Zestaw zadań 12.2 (warunkowa wartość oczekiwana)

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną.

zad. 1. Niech $A, B \in \Sigma$. Pokazać, że

$$E(1_A|1_B)(\omega) = \begin{cases} P(A|B), & \text{gdy } \omega \in B, \\ P(A|\Omega \setminus B), & \text{gdy } \omega \notin B \end{cases}$$

dla każdego B takiego, że $P(B) \neq 0$ i $P(B) \neq 1$.

Następujące twierdzenie umożliwia łatwe policzenie warunkowej wartości oczekiwanej w przypadku gdy rozkład łączny wektora (X, Y) jest absolutnie ciągły.

Tw. 1. Załóżmy, że wektor (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości f. Określmy tzw. gęstość warunkową wzorem

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \text{ gdy } f_Y(y) \neq 0 \text{ oraz } f_{X|Y}(x|y) := 0 \text{ w przeciwnym wypadku,}$$

gdzie f_Y jest gęstością zmiennej Y.

Dla funkcji mierzalnej $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachodzi:

$$E(\varphi(X)|Y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_{X|Y}(x|Y) dx.$$

W szczególności:

$$E(X|Y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|Y) dx.$$

zad. 2. Niech $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ z σ-algebrą zbiorów borelowskich, a P niech będzie miarą Lebesgue'a na Ω. Załóżmy, że (ξ, η) mają rozkład o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & \text{gdy } x, y \in [0,1]; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Pokazać, że

$$E(\xi|\eta) = \frac{2 + 3\eta}{3 + 6\eta}.$$

zad. 3. Niech $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ z σ-algebrą zbiorów borelowskich, a P niech będzie miarą Lebesgue'a na Ω. Załóżmy, że (ξ, η) mają rozkład o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & \text{gdy } x, y \in [0,1]; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Znaleźć $E(\xi|\eta)$.

Przypomnijmy, że definicja warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej X pod warunkiem zmiennej Y zależy tylko od σ-algebry generowanej przez Y, dlatego możemy postawić następną definicję.

Definicja 1. Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową. Niech $\mathcal{F} \subset \Sigma$ będzie pewną σ-algebrą. Wtedy warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej X pod warunkiem σ-algebry $\mathcal{F}$ nazywamy taką zmienną losową $E(X|\mathcal{F})$ która spełnia dwa warunki

(i) $E(X|\mathcal{F})$ jest $\mathcal{F}$ mierzalna;

(ii) $E\big(1_B E(X|\mathcal{F})\big) = E(1_B X)$ dla dowolnego $B \in \mathcal{F}$.

zad. 4. Niech T_1 i T_2 będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o parametrze 2. Wiedząc, że

$$E(T_1^2|T_1+T_2) = \frac{1}{3}(T_1+T_2)^2$$

obliczyć $E(T_1T_2|T_1+T_2)$.

zad. 5. Niech $T_1, \ldots, T_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym o parametrze 2. Określmy

$$T = T_1 + \ldots + T_n.$$

Obliczyć $E(T_1|T)$ oraz $E(T|T_1)$.

zad. 6. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Obliczyć $E((X+Y)^2|X)$.

zad. 7. Kupujemy Y kuponów loterii, gdzie zmienna Y ma rozkład Poissona o parametrze λ. Każdy kupon może wygrać nagrodę z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Znaleźć warunkową wartość oczekiwaną liczby wygranych nagród X pod warunkiem liczby zakupionych kuponów Y. Obliczyć wartość oczekiwaną EX.

zad. 8. W zadanej chwili, na moście znajduje się N ciężarówek. Niech Y_i oznacza ciężar i-tej ciężarówki, a X oznacza całkowity ciężar ciężarówek na moście. Pokazać, że jeśli zmienne losowe N oraz wszystkie Y_i są niezależne, $E(Y_i) = m$, natomiast $E(N) = n$, to wtedy $E(X) = mn$.

zad. 9. Liczba błędów jakie robi maszynistka na każdej stronie maszynopisu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona o parametrze λ, niezależną dla każdej strony. Trzystronnicowy artykuł jest przepisywany przez jedną z czterech maszynistek, dla których wartości λ wynoszą odpowiednio 1, 2, 3 i 4. Maszynistka jest wybrana losowo z jednakowym prawdopodobieństwem. Jaka jest oczekiwana ilość błędów w całym artykule?

zad. 10. W czasie polowania lwicy udało się upolować dwie gazele. Większą z nich („lwią część”) zjadł w całości samiec, który nadszedł po skończonych łowach, lwica zaś pożarła mniejszą z gazeli, również całą. Zakładając, że waga gazeli jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale [60 kg, 80 kg], i że ciężary obu gazeli są niezależne od siebie, znajdź $E(X|Y)$, gdzie X jest wagą porcji zjedzonej przez lwa, zaś Y przez lwicę.

zad. 11. Niech $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ i niech $P = dxdy$ będzie miarą Lebesgue'a. Niech $X(x,y) = x$ oraz $Y(x,y) = y$. Policzyć $E[f(X,Y)|\mathcal{G}]$ gdy

1. $f(x,y) = x, \mathcal{G} = \sigma(Y)$;
2. $f(x,y) = x^2y, \mathcal{G} = \sigma(Y)$;
3. $f(x,y) = x - y, \mathcal{G} = \sigma(X+Y)$.

zad. 12. Na $\Omega = [0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a. Niech Y będzie zmienną losową symetryczną względem osi $x = \frac{1}{2}$ (tj. spełniającą warunek $Y(x) = Y(1-x)$), oraz taką, że $Y|_{[0,\frac{1}{2}]}$ jest homeomorfizmem na obraz. Pokazać, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X,

$$E[X|Y](x) = \frac{X(x) + X(1-x)}{2}, \quad x \in \Omega.$$

Uogólnij zadanie na przypadek $\Omega = [a,b]$.

---

zad. 13. Niech X, Y i Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ, μ i ν. Znaleźć $P[X < Y < Z]$.