Kartkówka 2 Szkic rozwiązań

W poniższych zadaniach W jest standardowym procesem Wienera, natomiast N jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. W zadaniach o procesie Poissona proszę założyć, że wszystkie trajektorie są słabo rosnące oraz prawostronnie ciągłe.

1. (1 pkt) Podpisz każdą kartką z rozwiązaniami imieniem i nazwiskiem.
   Odpowiedź: Łatwe.

2. (10 pkt) Policzyć $P[\{N5 > N_3\} \cup \{N_4 > N_3 + 1\}]$.
   Odpowiedź: Zauważmy, że $\{N_4 > N_3 + 1\} \subset \{N5 > N_3\}$, a zatem
   $$P[\{N5 > N_3\} \cup \{N_4 > N_3 + 1\}] = P[\{N5 > N_3\}] = 1 - P[N_5 - N_3 = 0] = 1 - \exp(-2\lambda).$$

3. (14 pkt) Niech $S > 0$ oraz niech $\tau = \inf\{s \geq S \colon N_s - N_S \geq 2\}$. a) Czy τ jest momentem stopu względem naturalnej filtracji procesu N_t ? b) Znajdź rozkład zmiennej losowej τ.
   Odpowiedź: Zauważamy, że dla $t \leq S$, $\{\tau \leq t\} = \emptyset \in F_t$. Dla $t > S$, tak jak w przykładzie z zajęć pokazujemy:
   $$\{\tau \leq t\} = \{\min\{s \geq S \colon N_s - N_S \geq 2\} \leq t\} = \{N_t - N_S \geq 2\} \in F_t.$$
   Teraz łatwo wyznaczyć dystrybuantę: dla $t \leq S$ mamy $F_\tau(t) = 0$ oraz dla $t > S$:
   $$F_\tau(t) = P[N_t - N_S \geq 2] = 1 - P[N_t - N_S = 0] - P[N_t - N_S = 1] = 1 - \exp(-\lambda(t-s)) - \exp(-\lambda(t-s))\lambda(t-s).$$

4. (8 pkt) Niech $K > 0$. Ile wynosi $\lim_{t \longrightarrow \infty} P(W_t > K \cdot t)$ oraz $\lim_{t \longrightarrow \infty} P(W_t > K \cdot \sqrt{t})$.
   Odpowiedź: Tutaj wykorzystać, że $\frac{W_t}{t}$ ma rozkład $N(0, \frac{1}{\sqrt{t}})$ natomiast $\frac{W_t}{\sqrt{t}}$ ma rozkład $N(0,1)$.

5. (16 pkt) Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera. Rozstrzygnąć, czy następujące procesy również są procesami Wienera.
   (a) $X_t = (W_{t+4} + W_{t+3}) - (W_4 + W_3)$
   (b) $Z_t = 2W_{(t+1)/4} - 2W_{1/4}$

   a) Zauważmy, że $X_1 = W_5 - W_3$ nie ma rozkładu $N(0,1)$, więc nie jest to pr. Wienera
   b) To jest pr. Wienera - sprawdzamy po kolei wszystkie warunkie definicji,nie ma tutaj żadnych pułapek

6. (12 pkt) Znajdź wszystkie A, $B \in R$ takie, że proces $X_t = W_t^2 + At + B$ jest martyngałem - podaj pełne uzasadnienie.
   Odpowiedź: Na początek można zauważyć, że $B \in \mathbb{R}$ (przesunięcie martyngału o stałą jest zawsze martyngałem), następnie jak na zajęciach , wyznaczamy $E[W_t^2|F_s]$ dla $t > s$ co prowadzi nas ostatecznie do $A = -1$.