscylator harmoniczny.** Energia potencjalna oscylatora harmonicznego wyraża się wzorem

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \text{ gdzie } k > 0$$

skąd dostajemy siłę daną równością:

$$F = -kx.$$

Siła sprężysta  $F$  jest proporcjonalna do wychylenia cząstki od położenia stacjonarnego w punkcie 0 i o przeciwnym znaku. Dostajemy równanie ruchu:

$$m\ddot{x} = -kx,$$

którego rozwiązanie daje

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \text{ gdzie } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Widać, że ruch cząstki jest okresowy a pełen cykl odpowiada okresowi  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Okres ten nie zależy od stałych  $A$  a  $B$ , które są stałymi pochodzącymi z całkowania równania  $m\ddot{x} = -kx$ , a które można wyliczyć znając warunki początkowe, dokładniej:  $A = x(0)$  oraz  $B\omega = \dot{x}(0)$ .

Wracamy do sytuacji na prostej z potencjałem  $V$ . Zasada zachowania energii pozwala nam wyrazić równania ruchu równaniem różniczkowym pierwszego stopnia! Zauważmy, że druga zasada dynamiki wyraża ruch równaniem stopnia drugiego. Ponieważ mamy  $E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x)$ , wyliczamy

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}.$$

Zauważając, że otrzymaliśmy równanie o zmiennych rozdzielonych, możemy zapisać:

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}.$$

Powyżej  $x'$  oczywiście nie oznacza różniczkowania tylko zmienną przestrzenną wzdłuż której całkujemy prawą stronę równania by ostatecznie uzyskać uwikłaną postać ruchu cząstki.

**Podejście jakościowe.** Analizując energię potencjalną w polu zachowującym energię można nieraz wiele powiedzieć o zachowaniu cząstki umieszczonej w układzie, nawet jeśli nie potrafimy rozwiązać równań ruchu cząstki. Jest to podobna sytuacja jak w przypadku analizy portretu fazowego równań różniczkowych stopnia pierwszego, tutaj jednak mamy równanie stopnia drugiego, zgodnie z drugą zasadą dynamiki w niniejszym kontekście:

$$m \cdot \ddot{x} = -\frac{dV}{dx}.$$

Po wykonaniu odpowiedniego wykresu potencjału, można analizować jakościowo zachowanie cząstki: cząstka umieszczona w polu o potencjale  $V$  "nabiera" prędkości zgodnie z kierunkiem

wyznaczonym przez spadek wykresu - energia kinetyczna rośnie tam, gdzie energia kinetyczna  $V$  maleje. W szczególności, cząstka umieszczona w układzie z zerową prędkością zacznie poruszać się w takim samym kierunku jak piłeczka umieszczona na sporządzonym wykresie. Ważną rolę odgrywają punkty stacjonarne.

**Punktami równowagi** potencjału  $V$  nazywamy jego punkty stacjonarne, tj. punkty  $x_0$  spełniające

$$\frac{dV}{dx}(x_0) = 0.$$

Punkty z dodatnią drugą pochodną  $V''(x_0) > 0$  to punkty równowagi **stabilne** - cząstka umieszczona w ich pobliżu będzie zachowywać się podobnie jak w przypadku oscylatora harmonicznego względem punktu  $x_0$ . Punkty stacjonarne spełniające  $V''(x_0) < 0$  (maksima globalne  $V$ ) to punkty **niestabilne** - cząstka umieszczona w pobliżu oddali się od punktu równowagi. Sytuacja  $V''(x_0) = 0$  nie rostrzyga o typie równowagi.

Wartościowe dydaktycznie jest poniższe zadanie.

**Zadanie 1.** Rozważmy  $V(x) = m \cdot (x^3 - 3x)$ . Ten dość prosty przykład prowadzi do równania ruchu, którego rozwiązanie nie wyraża się funkcjami elementarnymi. Sprawdź to.

Narysuj wykres funkcji  $V$ , ze szczególnym uwzględnieniem punktów  $-1, 1, 2$ . Jak zachowa się cząstka, umieszczona na prostej z prędkością początkową  $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ , jeśli znajdzie się:

- w punkcie  $1$  lub  $-1$
- w przedziale  $(-1, 2)$
- w przedziale  $(-\infty, -1)$
- w przedziale  $(2, \infty)$ ,
- w punkcie  $x_0 = 2$  (przypadek specjalny).

A co jeśli cząstka zostanie umieszczona z prędkością początkową różną od zera?

**2.2. Wymiar  $n=3$ .** Wracamy do sytuacji ogólnej, w której  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Pracujemy dalej przy założeniu, że siły działające w układzie zależą tylko i wyłącznie od położenia:  $F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = F(\mathbf{x})$  i często będziemy zaniedbywać w notacji argument  $x$ . Podstawowe pytanie, na które zaraz odpowiemy, brzmi: kiedy pole sił zależne tylko od położenia jest **zachowawcze**, tzn. przy jakich założeniach spełniona jest zasada zachowania energii dla pewnej energii potencjalnej  $V: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Mając już potencjał  $V$ , definiujemy **energię całkowitą** cząstki  $\mathbf{x}$ :

$$(2.5) \quad E = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + V(\mathbf{x}),$$

gdzie  $a \cdot b$  oznacza Euklidesowy iloczyn skalarny wektorów  $a, b$  natomiast  $\|a\|$  oznacza normę Euklidesową wektora  $a$ . Człon

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})$$

nazywamy **energią kinetyczną** cząstki. Przypomnijmy dodatkowo, że dla dowolnej funkcji (gładkiej)  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gradient tej funkcji  $\nabla V$  jest zdefiniowany:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \left( \frac{dV}{dx}(\mathbf{x}), \frac{dV}{dy}(\mathbf{x}), \frac{dV}{dz}(\mathbf{x}) \right).$$

**Twierdzenie 1.** Pole  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest zachowawcze wtów, gdy istnieje funkcja  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  spełniająca

$$(2.6) \quad F(x) = -\nabla V(x).$$

Co więcej, funkcja  $V$  z powyższej równoważności jest energią potencjalną dla pola  $F$ , tzn. wielkość  $E = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x})$  jest stała wzdłuż rozwiązań równania ruchu  $m \cdot \ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V$ .

*Proof.* By udowodnić implikację  $\Rightarrow$ , wystarczy, podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, zróżniczkować (po "czasie") wyrażenie  $E = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x})$ , gdzie  $V$  jest założoną energią potencjalną, korzystając z własności iloczynu skalarnego:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} \cdot (m\ddot{\mathbf{x}} + \nabla V(\mathbf{x})) = 0,$$

gdzie ostatnie wyrażenie wyzerowało się spełniając równanie ruchu.

W drugą stronę, założymy że dla pewnej funkcji potencjału  $V$  energia (2.5) jest zachowana. Mamy pokazać, że  $F = -\nabla V$ . Wprowadzimy w tym celu pojęcie pracy. Jeśli cząstka  $\mathbf{x}$  poruszająca się w polu  $F$  zmieniła swoje położenie z pozycji  $x(t_0) = a$  do punktu  $x(t_1) = b$  zakreślając swoim torem krzywą  $\gamma$ , wtedy **pracę** wykonaną nad cząstką  $\mathbf{x}$  przez siłę  $F$  nazwiemy wartością całki z  $F$  wzdłuż krzywej  $\gamma$ :

$$W = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_{\gamma} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Wyrażenie podcałkowe  $F(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}$  nazwamy **mocą**. Zastępując funkcję  $F$  wyrażeniem  $m\ddot{\mathbf{x}}$ , dostajemy

$$W = m \int_{t_0}^{t_1} \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = \frac{1}{2}m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})}{dt} dt = T(t_2) - T(t_1),$$

gdzie ostatnia równość wynika błyskawicznie z podst. twierdzenia rachunku całkowego (przypomnijmy  $T(t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ ). Ale ponieważ założyliśmy zasadę zachowania energii, zatem dla pewnego potencjału  $V$  zmiana energii kinetycznej odpowiada zmianie energii potencjalnej

$$T(t_2) - T(t_1) = V(a) - V(b),$$

skąd całka po drodze  $\gamma$  zależy tylko od jej krańców  $a$  i  $b$  spełniając zależność

$$\int_{\gamma} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = V(a) - V(b) = -V(b) - (-V(a)),$$

skąd już wynika (po zastosowaniu odpowiedniej wektorowej wersji podst. twierdzenia rachunku całkowego), że  $F = \nabla(-V) = -\nabla V$ .  $\square$

### Słowo o gradiencie.

Dla ustalonego  $z \in \mathbb{R}^3$  gradient  $\nabla V(z)$  jest prostopadły do poziomicy

$$l_z = \{x: V(x) = V(z)\}$$

w punkcie  $z$  oraz, jeśli jest niezerowy, wskazuje on kierunek najszybszego wzrostu funkcji  $V$ .

Niech  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow l_z$  będzie krzywą (jak zawsze, gładką) spełniającą  $\gamma(0) = z$ . Ponieważ  $V(\gamma(t)) = V(z) = \text{const}$ , a zatem

$$0 = \frac{d}{dt} V(\gamma(t)) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t).$$

W szczególności,  $\nabla V(z)$  jest prostopadły do dowolnej krzywej o wartościach w poziomicy  $l_z$  przechodzącej przez punkt  $z$  oraz do całej przestrzeni stycznej w punkcie  $z$  do poziomicy  $l_z$  co wyraża wspomnianą prostopadłość. Przy okazji przypomnijmy, że funkcję

$$\nabla V(\gamma) \cdot \dot{\gamma}$$

nazywamy pochodną  $V$  wzdłuż trajektorii  $\gamma$ .



Aby uzasadnić kierunek najszybszego wzrostu, ustalmy dowolny wektor jednostkowy  $u \in \mathbb{R}^3$  i zastanówmy się, kiedy funkcja

$$t \longrightarrow V(z + t \cdot u)$$

ma największą pochodną (najszybszy wzrost) w punkcie  $t = 0$ ? Ponieważ mamy

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt}V(z + t \cdot u) = \nabla V(z) \cdot u,$$

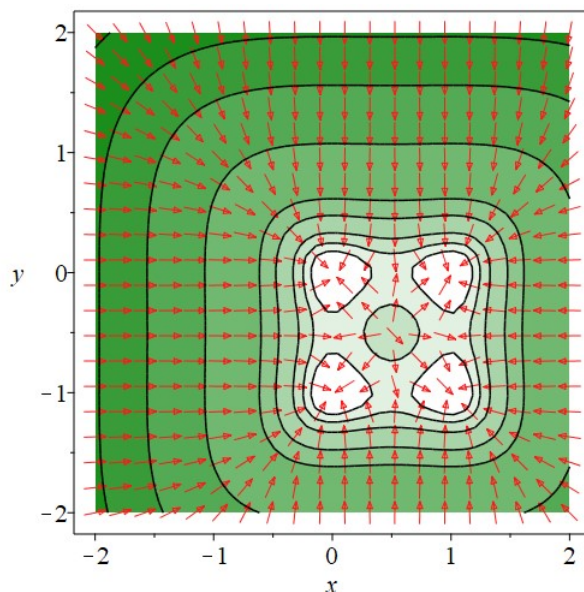
widzimy, że iloczyn skalarny gradientu w punkcie  $z$  i wektora  $u$  jest równy pochodnej kierunkowej funkcji  $V$  w punkcie  $z$  w kierunku wektora  $u$ . W efekcie poszukiwany kierunek jest wyznaczony przez wektor  $u = \frac{1}{\|\nabla V(z)\|} \nabla V(z)$  - wartość iloczynu skalarnego  $\nabla V(z) \cdot u$  jest największa gdy wektor  $u$  będzie równoległy do  $\nabla V(z)$  (i o tym samym zwrocie).

Jaki można wysnuć wniosek dotyczący układów zachowawczych (2.6)? **W układzie zachowawczym siły działające na ciało działają w kierunku najszybszego spadku jego energii potencjalnej.** Ilustracją tego zjawiska z pewną dokładnością jest płynąca rzeka lub, może trochę celniej, kropla wody umieszczona na gładkiej powierzchni, która spływa w kierunku wyznaczonym przez gradient tej powierzchni (w każdym punkcie powierzchni mamy przypisaną wysokość  $V$  a siła wypadkowa działająca na kroplę wskazuje kierunek najszybszego spadku tej wysokości).

Poniżej na rysunku pole gradientowe funkcji

$$F(x, y) = -V(x, y) = -1 \cdot (x^2 \cdot (1 - x)^2 + y^2 \cdot (1 + y)^2).$$

Strzałki obrazują siły działające w polu o potencjale  $V$  (należy nie mylić kierunków działających sił z kierunkami przebiegu rozwiązań równań ruchu).



Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, ważną rolę w analizie układów posiadających energie potencjalną  $V$  odgrywają **punkty równowagi**, tj. punkty stacjonarne przestrzeni:

$$\nabla V(x) = 0.$$

Punkty stacjonarne, w których energia potencjalna  $V$  ma minimum lokalne nazywa się często punktami równania stabilnymi, natomiast punkty stacjonarne będące maksimumami lokalnymi nazywa się punktami niestabilnymi.

### 2.3. Słowo o równaniach różniczkowych stopnia 2. .

Jak widać z dotychczasowych rozważań, równania ruchu w dynamice Newtonowskiej są to równania różniczkowe stopnia drugiego. Analizę jakościową takich równań można sprowadzić do analizy znanych nam lepiej z równań różniczkowych równań stopnia 1:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, x).$$

Dla naszych obecnych rozważań wystarczy skupić się na równaniu autonomicznym, tj. takim, w którym prawa strona nie zależy od czasu:

$$(2.8) \quad \dot{\mathbf{x}} = f(x),$$

gdzie  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  oraz  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest funkcją gładką. W szczególności, jeśli  $f$  jest klasy  $C^1$ , wtedy mamy zapewnione istnienie (twierdzenie Peano) oraz jednoznaczność (twierdzenie Picarda) rozwiązania dla dowolnego warunku początkowego  $x(t_0) = x_0$ . Jak teraz sprowadzić równanie stopnia drugiego:

$$\ddot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$$

do równania stopnia 1? Zdefiniujmy funkcję  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  równością:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, F(\mathbf{x})).$$

Zauważmy teraz, że jeżeli wektor  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest rozwiązaniem równania

$$(2.9) \quad (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

to spełniony jest układ równań:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$  oraz  $\dot{\mathbf{y}} = F(\mathbf{x})$ , co błyskawicznie prowadzi do obserwacji, że funkcja  $\mathbf{x}$  spełnia równanie ruchu  $\ddot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$  natomiast  $\mathbf{y}$  to prędkość (pochodna) rozwiązania równania ruchu  $\mathbf{x}$ . W ten sposób sprowadzamy równanie drugiego stopnia na  $\mathbb{R}^n$  do równania stopnia pierwszego na  $\mathbb{R}^{2n}$ . Co więcej, łatwo widać, że funkcja  $f$  jest klasy  $C^1$  wtedy i tylko wtedy, gdy pole  $F$  jest klasy  $C^1$ , co gwarantuje w naszej sytuacji istnienie (oraz jednoznaczność!) rozwiązania równania ruchu dla dowolnego warunku początkowego  $\mathbf{x}(t_0) = x_0$  oraz  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = v_0$  (ponieważ  $\mathbf{y}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}(t_0)$ ). Można teraz analizować pole kierunków dla równania (2.9), które przedstawi łączne zachowanie wektora  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  (co prawda, już dla przypadku  $n = 2$  takie pole kierunków będzie czterowymiarowe co utrudnia sporządzenie oraz odczytanie rysunku). Pamiętając o zasadzie zachowania energii wiemy, że rozwiązania szczególne równania (2.9) będą zawierać się w poziomicach funkcji

$$L(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 + V(x).$$

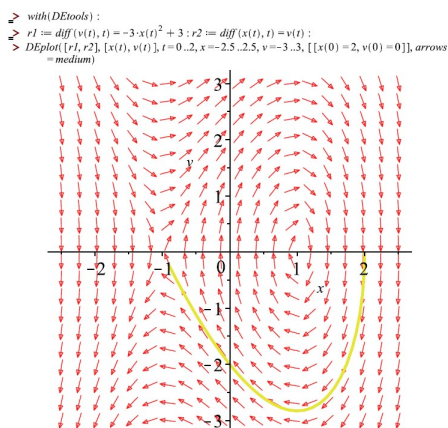
W szczególności oznacza to, że można spodziewać się rozwiązań okresowych, a każde rozwiązanie szczególne (2.9) z warunkiem początkowym  $\mathbf{x}(t_0) = x_0$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = v_0$  będzie zawierać się w poziomicy o równaniu  $L(x, y) = L(x_0, v_0)$  (energia rozwiązań jest stała w czasie).

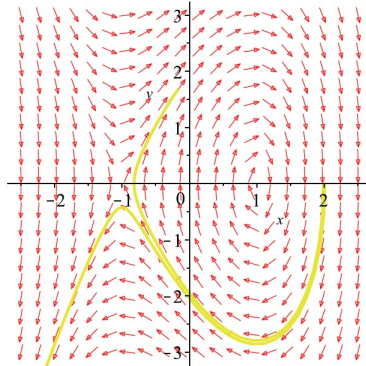
Zauważmy teraz, że jeśli  $x_0$  jest minimum lokalnym energii potencjalnej (stabilnym punktem równowagi), wtedy funkcja  $L$  ma minimum lokalne w punkcie  $(x_0, 0)$ , co w szczególności oznacza, że rozwiązanie (2.9) o warunkach początkowych  $x_0 = 0$  oraz  $y(0) = v_0 = 0$  jest rozwiązaniem stacjonarnym (stałym) równania (2.9). Co więcej, funkcja

$$\tilde{L}(x, y) = L(x, y) - L(x_0, 0) = L(x, y) - V(x_0),$$

będzie dodatnia w pewnym sąsiedztwie punktu  $(x_0, 0)$  oraz stała wzdłuż rozwiązań, a zatem będzie słabą funkcją Lapunowa dla punktu  $(x_0, 0)$ , co dowodzi twierdzenie Lagrange'a mówiące, że stan  $(x_0, 0)$  jako **minimum lokalne energii całkowitej jest stabilny w sensie Lapunowa**, co oznacza dla dowolnego otoczenia  $U$  punktu  $(x_0, 0)$  istnieje otoczenie tego punktu  $V \subset U$  takie, że rozwiązanie startujące z dowolnego stanu  $(x, v) \in V$  pozostaje w otoczeniu  $U$ .

Poniższe obrazy, sporządzone w Maple, przedstawiają pole kierunków dla pola z Zadania 1 (o energii potencjalnej  $V(x) = m(x^3 - 3x)$ ) wraz z przykładowymi trzema rozwiązaniami startującymi z prędkością początkową  $v_0 = 0$  z punktu początkowego:  $x_0 = 2$  (na pierwszym rysunku) oraz z punktów początkowych  $x_0 = 1,99$ ,  $x_0 = 2,01$  (drugi rysunek). Bardzo proszę przeanalizować (pamiętając, że na osi  $x$  mamy położenie a na osi  $y$  prędkość cząstki). Naturalnie, rozwiązania pokrywają jednoznacznie całą płaszczyznę (twierdzenia Peano oraz Picarda). "Dajcie mi położenia, pędy i siły działające w układzie, a przedstawię wam całość przeszłych oraz przyszłych zdarzeń."





#### 2.4. Pola siłowe zachowawcze. Siły Centralne. .

Wracamy teraz do zachowawczego pola sił danego równaniem (2.6) - przykładem takiego pola o szczególnym znaczeniu są tzw. **siły centralne**, tj. siły, w których wartość potencjału zależy tylko i wyłącznie od odległości od ustalonego punktu - domyślnie będzie to środek układu współrzędnych 0. Wynika stąd, że poziomice potencjału to okręgi (lub sumy okręgów), a wypadkowa siła zawsze będzie miała kierunek wskazujący środek układu współrzędnych (czyli kierunek zgodny z położeniem punktu  $\mathbf{x}$ , zwrot może być przeciwny). Dodatkowo, siła również będzie zależeć tylko i wyłącznie od odległości od zera. Łatwo to sprawdzić. Zauważmy, że potencjał jest postaci

$$V(\mathbf{x}) = \hat{V}(\|\mathbf{x}\|).$$

Z pewnym zaniedbaniem notacji, będziemy często pisać  $V(\mathbf{x}) = V(\|\mathbf{x}\|)$ , traktując  $V$  jako funkcję odległości od zera. Długość wektora położenia  $\|\mathbf{x}\|$  będziemy często oznaczać przez  $r$ , zależnie od kontekstu. Policzmy omawiany gradient przy naszych oznaczeniach, różniczkując złożenie funkcji  $V(\mathbf{x}) = V(r(x_1, x_2, x_3))$ , gdzie  $r(x_1, x_2, x_3) = \|(x_1, x_2, x_3)\|$ :

$$(2.10) \quad \nabla V(x_1, x_2, x_3) = \frac{dV}{dr}(r) \left( \frac{dr}{dx_1}, \frac{dr}{dx_2}, \frac{dr}{dx_3} \right) = \frac{dV}{dr}(r) \left( \frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r} \right) = \frac{dV}{dr} \hat{\mathbf{x}},$$

gdzie dla niezerowego wektora  $\mathbf{x}$  będziemy często używać notacji

$$(2.11) \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\mathbf{x}}{r}.$$

Tak więc mamy postać omawianej **siły centralnej**:

$$F(\mathbf{x}) = -\frac{dV}{dr}(r) \hat{\mathbf{x}}.$$

Poniżej kilka przykładów.

##### Przykład 1. Pole grawitacyjne.

Rozważamy ciało o masie  $M$  umieszczone w środku układu współrzędnych. Cząstka o masie  $m$  doświadcza w efekcie energii potencjalnej o równaniu:

$$V(r) = -G \frac{Mm}{r},$$

gdzie  $G$  jest stałą grawitacji. W efekcie na cząstkę działa siła

$$F(\mathbf{x}) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{x}},$$

wyrażając Newtonowskie **prawo powszechnego ciążenia**. Zauważmy od razu, że przyśpieszenie cząstki w polu grawitacyjnym nie zależy w ogóle od jej masy! Wynika to z fenomenu (potwierzonego doświadczalnie), że masa cząstki występująca w drugiej zasadzie dynamiki Newtona (masa bezwładnościowa, bezwładna) oraz masa występująca we wzorze na siłę grawitacji (masa grawitacyjna) to ta sama wielkość fizyczna. Równoważność tych wielkości, zwana w fizyce **zasadą równoważności**, stała się później dla Einsteina podstawą ogólnej teorii względności. Wielkość

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

bywa nazywana (newtonowskim) **polem grawitacyjnym** masy  $M$ .

