Rachunek Prawdopodobieństwa 2, 18.05.2015.
Zestaw zadań numer 13 (martyngały)

Zad.1 Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz ciąg zmiennych losowych $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pokazać, że $\Sigma_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ jest najmniejszą filtracją, względem której ciąg $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest adaptowany, tzn. jeśli ciąg ten jest adaptowany względem jakiejś filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to $\Sigma_n \subset \mathcal{F}_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zad.2 Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P). Pokazać, ze jeżeli ξ_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$, to $E(\xi_n) = E(\xi_0)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zad.3 Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P). Pokazać, ze jeżeli ξ_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$, to jest on też martyngałem względem filtracji $\Sigma_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Zad.4 Niech $\eta_1, \eta_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach

$$P(\eta_n = 1) = P(\eta_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Niech ξ_n oznacza symetryczne błądzenie losowe, tzn. $\xi_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$. Zbadać, czy następujące ciągi zmiennych losowych są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F}_n := \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$:
(a) $X_n = \xi_n$
(b) $Y_n = \xi_n^2 - n$

Zad.5 Przy oznaczeniach, jak w poprzednim zadaniu, zbadać czy ciągi zmiennych losowych są martyngałami:
(a) $Z_n = (-1)^n \cos(\pi\xi_n)$
(b) $S_n = \eta_1 + 2\eta_2 + \ldots + n\eta_n$;

Zad.6 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej. Niech $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Czy ciąg S_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$?

Zad.7 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o niezerowych wartościach oczekiwanych $EX_n = \mu_n$. Niech

$$Y_n = \frac{X_1}{\mu_1} \cdot \frac{X_2}{\mu_2} \cdot \ldots \cdot \frac{X_n}{\mu_n}$$

Pokazać, że ciąg Y_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Zad.8 Gra „Teraz czerwony” może być rozgrywana przez pojedynczego gracza grającego dobrze potasowaną talią 52 kart. W chwilach $n = 1, 2, \ldots, 52$ kolejno odkrywamy karty z talii, aby zaobserwować ich kolor. Dokładnie raz, w trakcie całej gry, gracz ma, tuż przed odsłonięciem wybranej karty powiedzieć „teraz czerwone”. Gracz wygrywa, jeśli wybrana karta okaże się być czerwona. Niech R_n oznacza liczbę czerwonych kart wśród kart jeszcze nie odsłoniętych po odsłonięciu n-tej karty z talii. Pokazać, że

$$X_n := \frac{R_n}{52 - n}, \qquad 0 \le n \le 52$$

określa martyngał.

Zad.9 Niech X będzie zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej. Niech $(\mathcal{F}_n)$ oznacza filtrację. Czy ciąg (X_n) zadany przez $X_n = E[X|\mathcal{F}_n]$ jest martyngałem?

Zad.10 Niech (ξ_n) będzie martyngałem oraz niech $E\xi_n^2 < \infty$. Zbadać, czy zadane poniżej procesy są submartyngałami:
(a) $X_n = |\xi_n|$
(b) $Y_n = \xi_n^2$
(c) $Z_n = \xi_n^+$

Zad.11 Niech (Y_n) będzie martyngałem. Niech $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą dla której proces $(g(Y_n))$ jest całkowalny. Czy $(g(Y_n))$ jest submartyngałem?