1. Procesy, zestaw I

Zad. 1.1. Pokazać, że jeśli T ma rozkład wykładniczy, to $P(X > t+s|X > s) = P(X > t)$.

Zad. 1.2. Dana jest zmienna losowa T o rozkładzie wykładniczym. Policzyć wartość oczekiwaną zmiennej $\cos(T)$.

Zad. 1.3. Zmienna losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady odpowiednio $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Jaki rozkład ma suma $X + Y$. Czy odpowiedź jest identyczna również w przypadku gdy opuścimy założenie o niezależności.

Zad. 1.4. Dany jest proces

$$U_t = At^2 - 2Bt, \quad t \geq 0,$$

gdzie (A, B) jest wektorem losowym o rozkładzie:

$$P(A = 1, B = -1) = P(A = 1, B = 1) = P(A = -1, B = -1) = P(A = -1, B = 1) = \frac{1}{4}.$$

Narysować dwie przykładowe trajektorie i obliczyć charakterystyki liczbowe procesu.

Zad. 1.5. Dany jest proces:

$$U_t = t^2 - Yt, \quad t \geq 0$$

Znaleźć rozkłady dwuwymiarowe procesu jeśli Y ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu.

Zad. 1.6. Dany jest proces stochastyczny

$$X_t = tU + V, \quad t > 0$$

gdzie U i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z jednakowym parametrem λ. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu X.

Zad. 1.7. Dla procesu X z poprzedniego zadania wyznaczyć rozkłady jednowymiarowe.

Zad. 1.8. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma)$, stała $b \in \mathbb{R}$. Podać gęstości jednowymiarowe i policzyć funkcję kowariancji dla procesu $U_t = Xt + b$, $(t > 0)$.

Zad. 1.9. Dla procesu U z poprzedniego zadania znaleźć rozkłady dwuwymiarowe, wyrazić je za pomocą dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Zad. 1.10. Dany jest proces stochastyczne opisujący drgania sinusoidalne:

$$X_t = U \sin(Vt).$$

Obliczyć wartość oczekiwaną procesu X wiedząc, że wektor (U,V) ma rozkład jednostajny na kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$.