Wyprzedzając trochę materiał, wprowadźmy od razu potencjał grawitacyjny dla układu cząstek (dotychczasowa sytuacja, w której skupiamy się na jednej cząstce, jest niedostateczna do opisu Wszechświata lub innych skomplikowanych układów). Jeśli mamy układ cząstek o pozycjach  $\mathbf{x}_i$  o masach  $M_i$ , wtedy ich całkowite pole grawitacyjne wynosi:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \sum_i \frac{M_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|},$$

natomiast siła grawitacji doświadczana przez cząstkę o masie  $m$  w pozycji  $\mathbf{x}$  wynosi:

$$F(\mathbf{x}) = -G \sum_i \frac{M_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2} (\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}) = -G \sum_i \frac{M_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

**Zadanie.** Pokaż, że zewnętrzne **pole grawitacyjne** (sferycznej) **planety** o masie  $M$  i promieniu  $R$  jest takie samo jak pole grawitacyjne cząstki o masie  $M$  umieszczonej w środku (ciężkości) planety. Zakładamy, że rozkład masy w planecie jest wyrażony gęstością  $\rho(r)$  zależną tylko i wyłącznie od odległości  $r$  od środka planety uzyskując wzór na potencjał grawitacyjny:

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \int_{K(0,R)} \frac{\rho(x)}{\|\mathbf{x} - x\|} d^3x.$$

Należy pokazać  $\phi(\mathbf{x}) = -G \frac{M}{r}$ , gdzie  $r$  to odległość  $\mathbf{x}$  od środka. Najlepiej mądrze wprowadź współrzędne sferyczne. Wersja uproszczona zadania: założyć stały rozkład masy planety.

**Prędkość ucieczki.** W przypadku jednowymiarowym rozważyliśmy jednorodne pole grawitacyjne, co można wykorzystać w praktyce jako dobre przybliżenie pola grawitacyjnego, jeśli zakres opisywanego ruchu jest bardzo mały w stosunku do odległości  $R$  cząstki od masy  $M$ . W rzeczywistości wartość pola grawitacyjnego rośnie odwrotnie proporcjonalnie do wzrostu odległości  $R$  (dążąc do wartości zero) a siła grawitacji działająca na cząstkę maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu tej odległości. Możemy w tej sytuacji łatwo wyznaczyć prędkość ucieczki ciała umieszczonego na powierzchni planety o masie  $M$  i promieniu  $R$  (korzystając z poprzedniego zadania), wystrzelonego w kierunku pionowym (tj. prostopadle do powierzchni planety)

z prędkością  $V_0$ . W takiej sytuacji opis ruchu ciała będzie jednowymiarowy, a prędkość która spowoduje opuszczenie planety łatwo wyznaczamy z energii całkowitej:

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{R}.$$

Warunek

$$\frac{1}{2}mV^2 \geq \frac{GMm}{R}$$

gwarantuje, że prędkość kinetyczna będzie zawsze dodatnia - grawitacja planety nigdy nie zdoła nas zatrzymać. **Prędkość ucieczki** wynosi zatem:

$$(2.12) \quad V_e \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Ile wynosi prędkość ucieczki dla naszej planety?

**Ciekawostka. Promień Schwarzschilda.** Jeśli kulisty obiekt o promieniu  $R$  i masie  $M$  spełnia nierówność przeciwną do (2.12) dla prędkości  $V_e = c$  ( $c$  to stała fizyczna oznaczająca prędkość światła w próżni), tzn. jeśli zachodzi,

$$R < \frac{2GM}{c^2},$$

nazywamy go czarną dziurą. Pamiętamy jednak, że mechanika Newtonowska nie nadaje się do opisu zjawisk relatywistycznych (w szczególności prędkość światła nie jest w niej prędkością wyróżnioną). Jednakże **promień Schwarzschilda**  $R_s$ , definiujący wielkość obiektu kulistego o masie  $M$  poniżej której obiekt ten jest **czarną dziurą** (czyli gwiazdą tak gęstą że światło nie może uciec z jej powierzchni) wynosi dokładnie tyle, ile uzyskaliśmy w naszym niepoprawnym (tj. nierelatywistycznym) podejściu do tego zagadnienia, tzn.

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

jest faktyczną wartością promienia Schwarzschilda dla niewirującej wokół własnej osi planety.

**Przykład 2. Pole elektryczne.** W środku układu współrzędnych rozważamy cząstkę o ładunku  $Q$  która generuje pole elektryczne o potencjale:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

energia potencjalna nieruchomej cząstki o ładunku  $q$  znajdującej się w tym polu wynosi

$$V(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r},$$

a siła działająca na tę cząstkę to siła Coulomba i wynosi:

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{x}}{r^2},$$

gdzie  $\mathbf{x}$  to położenie cząstki (przypomnijmy, że kierunek  $\hat{x}$  jest zdefiniowany równością (2.11)) natomiast  $\epsilon_0$  to stała fizyczna określająca przenikalność elektryczną próżni.

Mamy tutaj uderzające podobieństwo siły elektrycznej i siły grawitacji - różnicą jest jednak, że siły grawitacji pomiędzy dwoma ciałami są zawsze przyciągające, natomiast zwrot siły Coulomba zależy od znaku iloczynu ładunków  $Qq$  - każdy z ładunków ma wartość dodatnią lub ujemną (podczas gdy masa, występująca we wzorze na siłę grawitacji, jest zawsze nieujemna). Trzeba również zaznaczyć, że siła elektryczna jest jedynie składową siły elektromagnetycznej -

nie będziemy zajmować się w tym kursie elektromagnetyzmem poza sytuacją z kolejnego podrozdziału, gdzie stałe pole elektromagnetyczne dostarczy nam ważnego przykładu.

**Przykład 3.** Uogólniając prosty przykład oscylatora harmonicznego z przypadku jednowymiarowego, błyskawicznie dostaniemy potencjał:

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2,$$

a zatem siła działająca na cząstkę umieszczoną w punkcie  $x$  wyniesie:

$$F(\mathbf{x}) = -kr\hat{\mathbf{x}}.$$

W takim przypadku wartość potencjału rośnie do nieskończoności wraz z oddalaniem się od środka układu współrzędnych - widać, że żadna prędkość nadana w chwili zero cząstce nie umożliwi jej ucieczki w nieskończoność jak to miało miejsce w przypadku potencjału grawitacyjnego.

## 2.5. Pole zależne od prędkości.

Do tej pory zajmowaliśmy się (i zazwyczaj będziemy zajmować się) zachowawczymi siłami zależnymi tylko od położenia. Poznaliśmy warunek wyrażający, kiedy pole siłowe  $F(t, x, x') = F(x)$  jest zachowawcze. Przyjrzyjmy się teraz dwóm przykładom sił zależnych od położenia i prędkości cząstki w układzie.

**Przykład 1.** Ważnym przykładem sił zależnych od prędkości są opory ruchu związane z poruszaniem się ciała w płynie (w cieczy lub w gazie). Siły będące efektem takich oporów skierowane są w kierunku przeciwnym do ruchu cząstki, najczęściej przyjmujemy że są one o wartości proporcjonalnej do prędkości lub kwadratu prędkości tej cząstki, a zatem mające często postać

$$F = -\gamma v \text{ lub } F = -\gamma \|v\|v = -\gamma \|v\|^2 \hat{v},$$

gdzie  $v = \dot{\mathbf{x}}$ . Dla ilustracji takiego układu, rozważmy tłumiony oscylator harmoniczny (z liniowym tłumieniem), uzyskując następujące równanie ruchu:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -kx - \gamma\dot{\mathbf{x}}.$$

Podzielimy obie strony przez  $m$  i wprowadzimy oznaczenia  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  oraz  $\alpha = \frac{\gamma}{2m}$ , uzyskując równanie:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 x - 2\alpha\dot{\mathbf{x}}.$$

Przypomnijmy, że wielkość  $\omega^2$  to okres drgań nietłumionego oscylatora. Zachowanie oscylatora można zaklasyfikować następująco:

- (1) Jeśli  $\omega^2 > \alpha^2$ , oscylator wciąż wykonuje grania, których amplituda zbiega wykładniczo do zera
- (2) Jeśli  $\omega^2 < \alpha^2$ , oscylator nie zdoła wykonać żadnego drgania ze względu na zbyt duże opory ruchu
- (3) Jeśli  $\omega^2 = \alpha^2$ , mamy przypadek graniczny - co się wtedy dzieje?

Przeanalizuj dokładnie powyższy przykład jako **Zadanie**, uzasadniając powyższe uwagi.

**Przykład 2. Stałe pole elektromagnetyczne.** Zrobimy ten przykład, ale najpierw trochę o siłach centralnych.

## 2.6. Siły centralne.

### Zasada zachowania momentu pędu.

**Pędem** cząstki o masie  $m$  i prędkości  $\dot{\mathbf{x}}$  nazywamy wielkość

$$p = m \cdot \dot{\mathbf{x}}.$$

**Druga zasada dynamiki** mówi zatem, że siła odpowiada za zmianę pędu:

$$\dot{p} = F,$$

skąd błyskawicznie wynika **zasada zachowania pędu** dla cząstki- jeśli nie działa żadna siła, wtedy pęd jest stały  $\dot{p} = 0$ .

Siły centralne, którymi się za chwilę zajmiemy, są wyjątkowej natury, zachowując, oprócz energii całkowitej cząstki, inną ważną wielkość. Zdefiniujmy teraz **moment pędu cząstki** (z ang., angular momentum):

$$L = m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}.$$

Przypomnijmy, że iloczyn skalarny wektorów  $a \times b$  to taki wektor  $z$  prostopadły do wektorów  $a, b$  o długości  $\|a\| \cdot \|b\| \sin \alpha$  ( $\alpha$  to kąt między wektorami  $a$  i  $b$ ), że baza  $(a, b, z)$  (o ile  $a$  i  $b$  będą niezależne) jest dodatnio zorientowana (zgodnie z regułą prawej dłoni). W odróżnieniu od pędu liniowego  $p = m\dot{\mathbf{x}}$ , moment pędu zależy od środka układu współrzędnych względem którego opisujemy ruch  $x$ . W szczególności, moment pędu jest zatem prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez bieżące położenie i pęd, zachowując jednak informację o "orientacji" ruchu względem środka układu (tzn. ruch jest zgodny lub przeciwny do orientacji ruchu wskazówek zegara, innymi słowy: prędkość kątowa jest ujemna/dodatnia).

Poniżej przydatny wzór, który będziemy często stosować:

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \dot{a} \times b + a \times \dot{b}.$$

Zróżniczkujmy teraz moment pędu dla **przypadku sił centralnych**:

$$\dot{L} = m\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} + m\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} = 0 + \mathbf{x} \times F(\mathbf{x}) = 0,$$

ponieważ siła centralna  $F$  działa zawsze w kierunku  $\hat{\mathbf{x}}$  wyznaczonym przez  $\mathbf{x}$ . Otrzymaliśmy, że wielkość  $L$  jest stała, co oznacza **zasadę zachowania momentu pędu dla sił centralnych**:

$$\dot{L} = 0.$$

**W przypadku ogólnym**, wektor

$$\tau := \mathbf{x} \times F(\mathbf{x})$$

nie musi się zerować. Wektor  $\tau$  nazywamy **momentem siły**, a druga zasada dynamiki Newtona dla momentu pędu wyrazi się:

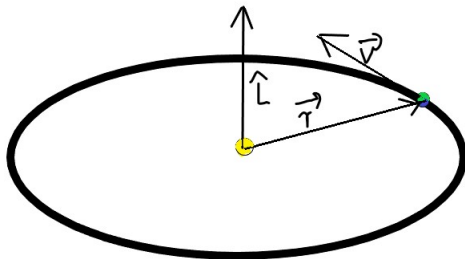
$$\dot{L} = \tau,$$

w pewnej analogii do drugiej zasady wyrażonej dla pędu liniowego  $\dot{p} = F$ . Siła odpowiada za zmianę pędu, a moment siły odpowiada za zmianę momentu pędu.

Zauważmy teraz, że ponieważ w przypadku sił centralnych wektor  $L$  jest stały i prostopadły do wektorów  $\mathbf{x}$  oraz  $\dot{\mathbf{x}}$ , ruch ciała w takim polu odbywa się w jednej płaszczyźnie! Płaszczyzna ta jest wyznaczona w dowolnej chwili przez położenie i wektor prędkości (jeśli jest niezerowy), a analiza ruchu sprowadza się do przypadku dwuwymiarowego. W polu centralnym możemy zatem



dobrac układ odniesienia w taki sposób by oś  $z$  naszego układu współrzędnych była zgodna z wektorem  $L$  (ponieważ jest on stały), a ruch będziemy opisywać na płaszczyźnie  $xy$ . Użyjemy do tego celu współrzędnych biegunowych. Ponieważ  $L$  jest zgodny z wektorem  $(0, 0, 1)$ , ruch będzie odbywać się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jak na poniższym rysunku.



**Równania ruchu we współrzędnych biegunowych.** Będziemy często używać oznaczeń  $\mathbf{r} = \mathbf{x}$ ,  $r = \|\mathbf{r}\|$ . Dowolny punkt płaszczyzny  $\mathbf{x} = (x, y)$  jest postaci

$$(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta),$$

a z każdym kątem  $\theta$  jest związana ortonormalna baza  $\mathbb{R}^2$  postaci:

$$\hat{\mathbf{r}} = [\cos \theta, \sin \theta], \hat{\boldsymbol{\theta}} = [-\sin \theta, \cos \theta].$$

Powyższa baza jest oczywiście funkcją kąta  $\theta$ , a różniczkowanie po zmiennej  $\theta$  daje:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = [-\sin \theta, \cos \theta] = \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{oraz} \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}}.$$

Wyznamy teraz równania ruchu, pamiętając, że  $\mathbf{r}$  oraz  $\theta$  są funkcją czasu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d(r\hat{\mathbf{r}})}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt},$$

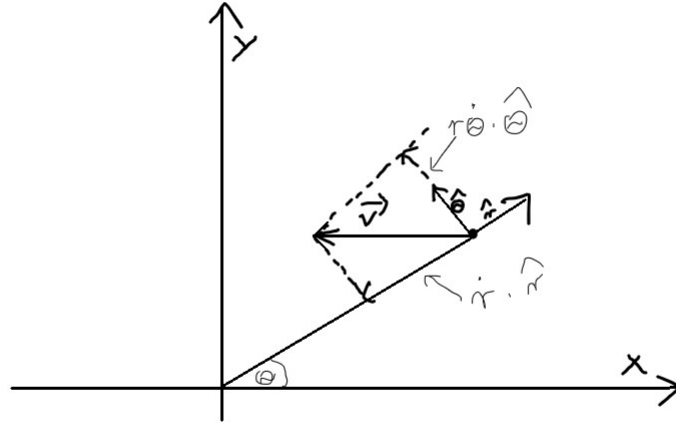
skąd

$$(2.13) \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Naturalnie, jak widzimy powyżej, zmiana położenia  $\dot{\mathbf{x}}$  jest opisana zmianą promienia  $\dot{r}$  oraz prędkością kątową  $\dot{\theta}$ . Różniczkując powyższe wyrażenie po czasie (omijam jedną linijkę rachunków, proszę przeciwzyć rachunek samodzielnie), uzyskujemy wartość przyspieszenia:

$$(2.14) \quad \ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Poniższy rysunek przedstawia rozkład wektora prędkości na składową radialną  $\dot{r}\hat{\mathbf{r}}$  oraz styczną  $r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$



**Przykład. Ruch po okręgu w polu centralnym.** W ruchu po okręgu mamy  $\dot{r} = 0$  skąd dostajemy, że energia potencjalna  $V(r)$  jest stała, w efekcie (z zasady zachowania energii) stała jest wartość  $v^2 = \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$  oraz prędkość kątowna będzie stała:  $\dot{\theta} = \omega$ . Stąd dostajemy, używając (2.13),

$$\dot{\mathbf{x}} = r\omega\hat{\Theta}$$

oraz

$$\ddot{\mathbf{x}} = -r\omega\dot{\hat{\theta}} = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}}.$$

W efekcie, z drugiej zasady dynamiki Newtona, cząstka o masie  $m$  będzie poruszać się po okręgu, gdy zostanie do niego przyłożona siła w kierunku  $-\hat{\mathbf{r}}$  (siła dośrodkowa) o wartości

$$\|F\| = m \cdot r\omega^2 = \frac{mv^2}{r},$$

gdzie  $v$  to bieżąca prędkość cząstki (prostopadła do położenia  $\mathbf{r}$ ) a  $r$  to jej odległość od centrum układu.

**Potencjał efektywny.** Wracamy teraz do równań ruchu. Zapisując drugą zasadę dynamiki przy użyciu (2.14) oraz postaci funkcji  $F(\mathbf{x}) = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}}$ , dostajemy:

$$m(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\hat{\mathbf{r}} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\Theta} = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}}.$$

Dostajemy od razu  $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ , a zatem  $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$ , w efekcie czego widzimy, że wielkość

$$l := r^2\dot{\theta}$$

jest stała. Nie jest to zaskakujące, gdy zauważymy, że  $\|L\| = ml$ . By to sprawdzić, wystarczy skorzystać z równania (2.13), otrzymując:

$$L = m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = mr\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\Theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\Theta},$$

co oznacza  $\|L\| = mr^2\dot{\theta}$ , ponieważ  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\Theta}$  to wektory jednostkowe. Mamy teraz (1-wymiarowe!) równanie opisujące promień  $r$ :

$$m(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2) = -\frac{dV}{dr},$$

które, korzystając z faktu  $l := r^2\dot{\theta} = \text{const}$ , zapisujemy w postaci:

$$m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + \frac{ml^2}{r^3}.$$

W efekcie

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V(r) + \frac{ml^2}{2r^2}\right),$$

a wielkość

$$(2.15) \quad V_e(r) = V(r) + \frac{ml^2}{2r^2}$$

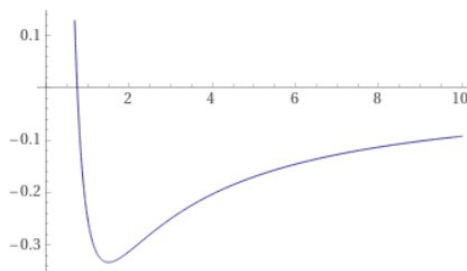
nazywamy **potencjałem efektywnym**. Potencjał efektywny stanowi część energii całkowitej, a dokładniej jest to wartość potencjału  $V(r)$  powiększona o składnik "kątowy" energii kinetycznej, tj. o wyrażenie  $\frac{ml^2}{2r^2}$ . Uzasadnimy to, korzystając ponownie z (2.13):

$$\begin{aligned} \text{const} = E &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{ml^2}{2r^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_e(r). \end{aligned}$$

Widzimy faktycznie, że wielkość  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_e(r)$  jest zachowana w naszej jednowymiarowej analizie i jest równa energii całkowitej wyjściowego (trójwymiarowego) układu!. W szczególności umożliwia to jakościową jednowymiarową analizę odległości ciała od centrum układu poprzez analizę wykresu efektywnego potencjału.

Zauważmy od razu, że jeśli prędkość ciała w polu centralnym jest skierowana ku centrum układu, wtedy  $l = 0$  oraz potencjał efektywny jest równy potencjałowi wyjściowemu - prędkość kąтова ruchu jest stale równa zero i cały ruch odbywa się po linii prostej.

**Potencjał efektywny typu grawitacyjnego.** Załóżmy teraz, że mamy potencjał typu grawitacyjnego, tzn.  $V(r) = -\frac{K}{r}$ . Zakładamy, że prędkość kąтова w ruchu nie jest zero, co oznacza  $l \neq 0$ . Dla małych wartości  $r$  wyrażenie  $\frac{ml^2}{2r^2}$  będzie dominować nad wartością potencjału  $V(r)$  i w efekcie potencjał efektywny  $V_e$  wygląda następująco:



Wartość wyrażenia  $\frac{ml^2}{2r^2}$  jest nazywana barierą odśrodkową (nie jestem pewien tego tłumaczenia, z ang. *centrifugal barrier* lub *angular momentum barrier*) - jak widać na wykresie potencjału efektywnego, żadne ciało (o niezerowej prędkości kątovej) nie może się zanadto zbliżyć do centrum.

Analizując powyższy wykres, dostajemy następujące przypadki zachowania ciała w polu grawitacyjnym.

- (1) Jeśli wartość energii całkowitej jest równa widocznemu na wykresie minimum globalnemu, przyjmowanemu dla wartości  $r_\star = \frac{ml^2}{K}$  wtedy wartość promienia  $r = r_\star$  jest stała. Prędkość kąтова jest niezerowa (jak założyliśmy), zatem - zatem mamy ruch po orbicie kołowej wokół centrum układu. Wartość energii całkowitej w tym przypadku wynosi

$E_{\min} = -\frac{K^2}{2ml^2}$ . Ponieważ  $\dot{\theta} = \frac{l}{r_*^2}$ , wartość prędkości kątowej w ruchu po okręgu otrzymamy łatwo w zależności od promienia  $r_*$ :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{K}{mr_*^3}.$$

- (2) Jeśli energia jest większa od minimalnej, ale wciąż ujemna - widzimy, że promień zmienia się w sposób cykliczny (jak się dowiemy, ruch odbywa się po elipsie.)
- (3) A co gdy energia jest dodatnia? Po osiągnięciu minimalnej odległości od centrum, przelatujące ciało oddali się, by już nigdy nie powrócić. Jak się okaże, torem ruchu będzie hiperbola. Jeśli energia jest zerowa, zachowanie będzie dokładnie takie samo (potencjał efektywny dąży do zera ze wzrostem odległości  $r$ , nigdy nie osiągając zera), ale torem ruchu będzie parabola.

Zauważmy, że orbity kołowe dla potencjału  $V(r) = -\frac{K}{r}$  mają stabilny charakter - małe wytrącenie z położenia stabilnego (ruch po okręgu) sprawi, że ciało będzie dalej orbitować wokół centrum (po elipsie.) Podobnie z orbitami elipitycznymi (tutaj trochę ostrożniej trzeba zdefiniować małe wytrącenie z orbity).

**Zadanie 2.** Rozważmy potencjał  $V(r) = -\frac{K}{r^n}$ , gdzie  $k > 0$ . Dla jakich naturalnych  $n \geq 1$  istnieją stabilne kołowe? Sporządź rysunek dla  $n = 3$  i przeanalizuj możliwe zachowanie ciał umieszczonych w takim polu.

**Prędkość ucieczki raz jeszcze.** Zastanówmy się jeszcze raz, jaką prędkość musimy nadać ciału, by uciekło do nieskończoności opuszczając kulistą planetę o masie  $M$  i promieniu  $R$ . Nie zakładamy już, że wektor prędkości jest prostopadły do powierzchni planety. Analiza potencjału efektywnego prowadzi do wniosku, że wystarczy by prędkość radialna  $\dot{r} > 0$  była zawsze dodatnia (dlaczego jest to warunek wystarczający ucieczki - proszę przemyśleć. Pytanie to się trywializuje dopiero gdy uwzględnimy znajomość kształtu orbit, w tej chwili jeszcze nie znamy go). Ale wartość

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + V_e(r) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}})^2 + V(r)$$

jest zachowana, tak więc warunek  $E \geq 0$  gwarantuje, że prędkość radialna  $\dot{r}$  pozostanie zawsze dodatnia, tak samo jak w szczególnym przypadku ucieczki w kierunku radialnym.



