

1. ZESTAW 15. ŁAŃCUCHY MARKOWA - WPROWADZENIE.

Zad. 1.1. Pokazać, że dowolny ciąg niezależnych zmiennych losowych o wartościach w co najwyżej przeliczalnym zbiorze S tworzy łańcuch Markowa. Przy jakich założeniach łańcuch ten jest jednorodny?

Zad. 1.2. Wielokrotnie rzucamy kostką do gry. Które z poniższych ciągów zmiennych losowych są łańcuchami Markowa? Dla tych, które są łańcuchami Markowa - napisać macierze przejścia.

- Największy numer X_n , jaki się pojawił aż do n -tego rzutu.
- Liczba N_n szóstek w n rzutach.
- W chwili r , czas C_r od ostatniej szóstki.
- W chwili r , czas B_r do następnej szóstki.

Zad. 1.3. Pijana wiewiórka porusza się po wierzchołkach sześciokąta foremnego. Wiemy, że:

- wiewiórka nie jest w stanie ustać w jednym miejscu;
- wiewiórka skacze losowo na punkty sąsiednie (lenistwo) albo najbardziej oddalone (skłonność do ryzyka spowodowana spożyciem alkoholu).

Proszę napisać macierz przejścia dla wiewiórki.

Zad. 1.4. W małym stawie znajdują się dwa wystające z wody kamienie. W chwili $t = 0$ żaba znajduje się na małym kamieniu. Wiemy, że po jednostce czasu żaba skacze z małego kamienia na duży z prawdopodobieństwem $4/5$. Jeśli siedzi na dużym kamieniu, prawdopodobieństwo, że podejmie decyzję o skoku na mniejszy wynosi $1/5$. Policz prawdopodobieństwo, że żaba będzie znajdować się na dużym kamieniu po: 1 jednostce czasu, 2 jednostkach czasu, 3 jednostkach czasu.

Zad. 1.5. W wyniku ocieplenia klimatu poziom wody w stawku u żaby z poprzedniego zadania obniżył się. W związku z tym wynurzyły się z wody trzy nowe kamienie, co zwiększyło możliwości skakania żaby. Rozkład skakania podany jest przez macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 2/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Żaba zaczyna skakać z 3 kamienia. Czy ma szansę doskoczyć na każdy kamień w stawku?

Warto w tym celu narysować odpowiedni graf o 5 wierzchołkach odpowiadających kamieniom z kierunkami skoków żaby. ■