Kartkówka 1 Odpowiedzi

1. **Zad.1**(10 pkt) Niech $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach jednostajnych na $[0,1]$. Definiujemy proces $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ poprzez $X_1 = 1$ oraz

$$X_{n+1} = cos(\frac{\pi}{2} \cdot U_n) \cdot X_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Wyznacz funkcję $E(n) = E(X_n)$ oraz funkcję autokowariancji $\gamma(m,n) = cov(X_m, X_n)$.

Rozwiązanie: W niniejszym rozwiązaniu dla uproszczenia notacji przyjmuję $\prod_{i\in\varnothing} Z_i := 1$, gdzie Z_i to dowolony ciąg. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $X_n = \prod_{i=1}^{n-1} cos(\frac{\pi}{2} \cdot U_i)$, a zatem, ponieważ U_i, $i \in \mathbb{N}$, są i.i.d.,

$$E(X_n) = (E\cos(\frac{\pi}{2} \cdot U_1))^{n-1} = \left(\int_0^1 cos(\frac{\pi}{2}x)dx\right)^{n-1} = (\frac{2}{\pi})^{n-1}.$$

Dalej, dla ustalenia uwagi przyjmujemy $m \le n$, i liczymy:

$$\gamma(m,n) = cov(X_m, X_n) = cov(\prod_{i=1}^{m-1} cos(\frac{\pi}{2} \cdot U_i), \prod_{i=1}^{n-1} cos(\frac{\pi}{2} \cdot U_i)) =$$

$$= E(\prod_{i=1}^{m-1} cos(\frac{\pi}{2}\cdot U_i)\cdot \prod_{i=1}^{n-1} cos(\frac{\pi}{2}\cdot U_i)) - E(m)E(n) = E(\prod_{i=1}^{m-1} cos^2(\frac{\pi}{2}\cdot U_i)\cdot \prod_{i=m}^{n-1} cos(\frac{\pi}{2}\cdot U_i)) - E(m)E(n) = (*)$$

Teraz ponownie można skorzystać z niezależności U_i:

$$(*) = (E[cos^2(\frac{\pi}{2} \cdot U_1)])^{m-1} \cdot (E[cos(\frac{\pi}{2} \cdot U_1)])^{n-m} - E(m)E(n) = (\frac{1}{2})^{m-1} \cdot (\frac{2}{\pi})^{n-m} - (\frac{2}{\pi})^{m+n-2}$$

Uwaga1: Aby policzyć $E[cos^2(\frac{\pi}{2} \cdot U_1)] = \frac{1}{2}$ nie trzeba liczyć dość brzydkiej, w mojej ocenie, całki. Wystarczy zauważyć, że $cos^2 + sin^2 = 1$ oraz $E[cos^2(\frac{\pi}{2} \cdot U_1)] = E[sin^2(\frac{\pi}{2} \cdot U_1)]$ (zmienna losowa $\frac{\pi}{2}U_1$ ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, \pi/2]$)
Uwaga2: zapis odpowiedzi **bez** założenia $m \le n$ wygląda tak:

$$\gamma(m,n) = (\frac{1}{2})^{\min(m,n)-1} \cdot (\frac{2}{\pi})^{|n-m|} - (\frac{2}{\pi})^{m+n-2}$$

Uwaga3: Komentarze do błędów na kartkówkach, które pamiętam:

(a) większość z Państwa źle policzyło $E[cos^2(\frac{\pi}{2} \cdot U_1)]$

(!) X_i w zadaniu **nie** są niezależne

(!!) $E[cos^2(\frac{\pi}{2}U_i)]$ nie jest równe $E[cos(\frac{\pi}{2}U_i)] \cdot E[cos(\frac{\pi}{2}U_i)]$

(!!!) $E[cos(\frac{\pi}{2}U_i)]$ to nie jest to samo co $cos(E[\frac{\pi}{2}U_i)]]$ - operator $E(\cdot)$ jest liniowy, ale wchodzenie z nim pod funkcję $cos(\cdot)$ jest niemal zbrodnicze