**Równanie orbity.** Dotychczas analizowaliśmy, jak zmienia się odległość od centrum  $r$  wraz z czasem. Jeśli chcemy jednak wyznaczyć trajektorię ciała, skutecznym podejściem będzie znalezienie zależności pomiędzy promieniem  $r$  oraz kątem  $\theta$  (pamiętajmy, że pracujemy we współrzędnych

biegunowych, skąd łatwo w dogodnym momencie wrócimy do współrzędnych kartezjańskich). Założymy, że  $r$  jest funkcją kąta  $\theta$ , a zatem

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{l}{r^2}.$$

Jak na razie nie korzystamy z postaci naszego potencjału. Niemniej jednak równanie orbity, w przypadku pola grawitacyjnego, przyjmie dogodną dla nas postać przy następującej zamianie zmiennych:

$$u = \frac{1}{r}.$$

Będziemy na razie szukać funkcji  $u(\theta)$ . Mamy

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{l}{r^2} = -l \frac{du}{d\theta}.$$

Teraz znajdziemy drugą pochodną:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( -l \frac{du}{d\theta} \right) = -l \frac{d^2u}{d^2\theta} \dot{\theta} = -l^2 \frac{d^2u}{d^2\theta} \frac{1}{r^2} = -l^2 \frac{d^2u}{d^2\theta} u^2.$$

Wstawiając powyższe wyrażenie na  $\ddot{r}$  do równania, które już mamy:

$$m\ddot{r} - \frac{ml^2}{r^3} = F(r),$$

gdzie oczywiście  $F(r) = -\frac{dV}{dr}(r)$ , po drobnych przekształceniach rachunkowych, otrzymujemy równanie, którego poszukujemy, tj. równanie funkcji  $u(\theta)$ :

$$(2.16) \quad \frac{d^2u}{d^2\theta} + u = -\frac{1}{ml^2u^2} F\left(\frac{1}{u}\right).$$

Równanie (2.16) jest poprawne bez nakładania restrykcyjnych założeń na kształt potencjału  $V$ . Widzimy jednak, że równanie to zawiera niejednorodność - prawa strona nie jest liniową funkcją  $u$ , co czyni rozwiązywanie bardzo problematycznym. Za chwilę wrócimy do założenia, że potencjał ma charakter grawitacyjny, gdzie mamy  $F\left(\frac{1}{u}\right) = -kmu^2$  - wtedy prawa strona równania się uprości do postaci, którą łatwo rozwiążemy! W tym celu pracowaliśmy z zamianą zmiennych  $u = \frac{1}{r}$ .

**Prawa Keplera.** W przypadku grawitacyjnym  $V(r) = -\frac{km}{r}$ , gdzie  $k = GM$ , równanie poszukiwanej orbity przybiera postać

$$\frac{d^2u}{d^2\theta} + u = \frac{k}{l^2},$$

które potrafimy rozwiązać (w zasadzie jest to równanie oscylatora harmonicznego dla przypadku, gdy jego centrum jest przesunięte z zera do punktu  $\frac{k}{l^2}$ ). Jego rozwiązania mają postać:

$$u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{k}{l^2}.$$

My skorzystamy z innej postaci rozwiązań - można łatwo pokazać (ćwiczenie), że powyższa rodzina krzywych może być zapisana w następujący sposób:

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{l^2}.$$

Tutaj oczywiście wciąż indeksujemy rozwiązania dwoma parametrami, tym razem są to  $A$  oraz  $\theta$ . Niemniej jednak, odpowiednio obracając układ współrzędnych, zmieniamy wartość parametru  $\theta_0$ . Przyjmijmy, że orbita jest najbliżej centrum układu dla kąta  $\theta = 0$  (tj. w punkcie przecinającym oś  $x$ ). Jest to punkt dla którego  $u = \frac{1}{r}$  przyjmuje wartość największą, tj. gdy  $u = A + \frac{k}{l^2}$  co

zachodzi dla  $\theta = \theta_0$ . Zakładamy zatem, obracając wspomniany układ współrzędnych, że  $\theta_0 = 0$ . Nasze równanie orbity zapiszemy, wracając już do zmiennej  $r$ , jako:

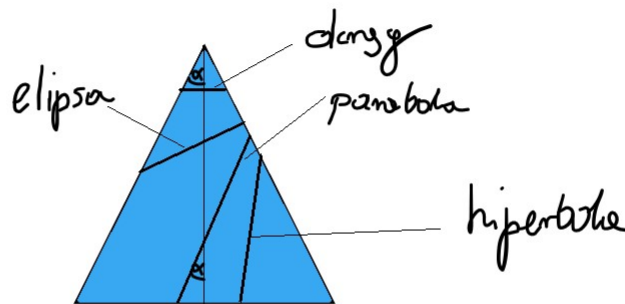
$$(2.17) \quad r = \frac{r_0}{e \cos \theta + 1},$$

gdzie

$$r_0 := \frac{l^2}{k} \text{ oraz } e := \frac{Al^2}{k}.$$

Oczywiście  $r_0$  jest wartością stałą natomiast  $e$  jest teraz parametrem naszego rozwiązania. Wystarczy rozważać wartości  $e$  nieujemne (cosinus z przeciwnym znakiem to jedynie zmiana fazy ruchu, tj. zmiana kąta  $\theta$  o wartość  $\pi$ ) Jego wartość determinuje kształt orbity. Rodzina zadana równaniem (2.17) jest to **rodzina krzywych stożkowych**, tj. krzywych powstałych przez przecięcie powierzchni stożka płaszczyzną. Stała  $e$  jest nazywana **ekscentrycznością** orbity i determinuje jej kształt.

**Wtrącenie. Rodzina krzywych stożkowych** Krzywa stożkowa powstaje przez przecięcie powierzchni bocznej stożka (o nieskończonej wysokości) płaszczyzną. Jesteśmy zawsze w stanie obrócić stożek w taki sposób, by uzyskać uproszczony dwuwymiarowy obraz jak na rysunku poniżej - rodzaj krzywej jaki dostaniemy zależy od kąta, pod jakim płaszczyzna przecina oś stożka. Jak na rysunku, okrąg odpowiada przecięciu osi pod kątem prostym, natomiast parabola (przypadek graniczny pomiędzy elipsą a hiperbolą) powstaje gdy przecinamy stożek płaszczyzną pod kątem takim samym jak kąt pomiędzy osią stożka a tworzącą stożka.



Wracamy do analizy orbit, w zależności od parametru ekscentryczności  $e$ .

**Przypadek  $e < 1$ .** W tym przypadku, promień  $r$  jest ograniczony (ponieważ mianownik wyrażenia (2.17) jest odgraniczony od zera), zatem ciało będzie orbitować wokół centrum po krzywej zamkniętej. Zauważmy od razu, że w przypadku  $e = 0$ , promień jest stały, i mamy ruch po okręgu. Ogólniej, jeśli  $e < 1$ , wracając do współrzędnych kartezjańskich  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , równanie (2.17) można zapisać równaniem elipsy o środku w punkcie  $(x_c, 0)$ :

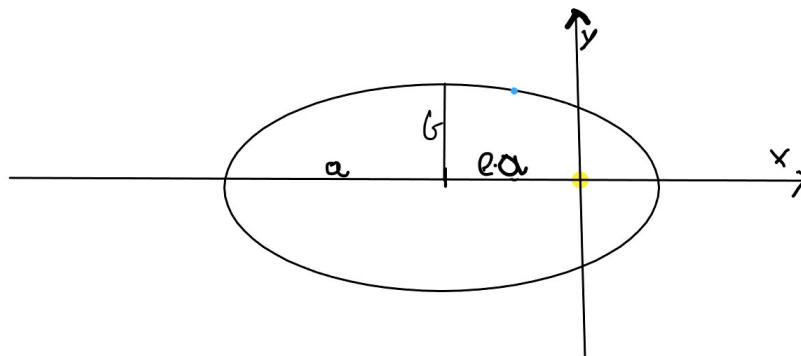
$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie

$$x_c = \frac{-er_0}{1-e^2}; a^2 = \frac{r_0^2}{(1-e^2)^2}; b^2 = \frac{r_0^2}{1-e^2}.$$

Centrum naszego układu (np. masywna gwiazda) znajduje się w "prawym" ognisku tej elipsy, ponieważ tak dobraliśmy współrzędne, naszym centrum jest oczywiście punkt  $(0, 0)$ , a jego odległość od środka elipsy to  $|x_c| = ea$ , w efekcie krążące ciało w momencie osiągnięcia **perycentrum**, tj. punktu największego zbliżenia do centrum, znajduje się w odległości  $a(1-e)$  od centrum układu, gdzie  $a = \frac{l^2}{k(1-e^2)}$ . Jak widać na rysunku poniżej,  $a$  jest półosią wielką elipsy. Widać tutaj również jaką rolę odgrywa współczynnik ekscentryczności  $e$ : im większa jego wartość (tzn. im bliższa jedynki), tym większe odkształcenie elipsy od okręgu (dla  $e = 0$ , środek elipsy pokrywa się z jej ogniskiem (ogniskami).)

Dotychczasowa analiza dowodzi **pierwsze prawo Keplera**, mówiące, że każda planeta Układu Słonecznego porusza się po elipsie, której jednym z ognisk jest Słońce. Kepler sformułował swoje prawa na podstawie pieczołowicie zbieranych obserwacji astronomicznych. Wyprowadzone zostały one kilkadziesiąt lat później przez Newtona na gruncie zasad dynamiki, które sformułował oraz opublikował wraz z prawem powszechnego ciężenia w dziele *Philosophiae naturalis principia mathematica* w 1687 r. Postęp ten odbył się w następstwie rewolucji kopernikańskiej (spektakularny przykład, jak właściwy wybór układu odniesienia ułatwia opis ruchu oraz rozumienie zjawisk. Zauważmy, że gdyby rozpatrywać ruch względem innego ciała niż Słońce, potencjał grawitacyjny Słońca zależałby w takim układzie również od czasu (a nie tylko od położenia) i powyższa analiza byłaby bardzo utrudniona/niemożliwa).



**Układ Słoneczny.** W Układzie Słonecznym, wszystkie planety poza Merkurem mają ekscentryczność poniżej 0,1 i w efekcie ich orbity zbliżone są do kołowych (dla Merkurego  $e$  wynosi ok. 0,2; dla Ziemi to ok. 0,017). Wśród ciał orbitujących wokół Słońca dużą ekscentryczność mają zazwyczaj komety, w tym słynna kometa Halley'a ma w przybliżeniu wartość  $e = 0,97$ . W przypadku Merkurego, planety najbliższej Słońcu, odstępstwa rzeczywistej orbity od tej wynikającej z mechaniki klasycznej są obserwowane już od dawna (i zostały wyjaśnione na gruncie ogólnej teorii względności przez Alberta Einsteina).

**Przypadek graniczny  $e = 1$ .** Tutaj, po powrocie do zmiennych kartezjańskich, otrzymujemy równanie paraboli

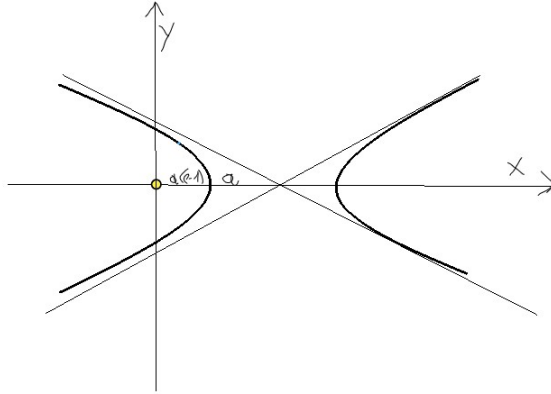
$$y^2 = r_0^2 - 2r_0x.$$

Niewielkie wytrącenie ciała z orbity parabolicznej spowoduje, że zacznie poruszać się on po hiperboli lub zacznie orbitować wokół centrum po elipsie.

**Przypadek  $e > 1$ .** W tym przypadku, ciało przybywa z dużej odległości po hiperboli (graniczny kąt spełnia  $\cos \theta = -\frac{1}{e}$ ) i po osiągnięciu minimalnej odległości od centrum oddala się ( $\cos \theta \rightarrow (-\frac{1}{e})^+$ ), w szczególności wartość granicznego kąta  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Równanie tej hiperboli w zmiennych kartezjańskich :

$$\frac{(x - ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tutaj odległość perycentrum od źródła wynosi  $a(e - 1)$ , jak na rysunku, gdzie  $a = \frac{l^2}{k(e^2 - 1)}$ . Skąd wiemy, że torem ruchu jest lewa gałąź hiperboli, a nie prawa?



**Drugie prawo Keplera.** Planety zakreślają promieniem wodzącym równe pola w równych odstępach czasu.

Pole obszaru zakreślonego pomiędzy kątami  $\theta_0$  oraz  $\theta_1$  wynosi

$$P = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta) d\theta,$$

ale możemy wykorzystać naszą parametryzację  $t \rightarrow \theta(t)$ , dla której wartość  $r^2(t)\dot{\theta}(t) = l$  jest stała. Oczywiście  $r(t) = r(\theta(t))$ , zatem mamy:

$$\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2(\theta) \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} l \cdot (t_2 - t_1).$$

Widzimy, że drugie prawo Keplera wynika z zasady zachowania momentu pędu (zatem będzie prawdziwe również w ogólniejszym przypadku sił centralnych).

**Trzecie prawo Keplera.** Storunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześciąciu pólosi wielkiej jego orbity jest stały dla każdej planety Układu Słonecznego. Używając naszych oznaczeń:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3},$$



gdzie  $T$  to okres obiegu ciała a  $a$  to obliczony wcześniej "promień" elipsy (ten większy, tj. półos wielka elipsy).

Pole elipsy wynosi  $\pi ab$ , natomiast z drugiego prawa Keplera mamy

$$\pi ab = T \frac{l}{2},$$

skąd  $T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{l^2}$ . Teraz wystarczy podstawić wartości  $b^2 = a^2(1-e^2)$  oraz  $l^2 = kr_0 = ka(1-e^2)$ . W efekcie

$$(2.18) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-e^2)}{ka(1-e^2)} = \frac{4\pi^2}{k} a^3.$$

**Energia orbity.** Energię ciała poruszającego się po ustalonej orbicie można wyrazić jako funkcję ekscentryczności tej orbity oraz wartości momentu pędu  $l$ . Przypomnijmy, że mamy energię całkowitą

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{ml^2}{2r^2} - \frac{km}{r}$$

oraz mamy  $r$  jako funkcję  $\theta$  (równanie (2.17)), co można zróżniczkować po zmiennej  $\theta$  oraz wstawić do równania (2.18) by uzyskać (**ćwiczenie**), że energia orbity wynosi:

$$E = \frac{mk^2}{2l^2} (e^2 - 1).$$

Widzimy że zmienna  $\theta$  zniknęła z powyższego równania (dlaczego?) Otrzymany oczywiście wynik zgodny z poprzednimi rozważaniami nad potencjałem efektywnym: wartość  $e < 1$  gwarantuje, że energia jest ujemna, zatem orbita jest krzywą zamkniętą. Wartość  $e \geq 1$  gwarantuje, że energia całkowita jest nieujemna, zatem orbita jest nieograniczona. Warto w tym miejscu przypomnieć, że w przypadku potencjału grawitacyjnego mamy  $k = GM$ , gdzie  $G$  to stała grawitacji a  $M$  to masa generująca pole grawitacyjne.

### 3. UKŁAD CZĄSTEK

Przeniesiemy teraz (łatwo) podstawowe pojęcia, wprowadzone w poprzednim rozdziale, na sytuację, gdy w układzie znajduje się  $N$  cząstek. Jest to sytuacja, na której skupiona jest dynamika w klasycznej, Newtonowskiej wersji. Cząstki mogą ze sobą oddziaływać, zgodnie z III zasadą dynamiki. Oznaczamy:

- $m_i$  - masa  $i$ -tej cząstki,
- $\mathbf{x}_i$  - pozycja  $i$ -tej cząstki,
- $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i$  (pęd)

**II zasada dynamiki Newtona**, dla każdej z cząstek, wygląda oczywiście tak:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i.$$

Siła działająca na cząstkę  $i$ -tą, oznaczona  $\mathbf{F}_i$ , jest wypadkową działających na nią sił- siły zewnętrznej działającej w układzie  $\mathbf{F}^{ext}$  (np. siły grawitacji pochodzącej z centrum układu) oraz sił  $\mathbf{F}_{i,j}$  pochodzących od pozostałych cząstek ( $\mathbf{F}_{i,j}$  to siła działająca na cząstkę  $i$ -tą w wyniku interakcji z cząstką  $j$ -tą). Przy tych oznaczeniach mamy:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}^{ext} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij},$$

a **III zasadę dynamiki Newtona** zapiszemy na razie skrótowo:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}.$$

### 3.1. Pęd. Moment pędu.

**Całkowita masa układu** to naturalnie wielkość

$$M = \sum_i m_i,$$

natomiast **centrum masy** układu to:

$$R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i.$$

**Całkowity pęd** układu  $\mathbf{P}$  wyraża się jako "pęd" centrum masy układu:

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}.$$

Uzyskujemy łatwo, że centrum masy układu porusza się tylko za sprawą sił zewnętrznych:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i (F_i^{ext}) + \sum_{j \neq i} F_{i,j} = \sum_i F_i^{ext} + 0,$$

uzyskując ważną formułę:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i F_i^{ext},$$

która w wielu przypadkach pozwala opisać ruch skomplikowanego układu (obiektu) jako ruch jego środka masy. W szczególności dostaliśmy, że **jeśli na układ nie działają siły, wtedy pęd całkowity jest zachowany**, tj.  $\dot{\mathbf{P}} = 0$ .

A co z momentem pędu? **Całkowity moment pędu** definiujemy naturalnie

$$L = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i,$$

natomiast zewnętrzny całkowity moment siły zdefiniujemy tak:

$$\tau := \sum_i \mathbf{x}_i \times F_i^{ext}$$

Po zróżniczkowaniu

$$\dot{L} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{x}_i \times \left( F_i^{ext} + \sum_{j \neq i} F_{i,j} \right) = \tau + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{x}_i \times F_{i,j}.$$

Zajmijmy się ostatnim członem, który dzięki  $F_{i,j} = -F_{j,i}$ , zapiszemy:

$$(3.1) \quad \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{x}_i \times F_{i,j} = \sum_{i < j} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times F_{i,j}.$$

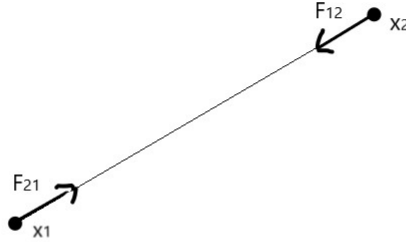
Gdybyśmy wiedzieli, że  $F_{i,j}$  działa w kierunku wyznaczonym przez wektor  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ , jak zachodzi np. w przypadku oddziaływań grawitacyjnych oraz elektrostatycznych, ostatni składnik zniknąłby. Będziemy pracować przy trochę silniejszej wersji **III zasady dynamiki Newtona** niż przytoczona powyżej, mianowicie będziemy zawsze zakładać, że:

$$\text{III.} \quad F_{i,j} = -F_{j,i} \text{ oraz } F_{i,j} \text{ działa w kierunku } \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j.$$

Przy tym założeniu widzimy, że wyrażenie (3.1) znika i w efekcie zmiana całkowitego momentu pędu jest efektem tylko i wyłącznie działania całkowitego zewnętrznego momentu siły:

$$\dot{L} = \tau.$$

Poniżej ilustracja III-ej zasady w bieżącym wydaniu, siły działają w kierunku wektora  $x_2 - x_1$  (tutaj: siły przyciągające):



### 3.2. Energia układu. . Całkowita energia kinetyczna układu to

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i.$$

Każdą pozycję zapiszemy jako  $\mathbf{x}_i = \mathbf{R} + \mathbf{y}_i$  (pozycję względem środka układu). Z definicji  $\mathbf{R}$  dostajemy, że zachodzi  $\sum_i m_i \mathbf{y}_i = 0$ , skąd  $\sum_i m_i \dot{\mathbf{y}}_i = 0$ , a stąd mamy ostatnią z poniższych równości:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{x}}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{y}}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{y}}_i \cdot \dot{\mathbf{y}}_i.$$

Co oznacza powyższa równość? Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej środka masy oraz energii kinetycznej cząstek poruszających się w układzie odniesienia zaczepionym w środku masy.

Pozostaje zdefiniować **całkowitą energię potencjalną**, co robimy oczywiście przy założeniu że wszystkie zewnętrzne i wewnętrzne siły są zachowawcze. W przypadku sił zewnętrznych sprawa jest automatyczna:

$$F_i^{ext} = -\nabla V_i,$$

natomiast w przypadku sił wewnętrznych musimy być trochę bardziej subtelni, jako iż zależą one od pozycji względnej cząstek. Najwygodniej nam założyć, że siły  $F_{i,j}$  oraz  $F_{j,i}$ , powiązane mocną wersją III zasady dynamiki, są postaci

$$F_{i,j}(\mathbf{x}) = -\nabla V_{i,j,\mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) \text{ oraz } F_{j,i}(\mathbf{x}) = -\nabla V_{j,i,\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}),$$

gdzie

$$(3.2) \quad V_{i,j,y}(\mathbf{x}) = V_{i,j}(|\mathbf{x} - y|) \cdot \widehat{\mathbf{x} - y}$$

dla pewnej funkcji  $V_{i,j} = V_{j,i}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , która definiuje pole centralne cząstki  $j$ -tej oddziałujące na cząstkę  $i$ -tą (i vice versa) (w równości (3.2) zmienna  $y$  to bieżące położenie cząstki  $j$ -tej a szeroki daszek to zwykły kierunek wektora jak w przypadku skromnego daszka " $\widehat{\quad}$ ").

**Energię potencjalną** definiujemy teraz jako

$$\sum_i V_i(\mathbf{x}_i) + \sum_{i < j} V_{i,j}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|).$$

**Zachowaną wielkością** jest **energia całkowita** układu:

$$E = T + \sum_i V_i(\mathbf{x}_i) + \sum_{i < j} V_{i,j}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|),$$

gdzie  $T$  to zdefiniowana wcześniej energia kinetyczna.

Przykładowo, energia całkowita układu dwóch cząstek  $\mathbf{x}_1$  i  $\mathbf{x}_2$  wyniesie:

$$E = \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{x}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{x}}_2)^2 + V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_2) + V_{1,2}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|).$$

Jeśli na ten układ nie działają żadne siły zewnętrzne, wtedy energia całkowita wyniesie:

$$(3.3) \quad E = \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{x}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{x}}_2)^2 + V_{1,2}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|).$$

Sprawdźmy na tym prostym notacyjnie przykładzie, że energia całkowita jest faktycznie zachowana, pamiętając, że w polu centralnym  $V := V_{1,2}$  zachodzi wzór  $\nabla V(x) = \frac{dV}{dr} \cdot \hat{x}$ :

$$\begin{aligned} \dot{E} &= m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 + \frac{dV}{dr} \widehat{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \\ &= F_{1,2} \dot{\mathbf{x}}_1 + F_{2,1} \dot{\mathbf{x}}_2 + \frac{dV}{dr} \widehat{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2} (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2) = F_{1,2} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2) + \frac{dV}{dr} \widehat{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2} (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2) = 0. \end{aligned}$$

W przypadku ogólnym rachunek nie różni się koncepcyjnie od powyższego (jedynie notacja jest trochę bardziej żmudna).

