Rachunek Prawdopodobieństwa 2. Zestaw 1.

1. Podaj (wraz z uzasadnieniem) przykład przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) oraz funkcji $X : \Omega \longrightarrow R$, takich, że X nie jest zmienną losową.

2. Podaj przykład (wraz z uzasadnieniem) dystrybuanty rozkładu, który nie jest ani dyskretny ani ciągły.

3. Znaleźć zmienne losowe X oraz Y takie, że ich rozkłady są asbolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$ (równoważnie: ich rozkłady mają gęstości) ale rozkład łączny wektora (X, Y) nie jest absolutnie ciągły (tzn. nie istnieje (dwuwymiarowa) gęstość rozkładu łącznego).

4. Rozstrzygnij: Czy jeśli rozkłady wektorów $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ oraz $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ są równe, czy ich rozkłady brzegowe P_{X_i} oraz P_{Y_i} muszą być sobie równe?

5. Ile wynosi wartość oczekiwana zmiennej danej wzorem

$$Y = \begin{cases} X, \ |X| > 1 \\ -X, \ |X| \leqslant 1 \end{cases},$$

gdzie X ma: a) rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, b) standardowy rozkład normalny.

6. Na płaszczyźnie mamy pierścień ograniczony współśrodkowymi okręgami o promieniach 1 i 3. Wybieramy z niego losowo punkt (zgodnie z rozkładem jednostajnym na całej jego powierzchni). Obliczyć wartość oczekiwaną odległości wybranego punktu od środka tego pierścienia.

7. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy punkt x zgodnie z rozkładem jednostajnym, dzieląc tym samym ten odcinek na dwie części. Oblicz oczekiwany stosunek długości: a) dłuższego odcinka do krótszego, b) odcinka po lewej stronie punktu do odcinka po prawej stronie punktu x.

8. Rzucamy 100 razy szescienna kostka do gry. a)Uzywajac nierównosci Czebyszewa, oszacuj z góry prawdopodobienstwo, ze suma wyrzuconych oczek wynosi co najmniej 200. Ocen użyteczność uzyskanego wyniku. b) Uzywajac nierównosci Czebyszewa, oszacuj z dolu prawdopodobienstwo, ze suma wyrzuconych oczek wynosi co najmniej 200.

9. Udowodnij regułę trzech sigm: $P(|X - EX| > 3\sigma) < \frac{1}{9}$, gdzie σ to skończone odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

10. Dlugość rozmowy telefonicznej pracowników w pewnej firmie ma rozkład normalny o średniej 10 min i odchyleniu 4 min. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pracownik będzie rozmawiał dłużej niż 15 min? (tablice dystrybuanty)

11. Zmienna losowa X ma rozklad normalny o wartosci oczekiwanej 4 i wariancji 256. Ile wynosi $P(X \in (-4, -2))$? A ile wynosi $P(X \in (-4, -2) \cup (-1, 1))$? (tablice dystrybuanty)