1. Zestaw 16. Łańcuchy Markowa, okresowość, twierdzenie ergodyczne.

Uwaga: Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Niech X będzie nieredukowalnym łańcuchem Markowa o skończonej liczbie stanów . Następujące warunki są równoważne:*

(1) X jest ergodyczny
(2) żaden ze stanów X nie jest okresowy
(3) istnieje nieokresowy stan X

Zadania

(1) W małym stawie znajdują się dwa wystające z wody kamienie. Po jednostce czasu żaba skacze z małego kamienia na duży z prawdopodobieństwem $\frac{4}{5}$. Jeśli siedzi na dużym kamieniu, prawdopodobieństwo że podejmie decyzję o skoku na mniejszy wynosi $\frac{1}{3}$. Nie znamy rozkładu początkowego dla miejsca pobytu żaby, ale wiemy, że po n skokach znajdzie się na małym kamieniu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{9}$. Znajdź rozkład położenia żaby po skoku $n+2$.

1. Rozważmy następującą macierz: $P = \frac{1}{3} \cdot [1, 0, 2; 1, 1, 1; 0, 2, 1]$. Uzasadnij, że jest ergodyczna. Znajdź rozkład stacjonarny.

2. Żaba przeskakuje co minutę pomiędzy kamieniami $1, 2$ i 3, z prawdopodobieństwami zadanymi przez macierz P z poprzedniego zadania. Zakładamy, że żaba jest nieśmiertelna. Podaj przybliżoną wartość wektora prawdopodobieństw jej położenia po 10^{10} minutach. Nie znamy rozkładu początkowego dla położenia żaby.

3.(egz2013) Syzyf wtacza kamien na góre wysokosci 4000 m. Kazdego dnia z równym prawdopodobienstwem udaje mu sie pokonac 1000 m, lub kamien wysuwa sie mu z rak i stacza sie do stóp góry. Jednakze w chwili, gdy dociera do szczytu złosliwy Zeus straca mu kamien na dół. Oszacowac prawdopodobienstwo, ze po wielu dniach pracy Syzyf bedzie znajdował sie dokładnie w połowie góry.

4. Rozważmy nastepującą macierz przejścia $P = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{4}{10}, \frac{6}{10}]$. Wyznacz P^n. Ile wynosi $P(X_n = 2 | X_0 = 1)$, gdzie X_0 jest stanem początkowym łańcucha. Korzystając z postaci macierzy P^n, podaj rozkład stacjonarny.