**3.3. Problem dwóch ciał. Problem trzech ciał.** . Rozważmy sytuację, gdy mamy dwa oddziałujące na siebie ciała, a na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, jak w przypadku (3.3). W takiej sytuacji środek masy układu  $R$  porusza się ruchem jednostajnym. Przypomnijmy równanie środka masy:

$$MR = m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2.$$

Definiujemy teraz położenie względne cząstek:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2.$$

Gdy już wyznaczymy  $\mathbf{r}$ , wygodnie będzie opisywać ruch względem środka  $R$ , mamy mianowicie, po prostych przekształceniach:

$$\mathbf{x}_1 = R + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 = R - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}$$

Widzimy stąd przy okazji, jaki jest stosunek odległości ciał od środka masy układu:

$$\frac{|x_1 - R|}{|x_2 - R|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Interesuje nas jak zmienia się  $\mathbf{r}$  w czasie, zróżniczkujemy zatem dwukrotnie:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{x}}_1 - \ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{F_{1,2}}{m_1} - \frac{F_{2,1}}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F_{1,2}.$$

Problem dwóch ciał sprowadza się zatem do sytuacji już nam znanej, tzn. do równania ruchu:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \tilde{m} \cdot F_{1,2}(\mathbf{r}), \quad \text{gdzie } \tilde{m} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

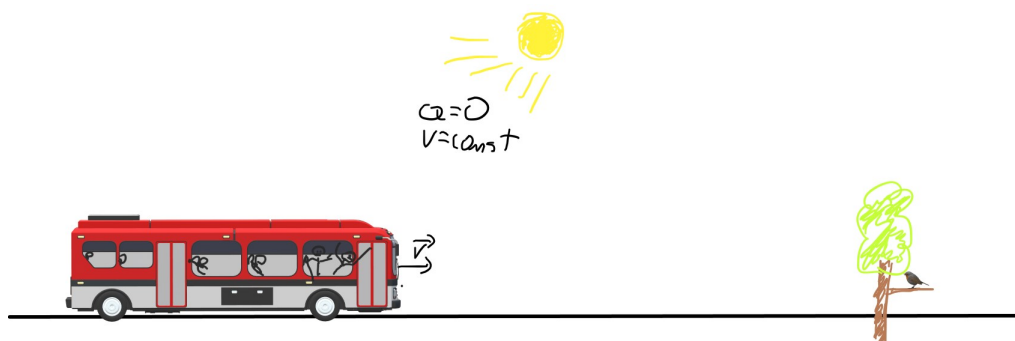
W szczególności, jeśli  $F_{1,2}$  jest siłą centralną (jak założyliśmy w poprzednim podrozdziale o energii całkowitej), możemy stosować znane nam już metody dotyczące sił centralnych. Tak więc problem dwóch ciał sprowadza się do analizy problemu takiego jak w przypadku jednej cząstki o masie  $\tilde{m}$  umieszczonej w polu siłowym  $F_{1,2}$ . W rozwiązaniu wyjściowego problemu obie cząstki mogą np. orbitować wokół środka masy, trzeba być jednak ostrożnym - do ich orbit nie stosują się prawa Keplera. Jeśli jednak jesteśmy blisko przypadku granicznego, tj. takiego, w którym masa jednego z ciał jest zaniedbywalnie mała w porównaniu do masy drugiego ciała, wtedy centrum masy układu jest blisko centrum masy większego ciała i dynamika wygląda bardzo podobnie jak w przypadku mniejszego ciała poruszającego się w centralnym polu grawitacyjnym (którego źródłem jest większe ciało).

A co w sytuacji gdy mamy trzy oddziałujące na siebie ciała? W takim przypadku, w typowej sytuacji dynamika układu jest bardzo skomplikowana. Ogólne rozwiązanie analityczne problemu trzech ciał nie istnieje (rozwiązane są pewne przypadki szczególne).

#### 4. UKŁADY NIEINERCJALNE

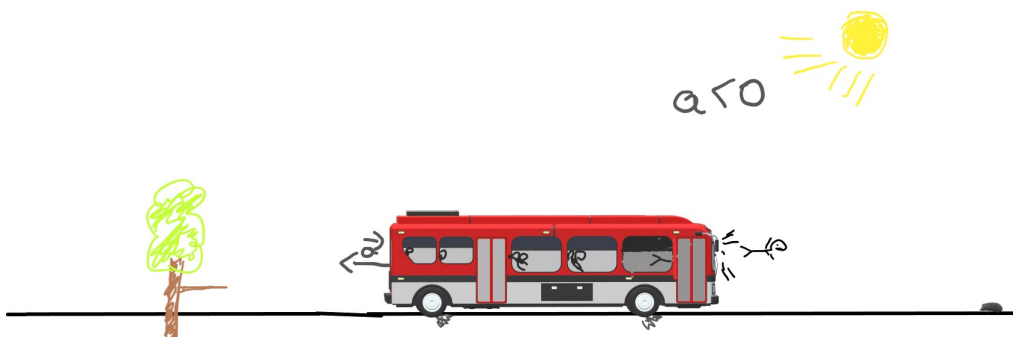
W układach nieinercjalnych zasady dynamiki Newtona nie są spełnione, często wprowadza się **siły pozorne** (nazywane często siłami **bezwładności**) by móc opisać zachowanie ciał w takich układach na gruncie dynamiki Newtonowskiej. Zaczniemy od prostej ilustracji tej sytuacji (zanim przejdziemy do ważnego przypadku układu obracającego się).

**Przykład 1.** Rozważmy przykład jadącego ruchem jednostajnym autobusu, jak na pierwszym rysunku. Pasażerowie i inne obiekty znajdujące się wewnątrz nie odczuwają skutków ruchu autobusu (oczywiście tylko z pewną założoną dokładnością) i w efekcie układ związany z autobusem możemy traktować jako inercjalny (tak samo jak układ związany z jezdnią), w szczególności przemieszczanie się pasażerów (względem autobusu) lub przelot muchy fruwającej w autobusie od siedzenia do siedzenia, odbywa się zgodnie z zasadami dynamiki.



Na rysunku drugim kierowca autobusu zobaczył jeża i gwałtownie zahamował - mamy wektor przyspieszenia skierowany przeciwnie do wektora prędkości autobusu. W układzie odniesienia związanym z drogą (w układzie inercjalnym) widzimy, że przyczyną przyspieszonego (opóźnionego) ruchu autobusu jest tarcie między kołami autobusu a jezdnią, w efekcie czego zawartość autobusu przyspiesza względem autobusu - mucha wpada na siedzenie znajdujące się przed nią,

pasażerowie którzy odpięli pasy lecą do przodu, również pasażerowie przypięci pasami odczuwają skutki przyspieszenia autobusu. Układ odniesienia związany z autobusem nie jest już inercjalny - ruch obiektów wewnątrz można opisywać na gruncie dynamiki Newtonowskiej po wprowadzeniu fikcyjnej siły, tj. siły bezwładności odpowiadającej przyspieszeniu autobusu (ale o przeciwnym zwrocie), którą możemy traktować jako odpowiedzialną za zachowanie obiektów wewnątrz autobusu jeśli chcemy opisywać ich ruch wewnątrz autobusu w układzie tegoż autobusu na gruncie zasad dynamiki.



**4.1. Prędkość kątowna i obroty.** Zajmiemy się teraz opisem ruchu obrotowego, dla ustalenia uwagi będzie to ruch obrotowy względem osi  $z$ . Jest to szczególnie ważne zagadnienie m.in. w zagadnieniach brył sztywnych - w kontekście poprzedniego rozdziału bryłą sztywną możemy nazwać układ cząstek o stałych wzajemnych odległościach. Jak wiemy energia kinetyczna układu cząstek to suma energii kinetycznej postępowego ruchu środka masy układu oraz energii kinetycznej cząstek poruszających się względem środka masy - w przypadku brył sztywnych ten ruch względem środka masy to właśnie obracanie się cząstek względem którejś z osi bryły. Niemniej jednak omijamy (przynajmniej na razie) tematykę brył sztywnych - nie jest naszym celem systematyczny przegląd zagadnień mechaniki (a mamy do dyspozycji tylko 12 spotkań w tym semestrze).

Rozważmy punkt  $\dot{\mathbf{x}}$  obracający się wokół osi  $z$  znajdujący się w odległości  $d$  od tej osi, tzn. mamy punkt

$$\mathbf{x} = (d \cos \theta, d \sin \theta, z), \text{ skąd } \dot{\mathbf{x}} = (-d\dot{\theta} \sin \theta, d\dot{\theta} \cos \theta, 0).$$

Po wprowadzeniu wektora  $\mathbf{w} = \dot{\theta} \hat{z}$ , gdzie  $\hat{z} = \mathbf{e}_3$ , mamy:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{w} \times \mathbf{x}.$$

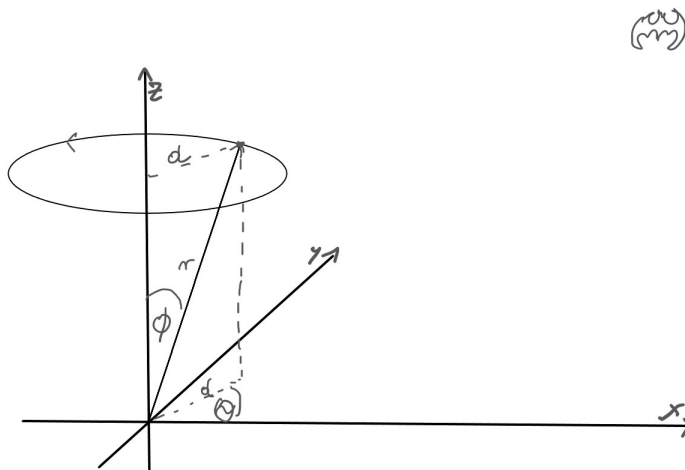
Wektor  $\mathbf{w}$  nazwiemy prędkością kątowną a wartość tej prędkości oznaczamy  $\omega = |\mathbf{w}| = |\dot{\theta}|$ . Mamy w szczególności:

$$v = |\dot{\mathbf{x}}| = d\omega = r \sin \phi \omega,$$

gdzie  $r = |\mathbf{x}|$  oraz  $\phi$  to kąt pomiędzy promieniem wodzącym  $\mathbf{r} = \mathbf{x}$  a wektorem  $\hat{z}$ , tak więc  $d = |\hat{z} \times \mathbf{x}| = r \sin \phi$ . Kinetyczna energia naszej rotującej cząstki to:

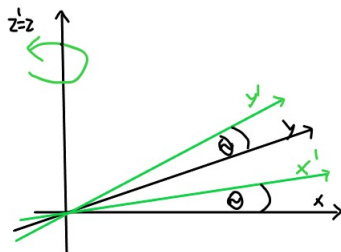
$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{x}})^2 = \frac{1}{2} m (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2} m d^2 \omega^2.$$

Poniżej rysunek przedstawiający omawianą sytuację.



**4.2. Układy obracające się.** Układy takie zajmują szczególną rolę w fizyce chociażby z tego względu, że sami na co dzień znajdujemy się w takim układzie. Łatwo wyliczyć prędkość kątową w ruchu wirowym naszej planety, która jest w przybliżeniu stała i wynosi  $\omega = \frac{2\pi}{24h} \approx 7 \cdot 10^{-5} [s^{-1}]$ . Prędkość kątową  $\omega_{orb}$  ruchu orbitalnego Ziemi dookoła Słońca możemy dostać na przykład z zależności  $\frac{\omega}{\omega_{orb}} = 1rok$ , skąd  $\omega_{orb} \approx 2 \cdot 10^{-7} [s^{-1}]$ .

Założmy, że mamy kartezjański inercjalny układ  $S$  z osiami  $x, y, z$  oraz układ współrzędnych  $S'$  z osiami  $x', y', z'$  powstały przez obrót osi  $x, y$  względem osi  $z$  z tą samą prędkością kątową  $\omega = \dot{\theta}$  natomiast oś  $z' = z$ . Sytuacja jak na rysunku. Dla (niewielkiego) uproszczenia sytuacji zakładamy, że prędkość kątową  $\omega$  jest stała w czasie.



Rozważmy punkt, który jest nieruchomy w układzie  $S'$ . Korzystając z poprzedniego porozdźwięku, możemy łatwo opisać jego ruch w układzie  $S$ : jego prędkość  $\dot{\mathbf{r}}$  spełnia zależność

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}.$$

Podobnie, wektory bazy kanonicznej układu  $S'$ , tj. wektory  $e'_1, e'_2, e'_3$ , odpowiadające osiom  $x', y', z'$ , obracają się zgodnie z równością:

$$\dot{e}'_i = \mathbf{w} \times e'_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rozważmy teraz cząstkę poruszającą się w układzie  $S'$ . Jej pozycję  $\mathbf{r}$  możemy opisać w układzie współrzędnych  $S$ :

$$\mathbf{r} = \sum_i r_i e_i,$$

jak i w układzie współrzędnych  $S'$ :

$$\mathbf{r} = \sum_i r'_i e'_i.$$

W układzie współrzędnych  $S$  łatwo wyrazimy prędkość:

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_i \dot{r}_i e_i,$$

tymczasem w układzie  $S'$  w którym baza  $e'_i$  zależy od czasu, mamy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \sum_i \dot{r}'_i e'_i + \sum_i r'_i \dot{e}'_i = \sum_i \dot{r}'_i e'_i + \sum_i r'_i \mathbf{w} \times e'_i, \\ (4.1) \quad &= \sum_i \dot{r}'_i e'_i + \mathbf{w} \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Narzućmy trochę fizycznej perspektywy na uzyskane równania. W układzie współrzędnych  $S$  prędkość we współrzędnych tego układu:

$$(\dot{\mathbf{r}})_S = \sum_i \dot{r}_i e_i,$$

ale obserwator ruchu związany z układem  $S'$ , który wyraża prędkość we własnej bazie  $e'_i$ , uzyska

$$(\dot{\mathbf{r}})_{S'} = \sum_i \dot{r}'_i e'_i.$$

Dostaliśmy następującą relację w ruchu opisywanym przez tych obserwatorów:

$$\dot{\mathbf{r}}_S = \dot{\mathbf{r}}_{S'} + \mathbf{w} \times \mathbf{r}.$$

Jest to bardzo naturalne: różnica w prędkości obserwowanej przez obu obserwatorów to właśnie prędkość układu  $S'$  względem układu  $S$ . My chcemy jednak uzyskać siły pozorne rządzące układem  $S'$  a w tym celu potrzebujemy wyznaczyć przyśpieszenie względne pomiędzy ruchem cząstki obserwowanej z tych dwóch różnych układów. Różniczkujemy dalej.

Oczywiście w układzie  $S$  mamy

$$\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \ddot{r}_i e_i.$$

Tymczasem w  $S'$  różniczkujemy wyrażenie (4.1), pamiętając że założyliśmy  $\dot{\mathbf{w}} = 0$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i &= \ddot{r}'_i e'_i + \dot{r}'_i \dot{e}'_i + \dot{r}'_i \mathbf{w} \times e'_i + r'_i \mathbf{w} \times \dot{e}'_i = \\ &= \ddot{r}'_i e'_i + 2\dot{r}'_i \mathbf{w} \times e'_i + r'_i \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times e'_i). \end{aligned}$$



Teraz możemy porównać różnice w przyspieszeniu cząstki obserwowanym w układach  $S$  oraz  $S'$ :

$$(\ddot{\mathbf{r}})_S = (\ddot{\mathbf{r}})_{S'} + 2\mathbf{w} \times (\dot{\mathbf{r}})_{S'} + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}).$$

Pamiętając, że układ  $S$  spełnia zasady dynamiki Newtona:  $m(\ddot{\mathbf{r}})_S = F$ , równanie ruchu w układzie  $S'$  przybiera postać:

$$m(\ddot{\mathbf{r}})_{S'} = F - 2m\mathbf{w} \times (\dot{\mathbf{r}})_{S'} - m\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}).$$

Ostatnie dwa składniki występujące w dynamice układu  $S'$  można wyjaśniać wprowadzając siły pozorne: składnik  $\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$  to znana nam już **siła odśrodkowa** natomiast składnik zależny od prędkości cząstki obserwowanej w układzie  $S'$ , czyli  $2m\mathbf{w} \times (\dot{\mathbf{r}})_{S'}$ , to **siła Coriolisa**. Cząstka swobodna w układzie  $S'$  **nie** porusza się ruchem jednostajnym (gdybyśmy nie założyli że prędkość obrotowa  $\omega$  układu  $S'$  jest stała mielibyśmy jeszcze trzeci składnik, siłę Eulera).

**Siła odśrodkowa.** Jeśli ciało obserwowane z układu  $S'$  nie porusza się, tzn. obraca się zgodnie z układem  $S'$ , wtedy działa na nie tylko siła odśrodkowa  $F_{cent}$ . Znajduje się ono w stałej odległości od osi obrotu  $z$ , tę odległość  $d$  można wyrazić np. jako  $d = r \cos \phi$ , gdzie  $\phi$  to kąt pomiędzy promieniem wodzącym  $r$  a płaszczyzną  $x, y$ . Wartość tej siły to znana nam już wielkość:

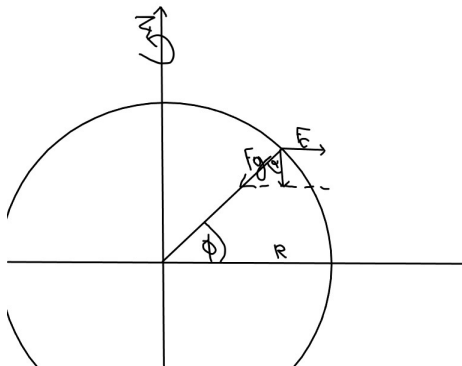
$$|F_{cent}| = m\omega^2 d = m \frac{v^2}{d},$$

gdzie  $v$  to prędkość ciała w układzie  $S$  - czyli prędkość w ruchu obrotowym o prędkości kątowej  $\omega$  i odległości  $d$  od osi  $z$ . Widzimy też ze wzoru  $F_{cent} = m\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$  że jest ona prostopadła do prędkości  $v = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$  oraz do wektora  $\mathbf{w}$ , czyli do osi  $z$ . Siła odśrodkowa nie występuje na biegunach  $\phi = + - \frac{\pi}{2}$ . Największa wartość występuje na równiku  $\phi = 0$ . Tzw. efektywne przyspieszenie grawitacyjne na kulistej planecie

$$\vec{g}_e = \vec{g} - \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$$

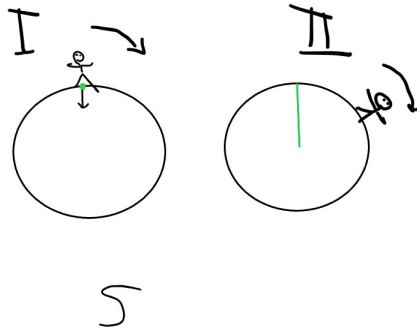
nie jest skierowane dokładnie w kierunku środka masy ze względu na efekty związane z siłą odśrodkową (za wyjątkiem równika - na szerokości geograficznej  $\phi = 0$  siła odśrodkowa jest skierowana dokładnie w przeciwnym kierunku do siły grawitacji - oraz za wyjątkiem biegunów, gdzie przyspieszenie odśrodkowe nie występuje). Tak więc swobodnie zwisający z sufitu żyrandol nie jest skierowany dokładnie w kierunku środka masy Ziemi a (bardzo mały) kąt odchylenia zależy od szerokości geograficznej  $\phi$ .

**Zadanie o efektywnej grawitacji.** Wyznacz kąt  $\alpha$  pomiędzy wektorem przyspieszenia grawitacyjnego (przyjąć jego wartość  $g$ ) a wektorem przyspieszenia grawitacyjnego efektywnego jako funkcję kąta  $\phi$ , sytuacja jak na rysunku.

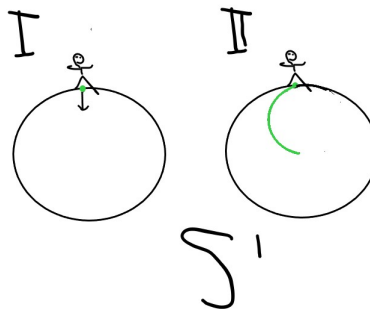


**Siła Coriolisa.**

Składnik  $F_{Cor} = -2m\mathbf{w} \times (\mathbf{v})_{S'}$  jest bardziej subtelny - zależy od prędkości cząstki obserwowanej z układu  $S'$ . Siła ta jest prostopadła do obserwowanej prędkości i ma postać analogiczną do siły działającej na cząstkę w stałym polu magnetycznym, którą zajmowaliśmy się na ostatnich zajęciach - powoduje ruch po okręgu. Cząstka swobodna (czyli nie działają na nią żadne siły), nie będzie poruszać się po liniach prostych w układzie  $S'$ , a jej odchylenie od prostej można wytłumaczyć wprowadzając siłę Coriolisa. Poniżej, dla uproszczenia, rysunek dwuwymiarowy - obracający się dysk i lecącą swobodnie cząstkę w kierunku pionowym w dół. Na pierwszych rysunku mamy widok z układu inercyjnego - dysk się obraca a tor ruchu cząstki jest linia prosta.



Na drugim rysunku mamy obraz ruchu cząstki postrzegany przez obserwatora znajdującego się w układzie obracającym się  $S'$  - tor ruchu cząstki z jego perspektywy jest łukiem okręgu (na poniższym dwuwymiarowym rysunku jest to w zasadzie rzut łuku okręgu).



W przypadku Ziemi siła Coriolisa ma istotny wpływ np. na ruchy mas powietrza oraz prądów morskich, w szczególności jest ona przyczyną tego, że na półkuli północnej huragany poruszają się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, na półkuli południowej zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

## 5. ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA. LAGRANŻJAN.

"Koniecznym jest, by największy z geometrów żył u boku największego z królów" - takimi słowami Lagrange był zapraszany przez króla Prus do objęcia (po Eulerze) katedry matematyki na Akademii w Berlinie. Co takiego zrobił dla matematyki i nauki ten genialny matematyk? W bieżącym rozdziale zapoznamy się pokrótce z jego rewolucyjnym podejściem do wielu zagadnień fizyki i mechaniki klasycznej - podejściem poprzez rachunek wariacyjny.

### 5.1. Rachunek wariacyjny. Równania Lagrange'a- Eulera.

Zakładamy, że mamy funkcję gładką  $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , którą będziemy nazywać lagranżjanem. Będziemy pisać

$$L(x, q) = L(x_1, \dots, x_n, q_1, \dots, q_n), \quad x, q \in \mathbb{R}^n.$$

Poniżej przedstawiam zwięźle różne konwencje związane z notacją różniczkową:

$$D_x L = \nabla_x L = \left( \frac{dL}{dx_1}, \dots, \frac{dL}{dx_n} \right) = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n}).$$

$$D_q L = \nabla_q L = \left( \frac{dL}{dq_1}, \dots, \frac{dL}{dq_n} \right) = (L_{q_1}, \dots, L_{q_n}).$$

Ustalmy teraz dwa punkty  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$  oraz ustalmy wartość zmiennej czasowej  $t_k > 0$ . Wprowadzimy teraz **funkcjonał działania**  $S$ , określony dla dowolnej krzywej gładkiej  $\gamma: [0, t_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  spełniającej  $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$  oraz  $\gamma(t_k) = \mathbf{x}_1$ , następującym wzorem:

$$S(\gamma) = \int_0^{t_k} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Zbiór krzywych gładkich będących dziedziną powyższego funkcjonału (tzn. takich jak  $\gamma$  powyżej) oznaczymy przez  $A$ . Podstawowym zagadnieniem rachunku wariacyjnego jest znalezienie krzywej gładkiej  $\mathbf{x} \in A$  minimalizującej wartość funkcjonału działania  $S$ , tzn. spełniającej:

$$S(\mathbf{x}(\cdot)) = \min_{\gamma \in A} S(\gamma).$$

Poniżej ważne twierdzenie. Zwróćmy uwagę, że równanie wektorowe (5.1) to w rzeczywistości  $n$  równań skalarnych.