2. **Zad.2**(10 pkt) Niech (X, Y) ma rozkład łączny na zbiorze $\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \colon m \geq n\}$, zadany przez

$$P_{(X,Y)}(m, n) = \frac{1}{2^{m+1}}, \ m \geq n$$

gdzie $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, oraz niech $A = \{X + Y \leq 4\}$. Oblicz $E[1_A \cdot X|Y]$.
Rozwiązanie: Na początek warto zauważyć, że zbiór $\{Y \geq 3\}$ jest rozłączny ze zbiorem A, a zatem dla $k \geq 3$ mamy $E[1_A \cdot X|Y = k] = 0$. W efekcie

$$E[1_A \cdot X|Y] = E[1_A \cdot X|Y = 1] \cdot 1_{\{Y=1\}} + E[1_A \cdot X|Y = 2] \cdot 1_{\{Y=2\}}.$$

Liczymy:

$$E[1_A \cdot X|Y = 2] = P(X = 2|Y = 2) \cdot 2 = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots} \cdot 2 = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} \cdot 2 = 1$$

$$E[1_A \cdot X|Y = 1] = P(X = 1|Y = 1) \cdot 1 + P(X = 2|Y = 1) \cdot 2 + P(X = 3|Y = 1) \cdot 3 =$$
$$= \frac{1/4}{1/2} \cdot 1 + \frac{1/8}{1/2} \cdot 2 + \frac{1/16}{1/2} \cdot 3 = \frac{11}{8}.$$

Uwagi do błędów: $E(X|Y)$ nie jest liczbą, lecz zmienną losową (przyjmującą w naszym zadaniu 3 wartości: 0, 1 lub 11/8). Ta zmienna losowa ma postać $E(X|Y) = \varphi(Y)$, gdzie φ jest funkcją określoną na liczbach naturalnych. **Nie** jest prawdą, że $E[1_A \cdot X|Y] = E[1_A \cdot X|Y = 1] + E[1_A \cdot X|Y = 2]$

3. **Zad.3**(15 pkt) Rozważmy standardową prz. probabilistyczną $(\Omega, \Sigma, P) = ([-1, 1]^2, B([-1, 1]^2), L^2)$, gdzie L^2- miara Lebesgue'a na Ω. Niech $X(x, y) = x$ oraz $Y(x, y) = y$. Wyznacz sigma-algebrę Σ_Z generowaną przez wektor $Z = (X, Y^2)$ oraz wyznacz $E(X^3|X, Y^2)$, $E(Y^3|X, Y^2)$, $E(X^3Y^3|X, Y^2)$.

Rozwiązanie: Σ_Z można wyznaczyć, przykładowo, tak:

$$\Sigma_Z = \sigma\{Z^{-1}(A \times B) \colon A, B \in B(\mathbb{R})\} = \sigma\{A \times C \colon A \in B([-1, 1]) \wedge C \in B([-1, 1]) \wedge C = -C\}.$$

Uwaga1: Σ_Z jest generowana przez iloczyny kartezjańskie $A \times B$ (które są elementami $B(\mathbb{R}^2)$), a **nie** przez pary (A, B) (które są elementami $B(\mathbb{R}) \times B(\mathbb{R})$; tymczasem $B(\mathbb{R}^2) = B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R})$)
Uwaga2: Traktując Σ_Z jako najmniejszą $\sigma-$ algebrę zawierającą Σ_X i Σ_{Y^2}, mamy jak powyżej

$$\Sigma_Z = \sigma(\{X \in A \wedge Y^2 \in B\} \colon A, B \in B(\mathbb{R})) = \sigma\{Z^{-1}(A \times B) \colon A, B \in B(\mathbb{R})\},$$

