1 Zestaw 14. Martyngały, podmartyngały.

zad. 1.1. Niech $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie podmartyngałem. Pokazać, że X jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$, $n \in \mathbb{N}$.

zad. 1.2. Niech Z_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i zerowej wartości oczekiwanej. Niech

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_{k-1} \cdot Z_k.$$

Udowodnić, że $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem względem $(\sigma(Z_1, \ldots, Z_n))_{n=1}^{\infty}$.

zad. 1.3. Niech $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem ograniczonych niezależnych zmiennych losowych. Podaj warunek konieczny oraz wystarczający, by proces $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ był supemartyngałem, gdzie $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} Y_i$.

zad. 1.4. Czy istnieje (X_1, X_2, X_3) martyngał taki, że X_i przyjmuje z dodatnimi prawdopodobieństwami tylko wartości całkowite od 0 do i? Uzasadnić odpowiedź negatywną, lub podać przykłąd dla pozytytwnej.

zad. 1.5. Niech X_n oraz Y_n będą podmartyngałami względem tej samej filtracji F_n. Pokazać, że ciąg $Z_n = \max(X_n, Y_n)$ też jest podmartyngałem względem filtracji F_n.

zad. 1.6. Niech X_n będzie całkowalnym słabo rosnącym ciągiem zmiennych losowych (tzn. $P(X_{n+1} \geq X_n) = 1$). Pokaż, że X_n jest martyngałem wtw gdy spełnia $P(X_{n+1} = X_n) = 1$.

zad. 1.7. Wyścig kolarski, w którym uczestniczy 100 kolarzy rozgrywany jest według następujących reguł: po k-tym etapie wszyscy kolarze, którym udało się zmieścić w pierwszej dziesiątce na wszystkich k etapach otrzymują 10^k \$. Pokazać, że suma nagród, które organizatorzy muszą ufundować po k-tym etapie jest martyngałem względem filtracji generowanej przez obserwacje wyników etapów. Uwaga: zakładamy, że wszyscy kolarze prezentują jednakowy i stały poziom.

zad. 1.8 (E2005)**.** *Szkarłatne monstrum.* Szukając bezskutecznie miejsca, gdzie mógłby wydać na świat potomstwo, Ixtl, ostatni ze swojego gatunku, porusza się w nieskończonym kosmosie, w którym galaktyki numerowane są przez astronomów liczbami całkowitymi, rozpoczynając swoją odyseję w galaktyce o numerze 0 i przenosząc się co milion lat do galaktyki o numerze o jeden większym z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$ lub do galaktyki o numerze o jeden mniejszym z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Niech S_n oznacza numer galaktyki, w której znajduje się Ixtl po $n \cdot 10^6$ latach tułaczki. Zakładając, że Ixtl każdą kolejną wędrówkę wykonuje niezależnie od pozostałych, sprawdź dla jakich $a > 0$ ciąg zmiennych losowych $(a^{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji odpowiadającej podróży samotnego Ixtla w bezkresnej przestrzeni i w czasie mierzonym milionami lat.