**Twierdzenie 2.** *Jeśli krzywa  $\mathbf{x} \in A$  jest rozwiązaniem powyższego zagadnienia wariacyjnego, spełnia ona równania Lagrange'a-Eulera:*

$$(5.1) \quad -\frac{d}{ds} \left( D_q L(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) \right) + D_x L(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) = 0, \quad (s \in [0, t_k]).$$

*Proof.* Wyprowadzenie równań Eulera-Lagrange'a (równań E-L) zrobimy w dwóch etapach.

1. Niech  $\gamma: [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie gładką krzywą zamkniętą spełniającą

$$(5.2) \quad \gamma(0) = \gamma(t_1) = 0$$

Dla  $h \in \mathbb{R}$  zdefiniujmy

$$\gamma_h(t) = \mathbf{x}(t) + h \cdot \gamma(t).$$

Łatwo zauważyć, że  $\gamma_h \in A$ , zatem mamy:

$$S(\mathbf{x}) \leq S(\gamma_h).$$

Stąd funkcja zmiennej rzeczywistej  $h$

$$s(h) = S(\gamma_h)$$

ma minimum w punkcie  $h = 0$ , a zatem, jeśli tylko  $s$  jest różniczkowalna w zerze, mamy  $h'(0) = 0$ . Pokażemy różniczkowalność, obliczając tą (tę?) pochodną w sposób jawny, uzyskując równocześnie tezę twierdzenia.

2. Mamy

$$s(h) = \int_0^{t_1} L(\mathbf{x}(s) + h\gamma(s), \dot{\mathbf{x}}(s) + h\dot{\gamma}(s)) ds,$$

skąd wyliczamy pochodną przy notacji  $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ :

$$s'(h) = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^n L_{x_i}(\mathbf{x} + h\gamma, \dot{\mathbf{x}} + h\dot{\gamma}) \gamma^i + L_{q_i}(\mathbf{x} + h\gamma, \dot{\mathbf{x}} + h\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^i ds.$$

Wstawiając  $h = 0$ , pamiętając, że  $s'(0) = 0$ ,

$$0 = s'(0) = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^n L_{x_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \gamma^i + L_{q_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\gamma}^i ds.$$

Całkując drugi składnik przez części i pamiętając o warunku (5.2), dostajemy:

$$0 = s'(0) = \sum_{i=1}^n \int_0^{t_1} [L_{x_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \frac{d}{ds} L_{q_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})] \gamma^i ds.$$

Powyzsza równość zachodzi dla wszystkich funkcji gładkich  $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$  spełniających (5.2), stąd już mamy że dla wszystkich  $i = 1, \dots, n$

$$-\frac{d}{ds} (L_{q_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) + L_{x_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0,$$

co kończy dowód. □

Zgodnie z konwencjami pochodzącymi z fizyki krzywe  $\mathbf{x}$  spełniające równania Lagrange'a-Eulera (5.1) będziemy nazywać **ekstremalami** funkcjonału  $S$  (pamiętając jednak, że trafniej można by je nazywać punktami krytycznymi, jako iż spełniają jedynie warunki konieczne problemu minimalizacji/maksymalizacji). W wielu różnych sytuacjach kontekst fizyczny wymusza istnienie dokładnie jednego minimum globalnego.

**5.2. Równania Hamiltona.** Równania Lagrange'a-Eulera ( $n$  równań zwyczajnych drugiego rzędu) można przekształcić w równania Hamiltona ( $2n$  równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu). Jest to uogólnienie podejścia, które przedstawiłem na drugim wykładzie, pokazując jak równanie różniczkowe stopnia 2 na  $\mathbb{R}^n$  sprowadza się do równania różniczkowego stopnia 1 na  $\mathbb{R}^{2n}$ . W niniejszym podrozdziale zakładamy, że mamy funkcję gładką  $\mathbf{x}: [0, t_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  spełniającą równania Lagrange'a Eulera jak w poprzednim rozdziale.

Wielkość

$$\mathbf{p}(s) := D_q L(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))$$

nazwiemy uogólnionym momentem pędu, odpowiadającym położeniu  $\mathbf{x}$  i prędkości  $\dot{\mathbf{x}}$ .

Będziemy zakładać, że z równania  $p = D_q L(x, q)$  można jednostajnie rozkwikłać  $q$  jako funkcję gładką zmiennych  $x$  oraz  $p$ , tzn. będziemy mogli pisać

$$q = \mathbf{q}(p, x).$$

**Hamiltonianem**  $H$  stowarzyszonym z lagranżjanem  $L$  nazywamy funkcję

$$H(p, x) = p \cdot \mathbf{q}(p, x) - L(x, \mathbf{q}(p, x)).$$

Bez dowodu podamy teraz twierdzenie przedstawiające równania Hamiltona, tzn. równania stopnia 1, które są spełnione przez położenie  $\mathbf{x}$  oraz uogólniony pęd  $\mathbf{p}$ :

**Twierdzenie 3.** *Funkcje  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{p}$  spełniają równania Hamiltona:*

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = D_p H(\mathbf{p}, \mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{p}}(s) = -D_x H(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

*Dodatkowo, odwzorowanie*

$$[0, t_k] \ni s \rightarrow H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \in \mathbb{R}$$

*jest stałe w czasie.*

Podejście Lagrange'a i Hamiltona to nowoczesne podejście to bardzo wielu zagadnień fizycznych. A jak się mają do mechaniki Newtonowskiej, którą zajmowaliśmy się dotychczas? Przekonamy się w kolejnej sekcji.

**5.3. Zasada najmniejszego działania.** Załóżmy, że mamy  $N$  cząstek, których wspólne położenie będziemy wyrażać we współrzędnych kartezjańskich wektorem  $x = (x^1, \dots, x^{3N}) \in \mathbb{R}^{3N}$ , poruszających się w polu o energii potencjalnej  $V$ . Drugą zasadę dynamiki zapiszemy jako

$$\dot{p}_i = -\frac{dV}{dx^i}, i = 1, \dots, 3N,$$

$p_i = m_i \dot{x}^i$  to  $i$ -ta składowa pędu w naszym układzie ( $m_i$  to masy cząstek wpisane w wektor w sposób odpowiadający współrzędnym cząstek). W niniejszym kontekście przestrzeń  $\mathbb{R}^{3N}$  nazwiemy **przestrzenią konfiguracyjną** - opisuje ona wszystkie możliwe położenia naszego układu, a jej **liczba stopni swobody** to  $3N$ . Nie zawiera ona informacji o pędach w układzie - dołożenie tej informacji dałoby nam **przestrzeń fazową**, która ma  $6N$  stopni swobody.

W bieżącej sekcji **Lagranżjanem** będziemy nazywać funkcję

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x),$$

gdzie  $V$  to wspomniana energia potencjalna układu a

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i)^2$$

to energia kinetyczna naszego układu. Znak "-" w definicji Lagranżjanu nie jest pomyłką (pamiętamy, że suma dwóch jego składników byłaby stała). Podobnie jak w poprzednim rozdziale, ustalamy dwa punkty  $a$  i  $b$  z przestrzeni konfiguracyjnej oraz rozważamy warunki początkowe  $x(0) = a$ ,  $x(t_k) = b$ .

**Twierdzenie 4** (Zasada najmniejszego działania). *Krzywa  $x$  po której porusza się układ cząstek  $x$  od punktu  $a$  do punktu  $b$  jest ekstremalą funkcjonatu działania  $S(x) = \int_0^{t_k} L(x(s), \dot{x}(s)) ds$ .*

*Proof.* Należy pokazać, że spełnione są równania Lagrange'a, tzn. mamy sprawdzić, czy:

$$\frac{dL}{dx^i} - \frac{d}{ds} \frac{dL}{d\dot{x}^i} = 0, i = 1, \dots, 3N.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx^i} &= -\frac{dV}{dx^i}, \\ \frac{d}{ds} \frac{dL}{d\dot{x}^i} &= \frac{d}{ds} m_i \dot{x}^i = \dot{p}_i, \end{aligned}$$

a zatem równania (E-L) są równoważne drugiej zasadzie dynamiki, co kończy dowód.  $\square$

Dyskusja, interpretacja, przykłady - na kolejnym wykładzie, tj. na wykładzie 16 grudnia. Ale czy to będzie na pewno następny wykład?

## 6. SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI.

Zajmiemy się teraz teorią opublikowaną w 1905 roku (lub może poprawniej - zapoczątkowaną w tym roku - chociaż to również jest uproszczenie) przez pracownika szwajcarskiego urzędu patentowego, Alberta Einsteina, w słynnym artykule "O elektrodynamice ciał w ruchu". Jest to jedna z czterech jego słynnych prac opublikowanych w 1905 roku, tzw. cudownym roku Einsteina. We wspomnianym artykule Albert Einstein przedstawia transformacje czasu i przestrzeni pozwalające objąć poprawnie - zgodnie z zasadą względności - równania elektromagnetyzmu Maxwella. Prawa rządzące elektromagnetyzmem, w oparciu o mechanikę Newtonowską, łamały wspomnianą

zasadę względności (mówiącą że prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia jako iż żaden z tych układów nie jest wyróżniony.) Teoria Einsteina, nazwana później Szczególną Teorią Względności (nazwa nie pochodzi od Einsteina), oparta jest na postulatach innych niż newtonowskie co łatwo prowadzi do bardzo kontrowersyjnych konsekwencji. Jednakże przewidywania szczególnej (jak i ogólnej) teorii Einsteina były potwierdzane eksperymentalnie setki tysięcy razy w ciągu ostatniego stulecia dowodząc, że jedno z najważniejszych dzieł w historii ludzkości - monumentalne dzieło Newtona "Matematyczne zasady filozofii naturalnej", jest fundamentalnie błędne, tj. oparte na nieprawidłowych założeniach. Różnice w przewidywaniach tych dwóch teorii ujawniają się wyraźnie dopiero, gdy względne prędkości opisywanych obiektów zbliżają się do prędkości światła w próżni. Prędkości światła względem czego? - chciałoby się zapytać po lekturze poprzednich wykładów, ale o tym dopiero za chwilę - mowa tutaj o stałej  $c$  wynoszącej **dokładnie**  $c = 299792458m/s$ . Kolejne nasuwające się pytanie - dlaczego wartość stałej  $c$  jest liczbą wymierną? Zapoznamy się teraz z prostymi matematycznie koncepcjami według których chyba wszystkie starania wcześniejszych myślicieli, którzy odważyli się przed Einsteinem podjąć temat czasu i przestrzeni, stały się warte niewiele więcej niż zapisany nimi papier. Oryginalne koncepcje nowej teorii, sprzeczne z klasyczną intuicją, dowodzą, że droga do poznania rzeczywistości fizycznej nie ma charakteru a priori. Rewolucja prowadząca od fizyki newtonowskiej do fizyki relatywistycznej była gwałtem szczególnej natury, zmieniając paradygmat fizyki na poziomie pojęć tak fundamentalnych jak czas i przestrzeń.

**6.1. Postulaty szczególnej teorii względności. Transformacja Lorentza.** Czternastego września 2015 roku miało miejsce jedno z kilku spektakularnych odkryć fizyki eksperymentalnej, o jakich mieliśmy okazję usłyszeć w ostatnich latach - dwa gigantyczne interferometry umieszczone w różnych laboratoriach na terenie Stanach Zjednoczonych - jedno w Hanford (Waszyngton), drugie w Livingston (Luizjana), w odstępie kilku milisekund zarejestrowały falę grawitacyjną, która dała nam o sobie znać po przebyciu ok. 1,3 mld lat świetlnych w następstwie połączenia się dwóch gwiazd. Skąd ten milisekundowy odstęp w rejestracji tego sygnału? Wpominana już we wstępie wielkość

$$c = 299792458m/s$$

jest **stałą fizyczną** oznaczającą prędkość rozchodzenia się fundamentalnych oddziaływań fizycznych w próżni, a zatem nie tylko światło (fala elektromagnetyczna), ale również grawitacja (fale grawitacyjne - ogólna teoria względności) mają tempo propagacji ograniczone stałą  $c$ . Eksperymenty prowadzone na przełomie *XIX* i *XX* wieku sugerowały, że wynik pomiaru prędkości światła nie zależy od układu odniesienia. Stała  $c$  występuje również w równaniach Maxwella, która w zasadzie jest teorią relatywistyczną (pochodzącą z drugiej połowy *XIX* wieku!). Wartość tej stałej w *XX* wieku była już mierzona z taką dokładnością, że posłużyła ona do zdefiniowania podstawowej jednostki długości w układzie SI - jednego **metra** jako odległości przebytej przez światło w próżni w czasie  $1/299792458$  sekundy. Zauważmy, że definiując metr definiujemy również wartość prędkości światła (mierzoną w metrach na sekundę). Naturalnie nie ma jednak wątpliwości że to stała  $c$  jest stałą fizyczną, wyznaczająca relacje między czasem a przestrzenią, metr natomiast jest jedynie wygodną jednostką długości (wygodną dla użytkowników świata codziennego, niewygodną dla rozważań fizyki teoretycznej). Widzimy przy okazji, dlaczego wartość stałej  $c$  jest liczbą wymierną.

W duchu wspomnianej publikacji Einsteina z 1905 roku, przywołamy teraz dwa postulaty, od których rozpoczął on swój wywód (zaraz po wstępie i zdefiniowaniu synchronizacji zegarów na początku artykułu).

**P1** Prawa fizyki w każdym inercjalnym układzie są takie same (zasada względności).

**P2** Prędkość światła jest taka sama w każdym (inercjalnym) układzie odniesienia.

Podczas gdy postulat pierwszy (sformułowany nieprecyzyjnym językiem) jest naturalny i doskonale nam już znany, postulat drugi brzmi bardzo kontrowersyjnie. Jeśli szybko jadący kierowca samochodu marki BMW poruszający się po jezdni z prędkością  $v$  włączy światła to promienie światła z jego reflektorów będą oddalać się od niego z prędkością  $c$  (dla uproszczenia usuwamy tymczasowo atmosferę z naszej planety która spowolni rozchodzenie się światła). Wydawać by się mogło, że stojący dalej przy drodze piesi (nieruchomi - przerażeni prędkością kierowcy  $v$  - to może być nawet ponad 200 km/h) "zaobserwują" promień światła przemieszczający się z prędkością  $c + v$ . Tymczasem tak nie jest! - względem nich prędkość światła wyemitowanego przez kierowcę również wynosi  $c$ . A co jeśli kierowca wyciągnie pistolet na plastikowe kulki i odda przez okno strzał w kierunku ruchu z prędkością 70 kilometrów na godzinę względem pojazdu (przypominam o braku oporów ruchu) - czy w takiej sytuacji zaobserwujemy plastikową kulkę lecącą z prędkością 270 km/h względem drogi? Też nie. Będzie to konsekwencja postulatu drugiego, co łatwiej zauważyć na bardziej jaskrawym przykładzie: jeśli rakieta oddala się od naszej planety z prędkością  $0,8c$  a załoga rakiety strzela w kierunku ruchu pociskiem z prędkością  $0,8c$  (względem rakiety), czy wtedy stwierdzimy że wystrzelony pocisk oddala się od Ziemi z prędkością  $1,6c$ ? Również nie - w tym drugim przypadku różnica prędkości między tą zmierzoną przez nas a prędkością wynikającą z transformacji Galileusza

$$x' = x - vt, \quad t' = t,$$

tj. prędkością będącą sumą prędkości, jest już bardzo duża. W przykładzie z kierowcą, gdzie mieliśmy do czynienia z prędkościami nierelatywistycznymi ( $v \ll c$ ), różnica między rzeczywistą prędkością pocisku a prędkością Galileuszową jest bardzo znikoma (i oczywiście poza możliwościami pomiarowymi odpowiadającymi czasom fizyki klasycznej; spektakularny sukces teorii relatywistycznej nie umniejsza spektakularnego sukcesu fizyki newtonowskiej).

Po powyższym komplemencie złożonym fizyce newtonowskiej, pogrzebimy teraz niektóre jej koncepcje - skoro galileuszowa zmiana układu współrzędnych pomiędzy dwoma układami odniesienia oddalającymi się jest nieprawidłowa, jako sprzeczna z empirycznie potwierdzonym postulatem **P2**, wyprowadzimy teraz z tego postulatu wzory na transformacje współrzędnych pomiędzy dwoma kartezjańskimi układami odniesienia  $S$  i  $S'$ , gdzie układ  $S'$  oddala się od układu  $S$  ze stałą prędkością  $v$  w kierunku osi  $x$ . Na starcie zignorujemy zmienne  $y$  oraz  $z$ , ograniczając się do opisu ruchu jednowymiarowego. Dla prostoty zakładamy również, że w chwili  $t = 0 = t'$  osie obu układów pokrywają się. Rezygnujemy w tym miejscu z Newtonowskiej koncepcji absolutnego czasu, a zatem zaczynamy od bardzo ogólnej postaci zamiany współrzędnych:

$$x' = f(x, t), \quad t' = g(x, t),$$

gdzie  $(x', t')$  to współrzędne układu  $S'$ . Jak teraz zawęzić postać mapy  $(f, g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  do klasy, na której będziemy mogli efektywnie pracować? Zauważmy, że zgodnie z Iszą zasadą dynamiki Newtona (która pozostała niezmienniona) cząstka swobodna porusza się po liniach prostych (w każdym inercjalnym układzie odniesienia), a zatem szukana transformacja musi przeprowadzać linie proste w linie proste. Naturalnym kandydatem są zatem odwzorowania liniowe:

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 t, \quad t' = \alpha_3 x + \alpha_4 t.$$

Einstein w swojej publikacji przywołuje inny argument przemawiający za liniowością poszukiwanej transformacji: jest nim jednorodność czasu i przestrzeni (a odwzorowania liniowe żadnych punktów w przestrzeni nie wyróżniają).

Zgodnie z naszymi założeniami, zawodnik znajdujący się w centrum układu współrzędnych  $S'$ , tj. w punkcie  $x' = 0$ , w układzie  $S$  porusza się zgodnie z równością:  $x = vt$ . W efekcie nasze transformacje muszą przeprowadzić prostą  $x = vt$  w prostą  $x' = 0$  skąd już dostajemy postać transformacji dla współrzędnej przestrzennej:

$$(6.1) \quad x' = \gamma_v \cdot (x - vt).$$

Poszukujemy teraz stałej  $\gamma_v$ . Na początek zauważmy, że  $\gamma_v = \gamma_{-v}$  - wynika to m.in. z faktu, że stała  $\gamma_v$  nie powinna zależeć od kierunku wektora prędkości (żadne kierunki w przestrzeni nie są wyróżnione) a jedynie od jego wartości  $\|v\|$ . Zauważmy od razu, że względem układu  $S'$  układ  $S$  przesuwa się z prędkością  $-v$ , skąd powtarzając poprzednie rozumowanie uzyskujemy transformację odwrotną, tzn. przechodzącą z układu  $S'$  do układu  $S$ :

$$(6.2) \quad x = \gamma_{-v} \cdot (x' + vt') = \gamma_v \cdot (x' + vt').$$

Zauważmy, że wciąż nie skorzystaliśmy z postulatu drugiego: gdybyśmy przyjęli klasycznie  $t' = t$ , uzyskalibyśmy  $\gamma_v = 1$  co w efekcie dałoby transformację Galileusza  $x = x' + vt$ . Nadszedł zatem czas na postulat drugi: rozważmy promień światła wysłany ze środka układu  $S$  (w chwili  $t = 0$ ) w kierunku osi  $x$ , którego równanie ruchu:

$$x = ct.$$

Zgodnie z postulatem  $P2$ , w układzie  $S'$  jego trajektoria również wyraża się równaniem:

$$x' = ct'.$$

Podstawiając powyższe równości do równań (6.1) oraz (6.2) otrzymamy:

$$ct' = \gamma_v(c - v)t \text{ oraz } ct = \gamma_v(c + v)t'.$$

Korzystając z powyższych równości możemy już wyciągnąć poszukiwaną wartość

$$\gamma_v = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}}.$$

Zauważ, że dla prędkości  $v > c$  wartość  $\gamma$  jest urojona i nie ma fizycznego sensu w niniejszych rozważaniach. W duchu teorii względności będziemy w niniejszym wykładzie zawsze zakładać, że układy inercjalne poruszają się względem siebie z prędkością mniejszą niż prędkość światła.

Drugie ważne spostrzeżenie: gdy prędkość  $v$  jest istotnie mniejsza niż prędkość światła (co oznaczamy  $v \ll c$ ) i wartość stałej  $\gamma_v$  wynosi w przybliżeniu 1 co prowadzi do transformacji Galileuszowej. Zachodzi również

$$\lim_{v \rightarrow c} \gamma_v = \infty$$

co ma ważne konsekwencje fizyczne.

Aby wyprowadzić wzór na transformację zmiennej czasowej, wstawiamy wartość zmiennej  $x' = ct'$  do równań (6.1) oraz (6.2), by uzyskać:

$$(6.3) \quad t' = \gamma_v \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

Zauważmy ponownie, że dla małych wartości  $v$ , wartość  $t'$  jest równa w przybliżeniu  $t$ , jak w fizyce Newtonowskiej. A co w przypadku większych wartości  $v$  - dramatyczne konsekwencje wyprowadzonych transformacji omówimy za chwilę, tj. 20 stycznia 2013 roku (podróże w przyszłość są koncepcyjnie bardzo proste, o czym się niedługo przekonamy). Uzyskana zamiana zmiennych to **transformacja Lorentza (pchnięcie Lorentza)**:



$$\begin{aligned}x' &= \gamma \cdot (x - vt) \\t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right),\end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma = \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(będziemy pisać  $\gamma$  w miejsce  $\gamma_v$  zawsze gdy kontekst na to pozwoli).

Jak należy stosować oraz rozumieć transformację Lorentza? - przeanalizujemy za chwilę prosty przykład, który przy okazji zilustruje trzy podstępne konsekwencje uzyskanych transformacji. Na wstępie musimy jednak coś powiedzieć o synchronizacji zegarów. Jak widzieliśmy, zmienna czasowa  $t$  ulega transformacji przy zmianie układu odniesienia, w efekcie zegar umieszczony w pewnym układzie odniesienia odmierza jedynie czas własny (Newtonowska koncepcja czasu absolutnego jest niezgodna z doświadczeniem fizycznym oraz sprzeczna z postulatem  $P2$  teorii relatywistycznej). Zauważmy przy okazji, że dla  $v = 0$  mamy  $x' = x$  oraz  $t' = t$ , ponieważ założyliśmy, że środki dwóch układów współrzędnych pokrywają się. Bez tego założenia można powtórzyć przeprowadzone rozumowanie, a uzyskane transformacje to będą przekształcenia afiniczne (zamiast liniowych) wynikające tylko i wyłącznie ze zmiany zaczepienia osi kartezjańskiego układu współrzędnych. W szczególności, czas płynie w jednakowym tempie w inercjalnych układach odniesienia nie poruszających się względem siebie (co jest tutaj równoważne stwierdzeniu że czas płynie jednolicie w każdym ustalonym inercjalnym układzie odniesienia - jest to manifestacja faktu, że pracujemy przy założeniu jednorodności ( płaskiej) czasoprzestrzeni).

