Zestaw zadań numer 10 (Prawa wielkich liczb oraz estymatory)

Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samych rozkładzie P_α. Mówimy, że estymator $\hat{\alpha}_n = \alpha_n(X,1\ldots,X_n)$ parametru α jest:

(1) nieobciążony, gdy $E(\hat{\alpha}_n) = \alpha,\ n \in \mathbb{N}$,

(2) asymptotycznie nieobciążony, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\alpha}_n) = \alpha$

(3) zgodny, gdy $\hat{\alpha}_n \to \alpha$ (słabo zgodny gdy zbieznosc jest stochastyczna, silnie zgodny gdy zbieżnosc jest prawie wszedzie, zazwyczaj zgodnosc oznacza słabą zgodnosc)

Uwaga: Z dwóch estymatorów nieobciążonych estymator o mniejszej wariancji nazywamy efektywniejszym. Dlaczego?

Zad.1 Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (w skrócie *i.i.d.*) oraz niech $P[X_1 \neq 0] > 0$. Pokazać, iż $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest rozbieżny prawie na pewno.

Zad.2 Czy estymator wartosci oczekiwanej $\mu < \infty$ zadany wzorem $\bar{X}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ jest zgodny oraz nieobciązony? Ile wynosi wariancja tego estymatora?

Zad.3 Niech $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem i.i.d. o znanej wartości oczekiwanej $\mu = E(X_1)$ oraz skonczonej wariancji. Czy estymator wariancji dany wzorem

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

jest zgodny oraz nieobciążony?

Zad.4 Niech $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem i.i.d. o nieznanej wartości oczekiwanej $\mu \in \mathbb{R}$ i oraz skonczonej wariancji σ^2. Niech

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Pokazać, iż: (a) $\sigma^2 = E[\sigma_n^2]$ (dla $n \in \mathbb{N}$), (b) $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2 = \sigma^2$ (p.n.).

Zad.5 Niech $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem i.i.d. o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Czy estymator

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

parametru λ jest zgodny? (Czy jest nieobciążony? - dla chętnych)

Zad.6 Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{N}$ będzie zmienną losową. Definiujemy $p_i = P(X=i)$, $i \in \mathbb{N}$. Podaj przykład estymatora parametru p_1, który jest zgodny i nieobciążony.

Zad.7 Wykonujemy kolejne rzuty sfalszowaną szescienną kostką, na której prawdopodobienstwo wypadniecia szóstki wynosi $\frac{1}{6}+\epsilon$, prawdopodobienstwo wypadniecia jedynki wynosi $\frac{1}{6}-\epsilon$, a pozostale oczka wypadaja z jednakowym prawdpodobienstwem. Podaj zgodny oraz nieobciazony estymator parametru ϵ, oblicz jego wariancję.

Zad.8 Zbadaj zgodnosc oraz nieobciązonosc estymatorów:

a) $(n+1)\min(X_1,\ldots,X_n)$, b) $2\cdot\bar{X}_n$ (2* srednia z próby), c) $\max(X_1,\ldots,X_n)$,
parametru α w rozkladzie jednostajnym na zbiorze $[0,\alpha]$.

Zad.9 Dla $x \in [0,1]$, niech $S_n(x)$ oznacza liczbę wystąpień cyfry 1 na pierwszych n miejscach po przecinku w rozwinięciu liczby x w systemie dwójkowym (względem podstawy 2). Pokazać, iż

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

dla prawie każdego x (względem miary Lebesgue'a na [0,1]).

Zad.10 Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem i.i.d. oraz niech $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ będą takie, że $P[X_1 \in B] \neq 0$. Niech $S_n := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i\in B\}}$ oraz $R_n := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \in A\cap B\}}$. Czy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{S_n+1} = P[A|B]$$

z prawdopodobieństwem 1?