Dalej rozwiązanie: Mamy inkluzje $\Sigma_{X^3} \subset \Sigma_X \subset \Sigma_{X,Y^2}$, a zatem $E(X^3|X, Y^2) = X^3$ oraz $E(X^3Y^3|X, Y^2) = X^3E(Y^3|X, Y^2)$. Pozostaje policzyć $E(Y^3|X, Y^2)$. Naturalny kandydat to $E(Y^3|X, Y^2) = 0$ (antysymetria Y^3 oraz symetria Σ_Z). Sprawdzamy: funkcja stała jest mierzalna względem Σ_Z, zatem pozostaje wykazać, że $\int\limits_{A \times (C \cup -C)} Y^3 dP = 0$ dla $C \in B([0, 1])$. Ale widzimy, że

$$\int\limits_{A \times (C \cup -C)} Y^3 dP = \int\limits_{A \times C} Y^3 dP + \int\limits_{A \times -C} Y^3 dP = \int\limits_{A \times C} Y^3 dP + \int\limits_{A \times C} (-Y)^3 dP = 0$$

4. **Zad.4**(16 pkt) Wykonujemy kolejne rzuty dwiema kostkami sześciennymi aż do momentu, gdy zaobserwujemy, że na obu kostkach (w tym samym rzucie) wypadła parzysta liczba oczek. Czy liczba wykonanych w ten sposób rzutów jest momentem stopu względem filtracji generowanej przez kolejne wyniki rzutów, tj. względem $F_n = \sigma(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n)$, gdzie $(X_i, Y_i)-$ wyniki na obu kostkach w $i-$tym rzucie. Ile wynosi oczekiwana liczba wykonanych rzutów? Ile wynosi oczekiwana suma wszystkich wyrzuconych oczek?

   Rozwiązanie: Definiujemy $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \colon (X_n, Y_n) \in \{2,4,6\}^2\}$. Mamy dla $k \in \mathbb{N}$

$$\{\tau = k\} = \bigcap_{i=1,\dots,k-1} \{(X_i, Y_i) \notin \{2,4,6\}^2\} \cap \{(X_k, Y_k) \in \{2,4,6\}^2\},$$

   gdzie $\bigcap_{i \in \emptyset} \dots := \Omega$. Analogicznie jak na zajęciach pokazujemy że zdarzenie $\{\tau = k\} \in F_k$ (jest to czas pierwszwej wizyty pary (X_n, Y_n) w odpowiednim zbiorze). **Uwaga1**: Nie należy pisać, że τ jest F_k mierzalne - warunek $\{\tau = k\} \in F_k$, $k \in \mathbb{N}$, oznacza co innego.

   Tożsamość Walda: Przy założeniu $E\tau < \infty$, mamy, $ES_\tau = E\tau \cdot E(X_1 + Y_1)$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i)$. Mamy $E[X_1 + Y_1] = 7$. Dodatkowo τ ma rozkład geometryczny o prawd. sukcesu $p = \frac{1}{4}$, stąd $E\tau = 4$ oraz $ES_\tau = 4 \cdot 7 = 28$.

5. **Zad.5**(10 pkt) Niech ciąg X_n będzie i.i.d. o rozkładach wykładniczych z parametrem $\lambda = 1$. Rozważamy filtrację $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ Zdefiniuj ciąg funkcji mierzalnych $H_n \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ taki, że ciąg $Z_n = H_n(X_1, \dots, X_n)$ spełnia następujące warunki:

   - Z_n jest nadmartyngałem, ale nie jest martyngałem, (względem F_n)
   - $\sigma(Z_1, \dots, Z_n) \subsetneq \sigma(Z_1, \dots, Z_{n+1})$

   Odpowiedź uzasadnij.

   Rozwiązanie: Jest wiele przykładów, jeden z najbardziej naturalnych jest taki: $H_n(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i$. Łatwo uzasadnić adaptowalność i całkowalność (część z Państwa o tym zapomniała) oraz kluczowy warunek:

$$E(Z_{n+1} | F_n) = E(Z_n - X_{n+1} | F_n) = Z_n - E[X_{n+1}] = Z_n - 1 < Z_n.$$

   Silna nierówność oraz brak równości uzasadnia kropkę1. Dla uzasadnienia kropki2. (jest to mniej ważna sprawa) wystarczył mi prosty komentarz dotyczący pojawienia się niezależnego od historii czynnika w każdym kroku (nie chciałem by Państwo podawali odpowiedzi w stylu $H_n = -n$, jest to przykład nadmartyngału oczywiście)