**6.2. Czas i zegary. Synchronizacja zegarów.** Gdy w fizyce Newtonowskiej powiemy o jednakowych zegarach, łatwo się domyślamy, że mamy na myśli zegary odmierzające czas **w takim samym tempie**. W fizyce relatywistycznej, musimy przyjrzeć się sprawie trochę bliżej. **Zegar** jest to pewien układ fizyczny, mający mierzyć upływ czasu. Zegar musi działać w oparciu o istniejące w przyrodzie zjawiska cykliczne (periodyczne), a jego poprawność można sprawdzić tylko i wyłącznie w porównaniu z innymi zjawiskami periodycznymi (np. z innymi zegarami). Przykładowe zjawiska cykliczne i mechanizmy zegarowe: ruch wirowy ziemi, ruch wirowy pulsarów (wysoce zmagnetyzowanych gwiazd neutronowych; na ich podstawie konstruuje się zegary pulsarowe zliczające impulsy radiowe docierające do Ziemi w regularnych odstępach czasu w efekcie ruchu wirowego gwiazdy), oscylacje kryształów kwarcu (zegary kwarcowe), zegary atomowe (oparte na własnościach emisyjnych atomów). Potrzebując roboczej definicji czasu, powiemy tautologicznie, że czas jest wielkością fizyczną mierzoną przez dobry zegar (tj. przez zegar idący w równym tempie, które to wyjaśnienie też nic nie pomaga). Po odejściu od koncepcji czasu absolutnego problem synchronizacji zegarów przestaje być oczywisty. Zegar znajdujący się w punkcie  $A$  (np. na naszym nadgarstku) wskazuje czas  $t$ . Skąd mamy wiedzieć, jaki czas w tej chwili wskazuje zegar znajdujący się w punkcie  $B$ , skoro ta informacja potrzebuje pewnego czasu na dotarcie do nas (nie może do nas dotrzeć szybciej niż światło pochodzące od zegara  $B$ )? Jeśli w punkcie  $A$  mamy dwa identyczne i zsynchronizowane zegary, i jeden z tych zegarów przetransportujemy do punktu  $B$ , nie mamy już pewności, że oba zegary są wciąż zsynchronizowane (jest wręcz przeciwnie, jak się przekonamy).

**Definicja synchronizacji zegarów.** Idąc za definicją Einsteina, powiemy, że zegary  $A$  oraz  $B$  są zsynchronizowane, gdy zachodzi:

Jeśli sygnał świetlny wysłany z punktu  $A$  w chwili gdy zegar  $A$  wskazuje wartość  $t_A$ , dotrze do zegara  $B$  wskazującym w momencie odbioru sygnału czas  $t_B$  a następnie odbije się z powrotem

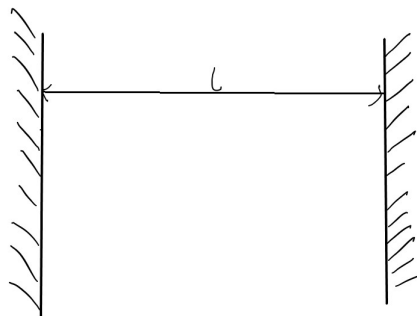
w kierunku zegara  $A$  i dotrze do niego gdy wskazuje on czas  $t'_A$ , wtedy

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Z postulatu  $P2$  wynika, że światło podróżuje ze stałą prędkością zarówno podczas podróży z  $A$  do  $B$  jak i podczas podróży powrotnej, w efekcie powyższa równość gwarantuje, że zegary  $A$  oraz  $B$  idą równo.

**Ilustracja:** o godzinie 16:00 wysyłam sygnał do koleżanki na Marsie, o godzinie 16:10 dostaję sygnał powrotny z informacją że ona odebrała sygnał o 16:05- na podstawie tego wnioskuje, że nasze zegary są zsynchronizowane (w rzeczywistości Mars i Ziemia są w ruchu względem siebie a czasoprzestrzeń w której się znajdują nie jest płaska jak w przypadku szczególnej teorii którą się zajmujemy, niemniej jednak relatywistyczne poprawki są na tyle niewielkie że po niniejszej procedurze synchronizacji zegarów mogę z taką koleżanką umówić się np. na wymianę sms-ów o godzinie 17:00 (przeprowadzenie rozmowy telefonicznej byłoby zbyt monotonne ze względu na 5-minutową podróż informacji)).

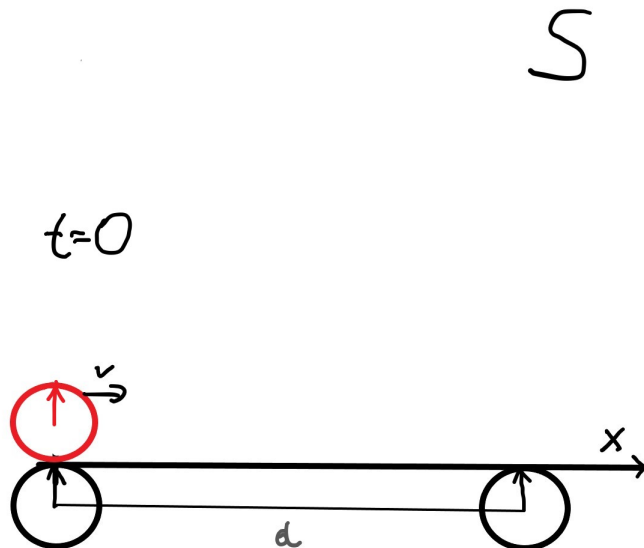
**Zegar fotonowy.** Na zakończenie niniejszego paragrafu warto przytoczyć koncepcję idealnego zegara fotonowego - pomiędzy dwoma równoległymi zwierciadłami porusza się foton (prostopadle do zwierciadeł) odbijając się od nich wielokrotnie i pokonując za każdym razem drogę  $l$  jak na rysunku, zliczane są odbicia fotonu od jednego ze zwierciadeł.



**6.3. Konsekwencje transformacji Lorentza.** Skoro mamy już definicję synchronizacji zegarów, możemy rozpocząć ilustrację transformacji Lorentza  $x' = \gamma \cdot (x - vt)$ ,  $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$  (wciąż zostajemy w przypadku jednowymiarowym, pełna postać równań - w trzech wymiarach przestrzennych, nie jest nam na razie potrzebna i jak się okaże nie spowoduje jakościowego skoku w analizie zjawiska). Zatańczmy zatem w rytm relatywistycznej teorii (a będzie to taniec niezwykle).

Rozważmy trzy **jednakowe** zegary (dla prostoty będziemy mówić o przemieszczających się względem siebie zegarach zamiast o bardziej skomplikowanych obiektach takich jak kierowca BMW lub przelatująca rakietka: przykładem mało dokładnego zegara na pokładzie takiej rakietki może być ilość uderzeń serca u ustalonego członka załogi, może trochę dokładniejszym zegarem

byłby np. przyrost długości paznokcia w jego kciuku, każda dobra rakietka będzie też mieć dobry zegar pokładowy odmierzający czas zgodnie z pewnym ściśle periodycznym zjawiskiem - tempo z jakim będą zachodzić wszystkie wymienione procesy zależy od wyboru obserwatora; w naszym prostym przykładzie będziemy przyglądać się wskazówkom doskonałych zegarów). Rozważamy układ  $S$ , w którym znajdują się dwa nieruchome zsynchronizowane zegary, zegar  $L$  oraz zegar  $P$ , w odległości  $d$  od siebie, jak na rysunku. W układzie znajduje się również trzeci zegar  $C$  (czerwony), taki sam jak zegary  $L$  oraz  $P$ , przemieszczający się z prędkością  $v$  jak na rysunku.



W chwili  $t = 0$  wskazówki sekundowe wszystkich trzech zegarów wskazują czas zerowy (tzn. wskazówka sekundowa jest pionowa) a zegar ruchomy właśnie mija zegar  $L$  (dzięki czemu możemy bezpośrednio porównać wskazania tych zegarów). Po czasie  $t = \frac{d}{v}$  zegar ruchomy dociera do pozycji zegara  $P$ - jaki czas wówczas wskaże zegar ruchomy? Wiemy, że oba zegary stacjonarne w układzie  $S$  wskażą czas  $T = \frac{d}{v}$ , w naszym przykładzie umownie będzie to  $T = 15$  sekund. Spójrzmy na to zagadnienie z perspektywy zegara w ruchu, który w swoim spoczynkowym układzie  $S'$  będzie znajdował się w punkcie  $x' = 0$ . Sprawdzamy na rozgrzewkę transformację Lorentza zmiennej przestrzennej: w układzie  $S$  zegar trzeci ma tor ruchu  $x = vt$ , a w układzie  $S'$  ma tor ruchu:

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(vt - vt) = 0.$$

Przechodzimy do równania drugiego:

$$T' = \gamma\left(T - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(T - \frac{v^2}{c^2}T\right) = \gamma T\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{T}{\gamma}.$$

Widzimy zatem, że gdy zegar  $C$  spotka się z zegarem stacjonarnym  $P$ , jego wskazanie ( $T' = \frac{T}{\gamma}$ ) będzie mniejsze (ponieważ  $\gamma > 1$ ) niż wskazanie zegara stacjonarnego. Zjawisko to nazywamy **dylatacją czasu**. Z perspektywy obserwatora nieruchomego, czas zegara poruszającego się płynie wolniej niż czas własny tego obserwatora.

S

$$t = \frac{d}{v} = 15$$



Dylatacja czasu wyda się jeszcze bardziej kontrowersyjna, gdy spojrzymy na sytuację z układu  $S'$ . Od tej pory rozważamy tę samą sytuację z perspektywy układu  $S'$ : w chwili  $t' = 0$  wskazania naszego zegara i zegara przelatującego właśnie przez punkt  $x' = 0$  wynoszą  $t' = 0$  (nie mamy jeszcze informacji o wskazaniach drugiego nadlatującego zegara, z którym się za chwilę spotkamy). Zauważmy teraz, że z naszej perspektywy to układ  $S$  się porusza, a zatem znajdujące się w nim zegary idą wolniej niż nasz zegar. Czy to oznacza, że gdy nadleci zegar  $P$ , jego wskazanie będzie mniejsze niż wskazanie zegara spoczywającego w  $S'$ ? Oczywiście nie! - obserwując sytuację z perspektywy układu  $S$  widzieliśmy, że zegar drugi w układzie  $S$  wskazał  $T = 15$  w momencie spotkania z zegarem  $C$ , który wtedy wskazał  $T' = \frac{T}{\gamma}$ . Wskazania na każdym z zegarów w momencie ich spotkania (wynikające np. z ułożenia wskazówek) lub bardziej bezpośrednio liczba drgnień wskazówki sekundowej na tarczy zegara  $C$  pomiędzy spotkaniami z zegarami  $L$  oraz  $P$  nie może zależeć od układu odniesienia, tak samo jak od układu odniesienia nie zależy, czy doszło do kolizji dwóch pojazdów na skrzyżowaniu, czy kierowca jadący w BMW podprapał się po nosie lub czy podczas partii szachów czarny król dostał mata. Wynik, który uzyskaliśmy  $T' = \frac{T}{\gamma}$  należy rozumieć dosłownie. Jak zatem to możliwe, by z perspektywy układu  $S'$  czas płynął wolniej właśnie w układzie  $S$ ? Cóż, wynika to z faktu, że... Może po prostu zabierzmy się za rachunki, a z nich wyłoni się prawda: Zegar stacjonarny w układzie  $S'$  wskazał czas  $T'$  gdy spotkał się z zegarem  $P$ . Zegary  $L$  oraz  $P$  nadlatywały do nas z prędkością  $-v$ , a zatem była między nimi stała odległość  $d'$ . Mamy zatem:  $v = \frac{d'}{T'}$ , mamy również  $v = \frac{d}{T}$  oraz  $T = T' \cdot \gamma$ . Stąd błyskawicznie  $d = d' \cdot \gamma$ , a zatem mamy

$$d' = \frac{d}{\gamma}$$

Pomiar  $d'$  długości odcinka pomiędzy nadlatującymi zegarami wykazał jego skrócenie w stosunku do długości tego odcinka  $d$  zmierzonej w ich układzie spoczynkowym  $S$ . Nazywamy to **skróceniem Lorentza** (gdy się to wyprowadza podręcznikowo, zazwyczaj to odcinek spoczynkowy w układzie  $S'$  porusza się względem  $S$  i wtedy często można się spotkać z notacją  $d = \frac{d'}{\gamma}$ , u nas zegary spoczynkowe w  $S$  wyznaczyły rozważany odcinek, stąd odwrotny wzór.)

Uzyskaliśmy już, że pomiar odległości oraz pomiar czasu pomiędzy dwoma zdarzeniami (pierwsze oraz drugie spotkanie zegarów) różnią się od siebie w zależności od układu odniesienia. Zastanowimy się teraz nad pytaniem, jaki czas wskazywał zegar  $P$ , gdy zegar spoczynkowy w

układzie  $S'$  wskazywał czas zero. Zegary układu  $S$  zostały ze sobą zsynchronizowane w układzie  $S$ , ale czy obserwowane z układu  $S'$  również wskazują tę samą godzinę? Cóż, w dynamice Newtonowskiej mamy zdarzenia równoczesne jako spełniające równość  $t = c$ , gdzie  $c$  to stała. Rezygnując z koncepcji czasu absolutnego, stajemy w obliczu **względności równoczesności**. W układzie  $S$  wskazówki obu zegarów wybiły godzinę  $t = 0$  w tej samej chwili. Za chwilę wyliczymy, że z perspektywy układu  $S'$ , gdy wskazówki pierwszego zegara układu  $S$  wskazywały czas  $t' = 0$ , drugi zegar miał już czas dodatni! Odległość w przestrzeni pomiędzy zegarami definiujemy jako odległość między ich pozycjami we wspólnej dla układu odniesienia (tego w którym wykonujemy pomiar) chwili czasowej  $t = c$ . Warunek równoczesności  $t' = c$  wyznaczy inną klasę zdarzeń niż warunek  $t = c$ . Wracamy do problemu: jesteśmy w układzie  $S'$ , w chwili  $t' = 0$  mijamy zegar pierwszy pokazujący czas  $t = 0$ . Po czasie  $T'$  dociera do nas zegar drugi wskazujący czas  $T$ . Mamy do dyspozycji transformacje przenoszące nas z układu  $S'$  do  $S$ :

$$x = \gamma \cdot (x' + vt'), \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'),$$

z których dostajemy, że czas który upłynął na poruszających się zegarach pomiędzy spotkaniami zegarów wynosi

$$\Delta t = \frac{T'}{\gamma} = \frac{T}{\gamma^2} = (1 - \frac{v^2}{c^2})T,$$

gdzie przypominam że  $T$  to czas który wskazał zegar drugi w momencie spotkania oraz oba zegary przemieszczające się  $L$  oraz  $P$  idą w tym samym tempie ponieważ poruszają się z tą samą prędkością  $-v$ . Otrzymujemy, że gdy zegar pierwszy wskazywał  $t = 0$ , zegar drugi już wskazywał czas  $\Delta t = T - \frac{T}{\gamma^2} = \frac{v^2}{c^2}T$ . Oznacza to, że z perspektywy układu  $S'$ , zegary nie wskazują tej samej godziny w tej samej chwili, czyli nie są zsynchronizowane. Wyjaśnia to też, skąd wzięło się wskazanie  $T = 15$  na zegarze  $P$  w momencie spotkania zegarów pomimo że zegar  $P$  idzie wolniej niż zegar  $C$ . Podsumowując: w układzie  $S'$  pojęcie równoczesności wyznacza inne podzbiory czasoprzestrzeni niż w układzie  $S$ . Trochę więcej o równoczesności zdarzeń powiemy sobie przy okazji **diagramu Minowskiego**. Uzyskane wyniki w naszym dość prostym przykładzie potwierdzają spójność teorii, pomimo kontrowersji i pozornych sprzeczności. Dla prostoty oprócz  $T = 15$  przyjmijmy wartość prędkości  $v = \frac{3}{5}c$ , w efekcie  $\gamma = \frac{5}{4}$ . Mamy:

**W układzie  $S$**  w chwili  $t = 0$  wszystkie trzy zegary wskazują czas zero. W chwili gdy zegary stacjonarne wskazują  $T = 15$  dochodzi do spotkania zegara  $C$  oraz  $P$ , zegar  $C$  wskazał wtedy  $T' = \frac{T}{\gamma} = \frac{15}{\frac{5}{4}} = 12$ . Widzimy, że w układzie  $S'$  czas płynie wolniej:  $T' = \frac{T}{\gamma}$ .

**W układzie  $S'$** : w chwili  $t' = 0$  przelatujący właśnie zegar  $L$  wskazał czas 0 natomiast jak wyliczyliśmy znajdujący się w odległości  $d'$  zegar  $P$  wskazywał wtedy  $t = \frac{v^2}{c^2}T = \frac{9}{25} \cdot 15 = \frac{27}{5}$ . Gdy do punktu  $x' = 0$  dotarł zegar  $P$ , wskazywał on  $T = 15 = \frac{75}{5}$ , widzimy zatem że z perspektywy układu  $S'$  stwierdzimy, że czas który upłynął w układzie  $S$  pomiędzy spotkaniami zegarów wyniósł  $\frac{48}{5}$ , co odpowiada ułankowi  $\frac{T'}{\gamma} = \frac{12}{\frac{5}{4}}$ .

Wykonane rachunki potwierdzają spójność teorii mówiącej, że czas układu poruszającego się płynie wolniej, niezależnie od tego który układ potraktujemy jako stacjonarny a który jako ruchomy, co przynosi pewne ukojenie w konfrontacjach ze sprzecznymi z intuicją własnościami czasoprzestrzeni (trochę szersze spojrzenie na tematykę przyniesie geometria Minkowskiego). Chyba najwyższy czas by sparafrazować Stanisława Lema: Matematyczny ład świata jest odpowiedzią na nasze modlitwy do piramidy chaosu.

W tym roku Stanisław Lem obchodziłby swoje setne urodziny. Ruszamy dalej.

**Transformacja Lorentza. Przypadek  $n = 3$ .**

Jak na razie ignorowaliśmy transformację zmiennych  $y$  oraz  $z$ . Mieliśmy ku temu powody - są to transformacje identycznościowe. Załóżmy że osie układów  $S$  oraz  $S'$  pokrywają się w chwili zero oraz osie przestrzenne układu  $S'$  przemieszczają się w kierunku osi  $x$  z prędkością  $v$  (układy są w **relacji standardowej**). Wiemy już jak transformują się zmienne  $x$  oraz  $t$  przy przejściu do zmiennych  $x'$  oraz  $t'$ . Pamiętając o liniowości poszukiwanej transformacji oraz o fakcie że żadne kierunki i punkty w przestrzeni nie są wyróżnione transformacje  $y'$  oraz  $z'$  muszą być postaci

$$y' = ky \text{ oraz } z' = kz,$$

a ich transformacje odwrotne:

$$y = ky' \text{ oraz } z = kz',$$

co prowadzi do  $k = 1$  lub  $k = -1$  niezależnie od wartości  $v$  i pozwala wyeliminować stałą  $k = -1$  (np. z tego powodu że jest ona niekompatybilna z przypadkiem  $v = 0$ ). Możemy wypisać teraz pełną postać **transformacji Lorentza** w kierunku osi  $x$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \end{aligned}$$

Zauważmy przy okazji, że jeśli mielibyśmy  $c = 1$  (co jest kwestią doboru jednostek fizycznych), transformacja Lorentza ujawniłaby bezpośrednio symetrię pomiędzy czasem i przestrzenią:

$$x' = \gamma(x - vt); t' = \gamma(t - vx).$$

Na wykładzie zazwyczaj będziemy posługiwać się niedogodnymi jednostkami, w efekcie czego będziemy skalować oś czasu przez stałą  $c$ , transformacja Lorentza przyjmie wtedy postać:

$$x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}ct\right); ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right).$$

**Zadanie S.** Pokaż, że promień światła wysłany z punktu 0 w układzie  $S$  (w dowolnie wybranym kierunku), w układzie  $S'$  również podróżuje z prędkością  $c$  (na razie sprawdziliśmy to jedynie dla kierunku  $x$ ).

**Krótkie podsumowanie.** Zakładamy, jak zwykle, że układy  $S$  oraz  $S'$  są w relacji standardowej.

- (1) **Dylatacja czasu** Okres  $T'$  ruchu wskazówki zegara poruszającego się wynosi

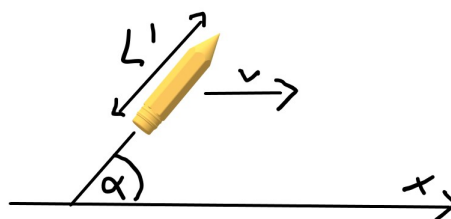
$$T' = \frac{T}{\gamma},$$

gdzie  $T$  to okres ruchu wskazówki takiego samego zegara nieruchomego. Polecam ponownie wprowadzić, tym razem samodzielnie, jako **ćwiczenie**.

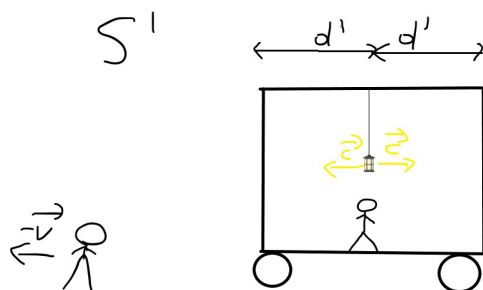
- (2) **Skrócenie długości** zachodzi w kierunku zmiennej  $x$ , tzn. zachodzi tylko w kierunku ruchu. Ponownie jako **ćwiczenie** polecam: Pokaż, jeśli poziomy (tzn. równoległy do osi  $x$ ) sztywny ołówek stacjonarny w układzie  $S'$  ma długość  $L$ , jego długość zmierzona w układzie  $S$  wyniesie

$$L' = \frac{L}{\gamma}.$$

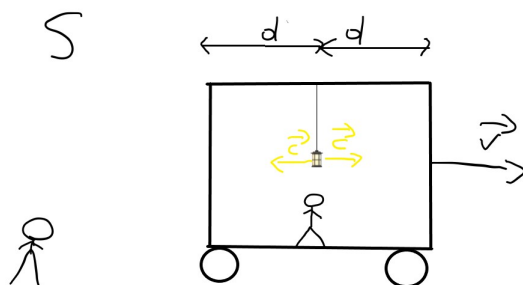
**Zad. L** A ile wyniesie długość ołówka w układzie  $S$ , jeśli podróżuje on w kierunku poziomym i ma stały kąt nachylenia do osi równy  $\alpha$ , jak na rysunku:



- (3) **Względność równoczesności.** Zilustrujmy to zjawisko na prostym przykładzie. Wagon pociągu porusza się z prędkością  $v$  jak na rysunku, na środku sufitu wisi żarówka, pasażer włącza światło. Układ związany z wagonem nazwiemy  $S'$ , sytuacja jak na rysunku. Z punktu widzenia pasażera promień światła dociera w tej samej chwili do przedniej oraz do tylnej ściany wagonu.

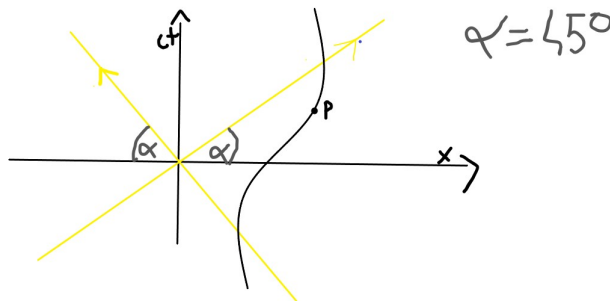


Z perspektywy obserwatora znajdującego się na torach - układ  $S$  - promień światła pochodzący od włączonej żarówki również rozprzestrzenia się z taką samą prędkością w obu kierunkach, jednakże przednia oraz tylna ściana wagonu mają prędkość  $v$  w efekcie czego dystans pomiędzy tylną ścianą wagonu a sygnałem świetlnym zmniejsza się zgodnie z prędkością  $c + v$  a dystans pomiędzy przednią ścianą a sygnałem świetlnym zmniejsza się zgodnie z prędkością  $c - v$ . Obserwator w układzie  $S$  stwierdza, że światło dotarło do tylnej ściany wcześniej niż do ściany przedniej.



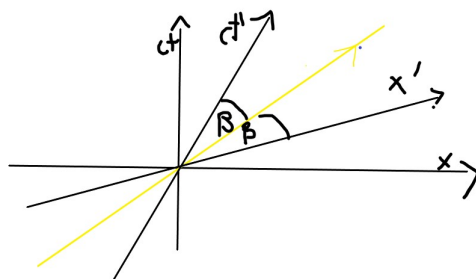
**6.4. Diagram czasoprzestrzenny (diagram Minkowskiego).** . Czasoprzestrzeń  $\mathbb{R}^4$  szczególnej teorii względności jest nazywana czasoprzestrzenią Minkowskiego a jej punkty nazywamy zdarzeniami. Podanie lokalizacji zdarzenia wymaga podania czterech współrzędnych: jednej czasowej oraz trzech współrzędnych przestrzennych. Trajektoria cząstki  $x(t)$  wyznacza tzw. linię świata cząstki (*worldline*). Geometrią Minkowskiego zajmiemy się niebawem.

Zapoznamy się teraz z diagramem Minowskiego, gdzie czas skalujemy by mieć dogodne jednostki, tzn. na osi czasu (na pionowej osi) zaznaczamy wartości postaci  $ct$  a na osi poziomej standardowe wartości  $x$  (będziemy ograniczać się na diagramie do współrzędnej przestrzennej  $x$ ). Promień światła ma trajektorię  $x = ct$  w efekcie czego jego linia świata to prosta nachylona pod kątem 45 stopni do osi  $x$ . Wszystkie inne obiekty poruszają się wolniej w efekcie czego ich linie świata są w każdym punkcie nachylone pod kątem co najmniej 45 stopni do poziomu.

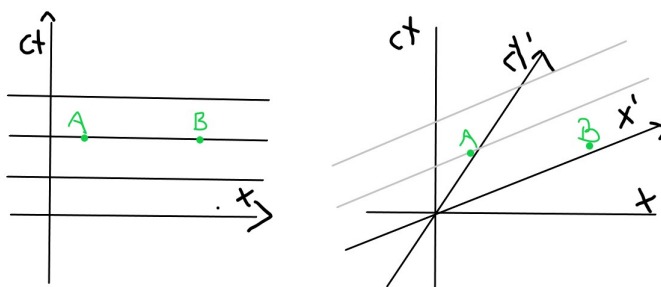


Rozważmy obiekt poruszający się z prędkością  $v$ , jego trajektoria dana jest wzorem  $x = vt = \frac{v}{c}ct$ . Z tym obiektem możemy związać układ  $S'$  i narysować jego osie na naszym diagramie. Oś  $t'$  odpowiada położeniu obiektu  $x' = 0$  a zatem ma równanie  $x = vt$  (ponieważ  $x' = \gamma(x - vt)$ ) natomiast oś  $x'$  która jest dana równaniem  $t' = 0$  ma postać  $ct = \frac{v}{c}x$ . Kąt pomiędzy osią  $x'$  a prostą  $x = ct$  jest taki sam jak kąt pomiędzy tą prostą a osią  $t'$  - jest to manifestacja faktu, że w układzie  $S'$  światło biegnie z taką samą prędkością jak w układzie  $S$ .





A teraz zastanówmy się ponownie nad równoczesnością zdarzeń. W układzie  $S$  zdarzenia  $A$  i  $B$  są równoczesne gdy leżą na prostej  $t = c$  (są to proste równoległe do prostej  $t = 0$  czyli do osi  $x$ ) natomiast zdarzenia są równoczesne w układzie  $S'$  gdy leżą na prostej postaci  $t' = c$  (są to proste równoległe do prostej  $t' = 0$  czyli do osi  $x'$ ). Na poniższych dwóch diagramach widzimy, że różne układy odniesienia wyznaczają inne klasy zdarzeń równoczesnych



**Paradoks bliźniąt.** Luke Skywalker pochwalił się siostrze: dostałem w prezencie wspaniały myśliwiec, który rozwija wielkie prędkości! Księżniczka Leja odparła: Ach, to doskonale, mój drogi bracie! Właśnie zaparzyłam herbatę, a widzę że brakuje nam cukru. Słyszałam że na planecie Ziemia mają wysmieniony cukier. Czy byłbyś tak miły.. No problem ! - wykrzyknął Luke i wskoczył do swojego nowego myśliwca. Podczas swojej podróży szybko rozwinął wielką prędkość w kierunku Ziemi, doświadczył oczywiście skrócenia Lorentza i dotarł do naszej planety w ciągu 60 sekund czasu pokładowego. Ziemianie właśnie szykowali się do rozpoczęcia roku kalendarzowego 2021 niemniej jednak Żabka do której wszedł Luke wciąż była otwarta gdzie zakupił cukier dla siostry (Luke mówi po angielsku, jak wiemy, więc został doskonale zrozumiany). Zadowolony wskoczył do swojego myśliwca i obrał kurs powrotny. Po szybkim powrocie do punktu wyjścia zauważył jednak ze smutkiem, że nie tylko księżniczka Leja już od dawna nie istnieje, ale gwiazda jego układu planetarnego już dawno zgasła...

Jak widzimy w załączonej historii, Luke boleśnie doświadczył dylatacji czasu. Paradoks bliźniąt polega jednak nie na samym fakcie dylatacji czasu, lecz na tym, że z perspektywy Luke'a to Leja oddalała się od niego, a zatem to jej zegarek powinien chodzić wolniej. Czy aby na pewno? **Zastanów się**, czy powyższa historia rzeczywiście jest przykładem złamania symetrii. **Przeanalizuj** sytuację przy użyciu diagramu Minkowskiego.

**Wzory na składanie prędkości:** na ćwiczeniach.

**6.5. Geometria Minkowskiego.** Właściwe spojrzenie na omówione w poprzednich paragrafach zaskakujące własności transformacji Lorentza dostarczy nam geometria Minkowskiego - teoria opublikowana w 1908 (1907?) roku przez matematyka Hermanna Minkowskiego przedstawiająca matematyczne (geometryczne) ujęcie szczególnej teorii względności. Einstein w swojej publikacji (1905), którą omawialiśmy w pierwszych paragrafach, nie używał pojęć **czasoprzestrzeni** oraz **zdarzenia**, które należy przypisać Minkowskiemu. Hermann Minkowski był jednym z nauczycieli akademickich Einsteina, urodził się na terenie Królestwa Polskiego (w 1864), zmarł na początku 1909 roku na zapalenie wyrostka, zatem nie był świadkiem (ani uczestnikiem) dalszej ewolucji teorii względności.

Spojrzymy teraz na szczególną teorię z punktu widzenia geometrii. W najogólniejszym spojrzeniu geometria jest dyscypliną matematyczną badającą **niezmienniki** wybranych klas przekształceń.

**Czasoprzetrzeń Galileusza** Jeśli topologiczną przestrzeń  $\mathbb{R}^4$  rozważymy wraz z transformacją Galileusza (czasoprzetrzeń Galileusza), wtedy nie da się określić odległości pomiędzy zdarzeniami (w sposób niezależny od wyboru układu odniesienia). Niezmiennikami czasoprzetrzeni Galileusza będą: odległość czasowa dwóch zdarzeń (upływ czasu pomiędzy dwoma zdarzeniami) oraz odległość przestrzenna dwóch zdarzeń **równoczesnych**. Dla prostej ilustracji, rozważmy dwa zdarzenia nierównoczesne: o godzinie 12:00 wyruszamy pociągiem z Krakowa, o godzinie 15:00 przybywamy pociągiem do Warszawy. Odległość czasowa pomiędzy tymi zdarzeniami to 3 godziny. Zdarzenia te zatem nie są równoczesne. Przyjmijmy, że w układzie spoczynkowym torów Kraków ma współrzędne  $(t, 0)$  natomiast Warszawa ma współrzędną  $(t, W)$ . W układzie spoczynkowym jadącego pociągu przyjmujemy, że w chwili  $t$  Kraków ma współrzędną  $(t, -vt)$  a Warszawa ma współrzędną  $(t, W - vt)$ , gdzie  $v$  to prędkość pociągu ( dla uproszczenia założyliśmy że tor ruchu jest linią prostą; oba układy pokrywają się w chwili  $t = 0$ ). Łatwo zmierzmy odległość przestrzenną między zdarzeniami równoczesnymi  $(t, -vt)$  oraz  $(t, W - vt)$  (wynosi ona  $W$  i odpowiada odległości pomiędzy Krakowem i Warszawą) natomiast nie ma możliwości pomiaru odległości pomiędzy zdarzeniami nierównoczesnymi  $(t, -vt)$  oraz  $(s, W - vs)$  w sposób niezależny od wyboru układu odniesienia (czyli w sposób niezależny od stałej  $v$ ).

**Interwał czasoprzestrzenny.** W poprzednich paragrafach widzieliśmy, że ani upływ czasu pomiędzy zdarzeniami, ani odległość zdarzeń równoczesnych, nie będą niezmiennikami geometrii mającej opisać szczególną teorię względności. Wiemy natomiast, że wspólny będzie pomiar prędkości światła. Jak zazwyczaj, zaczniemy rozważania od przypadku jednej zmiennej przestrzennej  $x$ . Rozważmy dwa zdarzenia w układzie  $S$ :  $P_1 = (ct_1, x_1)$  oraz  $P_2 = (ct_2, x_2)$ , które dzieli odległość czasowa  $\Delta t = t_2 - t_1$  oraz przestrzenna  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Z postulatów stałej prędkości światła wynika niezmienniczość tzw. **interwału czasoprzestrzennego**:

$$(\Delta s)^2 := c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 := c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

co będziemy wyrażać w ramach następującej notacji

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2, \text{ gdzie } \Delta s^2 := (\Delta s)^2, \Delta t^2 := (\Delta t)^2, \Delta x^2 := (\Delta x)^2.$$

Niezmienniczość interwału oznacza, że dla dwóch różnych układów odniesienia mamy:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli dwa zdarzenia można połączyć promieniem świetlnym ( $\Delta x = c\Delta t$ ), wartość interwału pomiędzy nimi wyniesie zero w każdym układzie odniesienia. Podobnie łatwo stwierdzić, że wartość interwału między dwoma zdarzeniami będzie zawsze dodatnia lub zawsze ujemna (dzięki założeniu, że układy inercjalne oddalają się od siebie z prędkościami mniejszymi od  $c$ ). Niezmienniczość interwału można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem przy użyciu transformacji Lorentza: rozważmy współrzędne zdarzeń  $P_1$  oraz  $P_2$  po przejściu do układu  $S'$  i

policzmy tam wartość interwału:

$$\begin{aligned}\Delta s^2(P'_2, P'_1) &:= c^2\gamma^2\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2 - t_1 + \frac{v}{c^2}x_1\right)^2 - \gamma^2\left((x_2 - x_1) + v(t_2 - t_1)\right)^2 = \\ &= c^2\gamma^2\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}(\Delta x)\right)^2 - \gamma^2(v\Delta t + \Delta x)^2 = \\ &= \dots = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta s^2(P_2, P_1).\end{aligned}$$

Definiujemy teraz **interwał czasoprzestrzenny** pomiędzy zdarzeniami w trzech wymiarach:

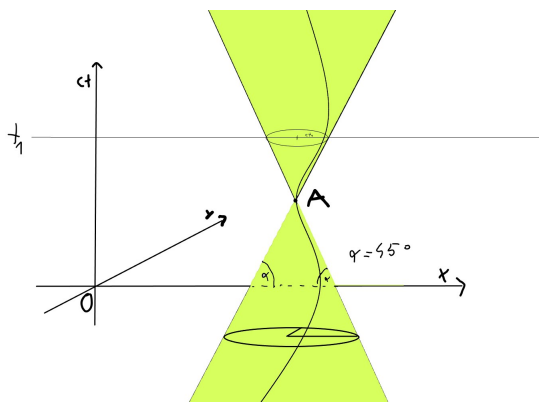
$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

a niezmienniczość tego interwału wynika z poprzednich rachunków (ponieważ  $y' = y$  oraz  $z' = z$ ). Wartości  $\Delta s^2$  definiują tzw. **metrykę Minkowskiego** (lub odległość Minkowskiego), aczkolwiek widzimy że tak mierzone odległości pomiędzy zdarzeniami mogą przyjmować wartości ujemne więc nie spełniają aksjomatów metryki (w zasadzie cały czas pracujemy na kwadracie interwału  $\Delta s^2$ , który nazywamy skrótowo interwałem - wartości  $\Delta s$  byłyby kłopotliwe chociażby ze względu na pierwiastkowanie liczb ujemnych). Dodatkowo są natomiast odległości pomiędzy zdarzeniami należącymi do tego samego stożka czasoprzestrzennego. **Stożkiem czasoprzestrzennym** zdarzenia  $P$  nazwiemy zbiór zdarzeń  $A$  spełniających:

$$\Delta s^2(A, P) \geq 0.$$

Zdarzenia  $P$  należące do stożka zdarzenia  $A$  są to takie zdarzenia, że pomiędzy zdarzeniami  $A$  i  $P$  mogą występować zależności o charakterze przyczynowo skutkowym (mogą je połączyć trajektorie o prędkościach nie przekraczających  $c$ ). Zdarzenia takie nazywamy **czasopodobnymi**. W każdym układzie odniesienia następstwo czasowe tych zdarzeń będzie takie samo (dzięki założeniu  $v < c$ ). Natomiast zdarzenia o interwale ujemnym  $\Delta s^2 < 0$  nazywamy **przestrzenno-podobnymi**, kolejność ich zajścia zależy od obserwatora oraz nie może między nimi wystąpić zależność przyczynowo-skutkowa. Zdarzenia odległe o zero ( $\Delta s^2 = 0$ ) to zdarzenia, które można połączyć promieniem świetlnym - nazywamy je **światłopodobnymi**. Zbiór zdarzeń światłopodobnych do zdarzenia  $P$  to powierzchnia jego stożka czasoprzestrzennego - nazywamy ją **stożkiem świetlnym**.

Na poniższym rysunku stożek zdarzenia  $A$  (przy dwóch zmiennych przestrzennych). Linia świata każdej fizycznej cząstki przechodzącej przez punkt  $A$  zawiera się w stożku. Stożek jednoznacznie (dla każdego obserwatora) wycina zdarzenia stanowiące **przyszłość** zdarzenia  $A$  (stożek dodatni) oraz **przeszłość** zdarzenia  $A$  (stożek ujemny).



**Grupa Lorentza.**

Na początek przyjrzyjmy się euklidesowej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  z trzema zmiennymi  $x, y, z$ .

**Macierze ortogonalne** tworzą grupę  $O(3)$  zdefiniowaną warunkiem  $R^T R = I_3$  skąd wynika, że  $(\det R)^2 = 1$ . Wyróżniamy w niej grupę obrotów właściwych  $SO(3)$ , zdefiniowaną dodatkowym warunkiem  $\det R = 1$ , oraz obroty niewłaściwe  $\det R = -1$  (zawierające odbicia względem płaszczyzny przechodzącej przez 0 oraz niektóre złożenia odbić z obrotami). Grupa obrotów  $SO(3)$  jest generowana przez 3 niezależne obroty: względem osi  $x, y$  oraz  $z$ . Grupa ta naturalnie stanowi 3-parametrową topologiczną grupę której każdy element można otrzymać zmieniając parametry w sposób ciągły startując w idyntityczności (jest to grupa spójna zawierająca idyntityczność co ma istotne znaczenie fizyczne.) Macierze ortogonalne - złożenia wspomnianych obrotów i odbić - są jedynymi odwzorowaniami liniowymi w  $\mathbb{R}^3$  zachowującymi normę euklidesową  $x^2 + y^2 + z^2$ . Tak więc dla dwóch obserwatorów, z których jeden używa współrzędnych kartezjańskich w  $\mathbb{R}^3$  a drugi dokonał zamiany współrzędnych  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , gdzie  $A^{-1} = A^T$ , odległość wybranych punktów w przestrzeni od zera jest taka sama ( $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}'\|$ ). W kontekście interwału czasoprzestrzennego łatwo teraz widać, że działanie macierzą ortogonalną na zmienne przestrzenne (bez zmiany zmiennej czasowej  $t$ ) nie zmieni wartości interwału  $\Delta s^2$ .

Wracamy do sytuacji ogólnej. Odległość punktu  $X = (ct, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  od 0 będziemy oznaczać

$$X \cdot X = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

poprzez analogię do standardowego iloczynu skalarnego w  $\mathbb{R}^n$ . Metryka Minkowskiego jest wyznaczona przez **tensor Minkowskiego**:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

co pozwala zapisać produkt  $X \cdot X$  zgodnie ze wzorem:

$$(6.4) \quad X \cdot X = X \eta X^T = [X^0 X^1 X^2 X^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix}.$$

gdzie  $X = (X^0, X^1, X^2, X^3)$ . Korzystając z umowy sumacyjnej Einsteina możemy zapisać:

$$X \eta X^T = X^i \eta_{i,j} X^j.$$

Zgodnie z umową sumacyjną wszystkie indeksy występujące w powyższym wyrażeniu równocześnie jako indeksy dolne i górne oznaczają, że całe wyrażenie sumujemy po całym dopuszczalnym zakresie wartości tych indeksów (tzn.  $a_i b^i = \sum_i a_i b^i$ ).

Wektor  $X$  nazywamy czasopodobnym gdy  $X \cdot X > 0$ , zerowym lub światłopodobnym gdy  $X \cdot X = 0$ , przestrzennopodobnym gdy  $X \cdot X < 0$ .

Zastanowimy się teraz, jakie liniowe przekształcenia zachowują wartość interwału  $\Delta s^2$  (uzyskując tą drogą transformację Lorentza).

Szukamy takich macierzy  $\Lambda$  wymiaru  $4 \times 4$ , by zachodziło:

$$(6.5) \quad X' \cdot X' = X \cdot X$$

gdzie  $X' = \Lambda(X)$  lub, w zapisie macierzowym  $(X')^T = \Lambda X^T$ .

Równanie (6.5) ma postać

$$X\Lambda^T\eta\Lambda X^T = X\eta X^T \text{ dla dowolnego czterowektora } X \in \mathbb{R}^4,$$

skąd

$$(6.6) \quad \Lambda^T\eta\Lambda = \eta.$$

Rozwiązania równania (6.6) nazywamy **grupą Lorentza** i oznaczamy  $O(1, 3)$ . Zastanówmy się jakiego rodzaju rozwiązania ona zawiera. Szukana macierz  $\Lambda$  składa się z 16 wyrazów natomiast macierze  $\eta$  oraz  $\Lambda^T\eta\Lambda$  to macierze symetryczne, zatem równanie (6.6) to w rzeczywistości 10 niezależnych równań (zmienne w nich występujące są w pierwszej oraz w drugiej potędze). W efekcie w grupie Lorentza znajdziemy 6 niezależnych "ciekawych" rozwiązań oraz rozwiązania "nieciekawe" takie jak odbicia. Wśród odbić wyróżnimy teraz odbicie zmiennej czasowej (zmianę kierunku czasu):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Omówione na początku niniejszego paragrafu obroty przestrzenne (właściwe oraz niewłaściwe) dostarczają nam zbiór rozwiązań postaci:

$$\Lambda = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

gdzie  $RR^T = I_3$ . Pierwsze trzy "ciekawe" transformacje zachowujące geometrię czasoprzestrzeni Minkowskiego to wspomniane już obroty względem osi  $x$ ,  $y$  oraz  $z$ , generujące grupę obrotów właściwych ( $\det R = 1$ ).

Nareszcie, dostajemy również transformacje których poszukujemy, tj. zmieniające wartości zmiennej czasowej oraz co najmniej jednej zmiennej przestrzennej. Przyjrzymy się teraz czystym transformacjom Lorentza (pchnięciom Lorentza) - transformacjom, które ruszają zmienną czasową i jedną zmienną przestrzenną, nie zmieniając kierunku czasu, o wyznaczniku  $\det \Lambda = 1$ . Przykładowo:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie  $a^2 - c^2 = 1$ ,  $ab = cd$ ,  $d^2 - b^2 = 1$  (zależności te wynikają z równania (6.6)). Jeśli powyższa macierz nie wygląda znajomo, sparametryzujemy ją jak należy. Z dokładnością do odbić powyższą rodzinę sparametryzujemy przy użyciu stałej  $v \in (-c, c)$ , by uzyskać:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Powyższa transformacja to dobrze nam znane pchnięcie Lorentza wzdłuż osi  $x$ . Pozostałe dwa zapowiedziane wcześniej "ciekawe" niezależne rozwiązania (6.6) to pchnięcie Lorentza wzdłuż osi  $y$  oraz wzdłuż osi  $z$ .

Pokazuje się, że złożenia pchnięć Lorentza oraz obrotów właściwych stanowią **właściwą ortochroniczną grupę Lorentza** oznaczaną  $SO^+(1, 3)$ , tj. grupę zdefiniowaną warunkiem:

$$\Lambda_{0,0} > 0 \text{ oraz } \det \Lambda = 1,$$

gdzie  $\Lambda_{0,0}$  to "pierwszy" wyraz macierzy (indeksujemy od zera). Grupa  $SO^+(1, 3)$  to te elementy  $O(1, 3)$ , które zachowują kierunek czasu (stąd przydomek: "ortochroniczna") oraz zachowują orientację. Jest to 6-parametrowa (3 parametry kątowe dla obrotu oraz 3 parametry odpowiadające prędkościom dla pchnięcia) topologicznie spójna grupa zawierająca identyczność. Naturalnie, pchnięcia w kierunku wybranej osi stanowią jej podgrupę i wykorzystamy to w poniższym paragrafie.

**Składanie prędkości.** Wróćmy do dwóch zmiennych  $t, x$  oraz oznaczmy

$$\Lambda[v] = \gamma_v \begin{bmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{bmatrix}$$

Składając dwa pchnięcia w kierunku  $x$  uzyskamy

$$\Lambda[v_1]\Lambda[v_2] = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & -v_1/c \\ -v_1/c & 1 \end{bmatrix} \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & -v_2/c \\ -v_2/c & 1 \end{bmatrix} = \Lambda\left[\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}\right],$$

co odpowiada wzorowi na składanie prędkości. Rozważymy jednak wygodniejszą parametryzację:

$$\gamma = \cosh \varphi = \frac{\exp(\varphi) + \exp(-\varphi)}{2}.$$

Przypomnijmy jeszcze sinus hiperboliczny

$$\sinh \varphi = \frac{\exp(\varphi) - \exp(-\varphi)}{2}$$

oraz "jedynekę hiperboliczną:"

$$\cosh^2 - \sinh^2 x = 1.$$

W efekcie dostajemy następującą parametryzację pchnięcia Lorentza:

$$\Lambda[\varphi] = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix},$$

dzięki której

$$\Lambda[\varphi_1]\Lambda[\varphi_2] = \Lambda[\varphi_1 + \varphi_2].$$

Przypomnijmy, że gdy  $R[\theta]$  jest macierzą obrotu płaszczyzny o kąt  $\theta$ , wtedy

$$R[\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

oraz zachodzi

$$R[\theta_1]R[\theta_2] = R[\theta_1 + \theta_2].$$

Mamy zatem analogię pomiędzy pchnięciem Lorentza (transformacja zmiennej czasowej i przestrzennej) a obrotami w przestrzeni.

**6.6. Mechanika relatywistyczna.** Do tej pory zajmowaliśmy się głównie konsekwencjami zmiany układu współrzędnych przy zmianie układu odniesienia, tj. konsekwencjami (liniowej) transformacji Lorentza. Szczególna teoria względności nie sprowadza się jednak do algebry liniowej. Zajmiemy się teraz tematyką związaną z ruchem cząstek, od której zaczęliśmy niniejszy wykład. Podejście relatywistyczne wymaga przedefiniowania podstawowych pojęć.

Jednym z najważniejszych pojęć teorii względności jest **czas własny**. Rozważmy zegar znajdujący się w pozycji  $x' = 0$  swojego układu spoczynkowego  $S'$ . Jego linia świata to  $(ct', 0, 0, 0)$ . **Czas własny**  $\tau$  zegara upływa zgodnie z czasem w jego układzie spoczynkowym  $\tau = t'$  co można łatwo wyrazić poprzez interwał  $\Delta s^2 = c^2(t'^2)$ , mianowicie:

$$\tau = \frac{1}{c} \Delta s.$$

Przypomnijmy, że wartość interwału  $\Delta s^2(A, P) = \Delta s^2$  pomiędzy dwoma zdarzeniami nie zależy od układu współrzędnych, a zatem w dowolnym układzie odniesienia upływ czasu własnego pomiędzy dwoma następującymi po sobie zdarzeniami na linii świata zegara wyniesie:

$$\Delta \tau = \frac{\Delta s}{c}.$$

Wartość  $\Delta s = \sqrt{\Delta s^2}$  jest dodatnia (a nie urojona - dlaczego?). Powyższy wzór jest równoważny (proszę sprawdzić) wzorowi na dylatację czasu

$$\Delta \tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

(który uzyskaliśmy teraz korzystając z niezmienniczości interwału a nie z transformacji Lorentza, czas własny jest pojęciem geometrycznym, niezależnym od przypięcia współrzędnych).

Powyższe rozważania przeprowadziliśmy dla zegara siedzącego w układzie spoczynkowym  $S'$ , który porusza się jednostajnie względem dowolnego układu inercjalnego  $S$ . A co z ruchem krzywoliniowym? W fizyce newtonowskiej trajektorię cząstki  $\mathbf{x}(t)$  parametryzowaliśmy czasem układu  $S$ . W kontekście relatywistycznym, wygodniej będzie parametryzować linię świata czasem własnym cząstki

$$X(\tau) = (t(\tau), \mathbf{x}(\tau)).$$

Pierwszą współrzędną  $X_0$  czterowektora  $X$  jest współrzędna czasowa. Elementy czasoprzestrzeni nazywa się często czterowektorami (odróżniając je od newtonowskich wektorów przestrzennych mających trzy współrzędne). Czterowektory będziemy oznaczać wielkimi literami (a wektory przestrzenne często będą pogrubioną czcionką jak w poprzednich paragrafach).

W ruchu krzywoliniowym zegara przyjmujemy, że w każdej chwili czasu znajduje się on w swoim chwilowym układzie spoczynkowym (wyznaczonym przez bieżącą wartość prędkości  $v(t) = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$ ), uzyskując:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma},$$

gdzie

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v(t))^2}{c^2}}}.$$

Przypomnijmy, że  $\mathbf{x}(t)$  to newtonowska parametryzacja ruchu zegara w ustalonym układzie odniesienia  $S$ . Przykładowo, można przeprowadzić następujące rozumowanie: trajektorię  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in [T_0, T]$  przybliżam łamaną wyznaczoną przez ciąg podziałów :

$$t_0 = T_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T, \Delta t_i^n := t_i^n - t_{i-1}^n$$

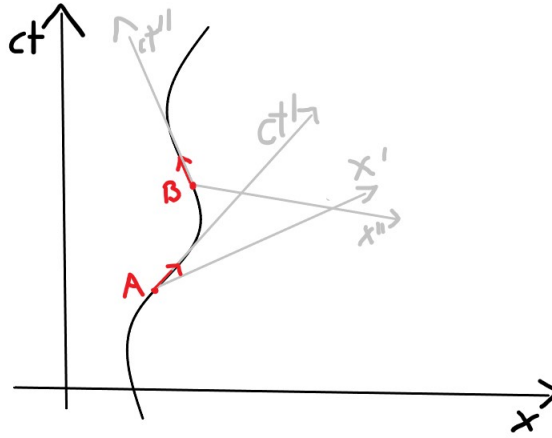
co daje aproksymację czasu własnego:

$$\Delta\tau_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma(t_i)} \Delta t_i^n,$$

w granicy otrzymując całkę Riemanna (oczywiście średnica ciągu podziałów musi zbiegać do zera):

$$\Delta\tau = \int_{T_0}^T \frac{1}{\gamma} dt.$$

Poniżej ilustracja: dwa chwilowe układy spoczynkowe cząstki  $S'(x', t')$  oraz  $S''(x'', t'')$  obserwowanej w układzie  $S(x, t)$ .



**Czterowektory prędkości.** Rozważmy trajektorę w układzie  $S$  indeksowaną czasem własnym  $\tau$ :

$$X[\tau] = [ct(\tau), \mathbf{x}(\tau)].$$

Rozważamy trajektorie dozwolone dla cząstek posiadanych masę, tj. o prędkościach mniejszych od prędkości światła (pomijamy zatem cząstki takie jak fotony oraz grawitony). Zdefiniujemy teraz czteroprędkość:

$$U = \frac{dX}{d\tau} = [c \cdot dt/d\tau, d\mathbf{x}/d\tau].$$

Mamy  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$  oraz  $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ , skąd, przy oznaczeniu  $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ ,

$$U = \gamma \cdot [c, \mathbf{u}].$$

Zgodnie z naszymi założeniami, wektor  $U$  jest wektorem czasowym tzn. mamy zagwarantowane  $U \cdot U > 0$ . Niezmienniczość czasu własnego  $\tau$  implikuje dużo silniejszą własność, o czym za chwilę. Jeśli cząstka ma prędkość  $U$  w układzie  $S$ , obserwator znajdujący się w układzie  $S'$  o współrzędnych  $X' = \Lambda X$  uzyska prędkość cząstki  $U'$  zgodnie z transformacją:

$$U' = \Lambda U.$$

Powyzsza równość jest prawdziwa dzięki niezmienniczości  $\tau$  (proszę sprawdzić jako ćwiczenie). Transformacja wielkości  $\frac{dX}{d\tau}$  byłaby już kłopotliwa rachunkowo ze względu na transformację zmiennej  $t$  przy zmianie układu odniesienia. Czterowektorami będziemy nazywać nie tylko współrzędne zdarzeń w czasoprzestrzeni ale wszystkie wielkości transformujące się zgodnie z formułą  $A' = \Lambda A$  przy zmianie układu odniesienia  $X' = \Lambda X$ .



Dzięki formule  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$  łatwo dostajemy, że produkt  $U \cdot U = U \eta U^T$  (oznaczający długość czterowektora w sensie metryki Minkowskiego) jest niezmienniczy, tzn:

$$U' \cdot U' = U \cdot U.$$

Wiemy, że prędkość cząstki w jej układzie spoczynkowym wynosi

$$U = [c, 0, 0, 0],$$

skąd

$$(6.7) \quad U \cdot U = c^2.$$

Uzyskaliśmy, że równość (6.7) jest spełniona w każdym układzie odniesienia - można to sprawdzić bezpośrednim rachunkiem dla dowolnego czterowektora prędkości  $U$  w ustalonym układzie  $S$  (ćwiczenie) Równość (6.7) gwarantuje, że wystarczy podać trzy wartości zmiennych by zadać wektor cztero-prędkości (jak w fizyce newtonowskiej, gdzie wektory prędkości mają trzy współrzędne).

**Dodawanie prędkości.** Jak do tej pory wyprowadziliśmy na wykładzie wzory na prędkości względne w sytuacji gdy prędkość  $u$  cząstki w układzie  $S$  miała kierunek zgodny z prędkością  $v$  układu  $S'$  względem układu  $S$ . Rozważmy teraz sytuację ogólniejszą, gdzie cząstka w układzie  $S$  ma wektor cztero-prędkości:

$$U = \gamma_u [c, u \cos \alpha, u \sin \alpha, 0], \quad \text{gdzie } \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Zakładamy, że układy  $S$  oraz  $S'$  są w relacji standardowej. 4-wektor  $U'$  cząstki w układzie  $S'$ :

$$U' = \Lambda U = \gamma_u [\gamma_v (1 - \frac{uv}{c^2} \cos \alpha) c, \gamma_v (u \cos \alpha - v), u \sin \alpha, 0]$$

oraz

$$U' = \gamma_{u'} [c, u' \cos \alpha', u' \sin \alpha', 0],$$

skąd wyłuskamy żadaną prędkość w kierunku  $x$ :

$$u' \cos \alpha' = \frac{u \cos \alpha - v}{1 - \frac{uv}{c^2} \cos \alpha}$$

oraz, dzieląc współrzędną  $y'$  przez współrzędną  $x'$ , tangens kąta  $\alpha'$  pomiędzy wektorem prędkości oraz osią  $x'$ :

$$\tan \alpha' = \frac{u \sin \alpha}{\gamma_v (u \cos \alpha - v)}.$$

**Przykład.** Uzyskane formuły można wykorzystać by wyprowadzić relatywistyczny wzór na **aberrację światła** (aberrację gwiazdną) wyjaśniającą (niewielką) zmianę położenia gwiazd na nieboskłonie w wyniku podróży Ziemi dookoła Słońca (orbita Ziemi ma pomijalnie mały rozmiar w stosunku do odległości gwiazd więc ich pozycja na nieboskłonie w ciągu roku nie zależy od pozycji Ziemi, przyczyną tego zjawiska jest zmiana kierunku prędkości Ziemi).

**4-wektor pędu** zdefiniujemy:

$$P = mU = m\gamma [c, \mathbf{u}].$$

Cztero-pęd  $P$  jest wielkością zachowaną w kontekście relatywistycznym (gdy na cząstkę lub na układ cząstek nie działają żadne siły). Składnik przestrzenny  $\mathbf{p}$  wektora  $P = [P^0, \mathbf{p}]$

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{u}$$

jest iloczynem stałej  $\gamma$  oraz pędu newtonowskiego  $m \cdot \mathbf{u}$ . Widzimy łatwo  $\lim_{u \rightarrow c} |\mathbf{p}| = \infty$ . Z trochę większą dbałością o formalizm matematyczny zapisalibyśmy

$$\mathbf{p}(\tau) = \gamma(t(\tau)) m \mathbf{u}(t(\tau))$$

skąd można postawić pęd relatywistyczny następująco

$$\mathbf{p}(t) := \gamma[t]m\mathbf{u}(t),$$

jeśli chcemy parametryzować go czasem  $t$  danego układu  $S$ .

Zastanówmy się nad czasową składową pędu  $P^0 = \gamma mc$ , rozwijając stałą  $\gamma$  w szereg Taylora

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{u}{c}\right)^4 + \dots = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + o\left(\left(\frac{u}{c}\right)^3\right)$$

skąd

$$P^0 = \gamma mc = \frac{1}{c}\gamma mc^2 = \frac{1}{c}\left(mc^2 + \left(\frac{1}{2}\right)mu^2 + o\left(\left(\frac{u}{c}\right)^3\right)\right).$$

Wyrażenie w nawiasie, w przybliżeniu równe sumie stałej  $mc^2$  oraz newtonowskiej energii kinetycznej  $\frac{1}{2}mu^2$  (dla małych prędkości  $u$ ), Einstein słusznie zinterpretował jako energię. Zachowanie pierwszej składowej pędu  $P^0 = \frac{1}{c}E$  oznaczać będzie relatywistyczną wersję zasady zachowania energii, która dana jest wzorem

$$(6.8) \quad E = \gamma mc^2.$$

Zauważamy, że wraz ze wzrostem prędkości do wartości granicznej  $c$ , wartość energii cząstki rośnie do nieskończoności - nie uda się zatem rozpędzić cząstki posiadającej masę do prędkości światła. Równanie (6.8) uczy nas że energia cząstki zależy od jej prędkości oraz od masy. W fizyce newtonowskiej mieliśmy wypracowaną zasadę zachowania energii przy domyślnym założeniu że masa cząstki (lub masa układu) jest stała. Natomiast w fizyce relatywistycznej wspomniane dwie newtonowskie wielkości nie są zachowywane niezależnie od siebie. W szczególności, część masy układu może zostać zamieniona w energię kinetyczną oraz promieniowanie, może też zachodzić odwrotny proces (jak np. kreacja pary elektron-pozyton z energii fotonu). Cząstka stacjonarna o masie  $m$  będzie posiadać energię postaci:

$$E = mc^2.$$

W niniejszym kontekście masa  $m$  jest często nazywana masą spoczynkową a wartość  $\gamma \cdot m$  masą relatywistyczną.

Wróćmy do 4-wektora pędu  $P$ . Mamy  $P' \cdot P' = P \cdot P$  oraz, jeśli  $S$  jest układem spoczynkowym cząstki,  $P = [mc, 0, 0, 0]$ , skąd zawsze

$$P \cdot P = m^2 c^2.$$

Bez założenia, że układ jest spoczynkowy, dostaniemy

$$P' \cdot P' = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2,$$

wobec czego dostajemy zależność energii od masy i pędu:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4.$$

**Relatywistyczna wersja II zasady dynamiki Newtona.** W analogii do dynamiki newtonowskiej II zasadę dynamiki zapiszemy w postaci:

$$\frac{dP}{d\tau} = F,$$

gdzie  $F = [F^0, F^1, F^2, F^3]$  jest 4-wektorem siły praz  $P = [P^0, \mathbf{p}]$  4-wektorem pędu. Pojęcie siły jest w zasadzie pojęciem pomocniczym. By uzyskać bliższą analogię z mechaniką newtonowską, tj. by uzyskać prawo postaci:

$$(6.9) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}$$

gdzie  $f$  ma odpowiadać "newtonowskim" oddziaływaniom w przestrzeni danego układu odniesienia, potrzebujemy siłę  $F$  zapisać jako

$$F = [F^0, \gamma \mathbf{f}].$$

Wtedy dostaniemy

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \gamma \mathbf{f} \frac{1}{\gamma} = \mathbf{f}.$$

Tutaj naturalnie  $\mathbf{f} = f(x, t)$  - obie strony równania (6.9) zależą od czasu, a w zasadzie od prędkości - pamiętamy, że  $\mathbf{f} = \frac{1}{\gamma}[F^1, F^2, F^3]$  oraz że zmienna  $t$  po której różniczkujemy zależy od prędkości. Widać tutaj, że w fizyce relatywistycznej nie ma miejsca na oddziaływania takie jak prawo powszechnego ciężenia Newtona będące postaci  $f(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ , które jest funkcją odległości oraz błyskawicznym działaniem na odległość (w teorii relatywistycznej oddziaływania propagują się ze skończoną prędkością a odległość przestrzenna zależy od układu  $S$ ). Grawitacja została prawidłowa ujęta przez Einsteina dopiero w ramach ogólnej teorii względności (1915). Właściwym przykładem siły  $f$  jest siła Lorentza (działająca na elektron znajdujący się w polu elektromagnetycznym) lub np. siła kontaktowa między cząstkami w momencie zderzenia. Przejście z fizyki newtonowskiej do relatywistycznej nie jest jedynie prostymi poprawkami we wzorach z wykorzystaniem stałej Lorentza - jest to raczej droga prowadząca ze świata klasycznego do innego świata - najszerszym polem zastosowań szczególnej teorii względności jest fizyka cząstek elementarnych. Naturalnie obie teorie są do siebie podobne z matematycznego punktu widzenia (rozwiązywanie równań relatywistycznych jest jednak trudniejsze - problem dwóch ciał ogólnej teorii względności jest nierozwiązywalny analitycznie).

Przyjrzyjmy się jeszcze zerowemu komponentowi siły  $F$ :

$$F^0 = \frac{dP^0}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}.$$

Pamiętamy z początkowych wykładów, jak moc nierelatywistyczna  $\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{x}}$  miała się do tempa z jakim wykonywana jest praca (tj. tempa z jakim zmienia się energia). Rozważmy cząstkę o stałej masie, tj. mamy  $P \cdot P = mc^2$  oraz  $\frac{dP \cdot P}{d\tau} = 0$ . Z drugiej strony,  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{u}$ , możemy wyliczyć:

$$0 = d \frac{P \cdot P}{d\tau} = 2P^0 \frac{dP^0}{d\tau} - 2\mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 2\gamma^2 m \left( \frac{dE}{dt} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \right).$$

Mamy zatem

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}, \text{ gdzie } \mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}.$$

**6.7. Układy nieinercjalne. Ruch jednostajnie przyspieszony.** . Naturalnie, **4-przyspieszenie**  $A$  zdefiniujemy następująco:

$$A = \frac{dU}{d\tau},$$

gdzie  $U = [\gamma c, \gamma \mathbf{u}]$  jest 4-prędkością. Jak w przypadku czteroprędkości, łatwo zauważyć, że  $A$  jest poprawnie zdefiniowanym czterowektorem. Różniczkując po zmiennej  $\tau$  warunek  $U \cdot U = c^2$  szybko dostajemy

$$A \cdot U = 0,$$

czyli 4-przyspieszenie jest prostopadłe do 4-prędkości (w sensie Minkowskiego). Zanim zdefiniujemy czym jest stałe przyspieszenie relatywistyczne, zastanowmy się jak wyznaczyć 4-przyspieszenie  $A$  obserwując tor ruchu cząstki w układzie  $S$ . W układzie tym, jak poprzednio, newtonowską prędkość cząstki oznaczmy przez  $\mathbf{u}$ , newtonowskie przyspieszenie wyniesie  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ . Mamy

$$A = \frac{dU}{d\tau} = \frac{dU}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma[\dot{\gamma}c, \dot{\gamma}\mathbf{u} + \gamma\mathbf{a}],$$

gdzie oczywiście  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ . Rozważmy teraz chwilowy układ spoczynkowy naszej cząstki  $S'$  (w danej chwili  $t$ ). W tym układzie chwilowo mamy prędkość cząstki  $u' = 0$ , skąd

$$A' = [0, \mathbf{a}'], \text{ gdzie } \mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{u}'}{dt}.$$

$A$  oraz  $A'$  to czterowektory, zatem  $A = \Lambda A'$ . Załóżmy od teraz dla uproszczenia, że wzajemny ruch układów  $S$  oraz  $S'$  odbywa się wzdłuż osi  $x$ , pomijając pozostałe zmienne. Mamy równość:

$$A^T = \gamma \begin{bmatrix} \dot{\gamma}c \\ \dot{\gamma}\mathbf{u} + \gamma\mathbf{a} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & u/c \\ u/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} ua'/c \\ a' \end{bmatrix}.$$

Z powyższej równości dostajemy zależność pomiędzy przyspieszeniami newtonowskimi w układach  $S$  oraz  $S'$ :

$$(6.10) \quad a = \dot{u} = (1 - u^2/c^2)^{\frac{3}{2}} a'.$$

Jesteśmy już gotowi, by zdefiniować relatywistyczny ruch jednostajnie przyspieszony - powiemy, że ciało ma stałe przyspieszenie relatywistyczne, jeśli w każdym chwilowym układzie spoczynkowym  $S'$  ciało doznaje stałego chwilowego przyspieszenia  $a' = const$ . Przykładem jest np. rakieta generująca cały czas ciąg  $g$  - wygodny dla załogi, która cały czas doznaje stałego przyspieszenia odpowiadającego ziemskiej grawitacji. Załóżmy zatem, że  $a'$  jest stałe i korzystając z równości  $a = \dot{u}$ , dostaniemy z równania (6.10) wzór na prędkość widzianą z układu  $S$  ciała jednostajnie przyspieszającego:

$$u = \frac{a'ct}{\sqrt{c^2 + (a')^2t^2}}.$$

Widzimy, że prędkość ciała doznającego stałego przyspieszenia rośnie do prędkości światła. Możemy teraz (ponieważ  $u = \dot{x}$ ) uzyskać równanie w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$x = \frac{c}{a'}(\sqrt{c^2 + (a')^2t^2} - c),$$

gdzie stałą dobraliśmy by uzyskać  $x(0) = 0$ . Otrzymany tor ruchu to hiperbola - w każdym (inercjalnym) układzie odniesienia. Jeśli chcemy sprawdzić to algebraicznie, najłatwiej chyba będzie zmienić stałą w powyższym równaniu by uzyskać  $x = \frac{c}{a'}(\sqrt{c^2 + (a')^2t^2})$  i przekształcić równość do postaci:

$$c^2t^2 - x^2 = -\frac{c^4}{(a')^2}.$$

Widać teraz, że lewa strona powyższego równania jest znanym nam niezmiennikiem.

Łatwo zauważyć (prędkość  $u$  dąży do prędkości światła) że otrzymany tor ruchu ma asymptotę ukośną postaci  $x = ct + b$ . Zauważmy, że asymptota ta jest trajektorią sygnału świetlnego wysłanego w chwili 0 z punktu  $x = b$  - trajektoria ta nie przecina naszej hiperboli co oznacza że ten sygnał świetlny nigdy nie dogoni obiektu poruszającego się po hiperboli. Widzimy w szczególności, że z perspektywy przyspieszającego obiektu światło nie biegnie ze stałą prędkością. Przypominamy sobie w tym momencie, że zasada względności (wielokrotnie przywoływana w tym wykładzie) dotyczy układów inercjalnych. Wspomnianą asymptotę nazwiemy horyzontem zdarzeń - przyspieszający obiekt nigdy nie otrzyma żadnej informacji o zdarzeniach znajdujących się po drugiej stronie horyzontu (jeśli nie przestanie przyspieszać).

