Zestaw zadań 11.3 (Warunkowa wartość oczekiwana)

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 1. Niech $A \in \Sigma$ będzie taka, że $P(A) > 0$. Niech X będzie zmienną losową na Ω.

Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej X pod warunkiem zdarzenia A nazywamy wartość oczekiwaną zmiennej X na przestrzeni $(\Omega, \Sigma, P(\cdot|A))$, tzn

$$E(X|A) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega|A)$$

W szczególności, jeżeli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o różnych wartościach $x_1, x_2, \ldots$ to

$$E(X|A) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i|A)$$

zad. 1. Niech $A \in \Sigma$ będzie taki, że $P(A) > 0$. Niech $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym o różnych wartościach $x_1, x_2, \ldots$ oraz $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną Pokazać, że

$$E(\varphi(X)|A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i) P(X = x_i|A),$$

zad. 2. Niech $A \in \Sigma$ będzie taka, że $P(A) > 0$. Niech X będzie zmienną losową na Ω. Pokazać, że

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A X \, dP$$

zad. 3. Znaleźć warunkową wartość oczekiwaną $E(X|B_i)$, gdy X jest sumą oczek jakie wypadną na kostce w dwóch rzutach, a B_i zdarzeniem, że za pierwszym razem wypadło i oczek.

zad. 4. Niech zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o parametrze 1. Znaleźć

$$E(X|\{X \geq t\}).$$

Definicja 2. Niech X będzie zmienną losową na Ω, zaś Y zmienną losową o rozkładzie dyskretnym przyjmującą różne wartości $y_1, y_2, \ldots$ Wtedy warunkową wartością oczekiwaną X pod warunkiem **zmiennej** Y nazywamy **zmienną losową** daną wzorem

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y_i) \text{ gdy } Y(\omega) = y_i$$

Równoważnie:

$$E(X|Y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} E(X|Y = y_i) \cdot 1_{\{Y = yi\}}.$$

zad. 5. Znaleźć $E(X|Y)$, gdy
(i) rzucamy dwa razy kostką; Y jest wynikiem w pierwszym rzucie, a X sumą obu wyników.
(ii) rzucamy trzema monetami: jedno, dwu i pięcio-złotową, możemy zabrać te monety, na których wypadła reszka; X jest sumą złotych jakie zabieramy, a Y jest ilością reszek jaki wypadły.
(iii) z torby zawierającej cztery kule ponumerowane 1,2,3 i 4 losujemy dwie, jeśli choć jeden z wylosowanych numerów jest większy od 2, to wygrywamy 10 złotych, a w przeciwnym razie przegrywamy 10 złotych; X opisuje wygraną sumę, a Y będzie numerem na pierwszej wylosowanej kuli.

zad. 6. Znaleźć i porównać σ-algebry generowane przez Y oraz $E(X|Y)$, gdy
(i) rzucamy dwa razy kostką; Y jest wynikiem w pierwszym rzucie, a X sumą obu wyników.
(ii) rzucamy trzema monetami: jedno, dwu i pięcio-złotową, możemy zabrać te monety, na których wypadła reszka; X jest sumą złotych jakie zabieramy, a Y jest ilością reszek jaki wypadły.
(iii) z torby zawierającej trzy kule ponumerowane 1,2,3 i 4 losujemy dwie, jeśli choć jeden z wylosowanych numerów jest większy od 2, to wygrywamy 10 złotych, a w przeciwnym razie przegrywamy 10 złotych; X opisuje wygraną sumę, a Y będzie numerem na pierwszej wylosowanej kuli.

zad. 7. Pokazać, że

$$\Sigma_{E(X|Y)} \subset \Sigma_Y$$

dla warunkowej wartości oczekiwanej zdefiniowanej definicją **??**.

zad. 8. Dla warunkowej wartości oczekiwanej określonej definicją **??** pokazać, że dla dowolnego $B \in \Sigma_Y$

$$\int_B E(X|Y)\, dP = \int_B X\, dP$$

Definicja 3. Niech X, Y będą dowolnymi zmiennymi losowymi na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P).

Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej X pod warunkiem zmiennej Y nazywamy zmienną losową oznaczaną $E(X|Y)$ spełniającą warunki

(i) $\Sigma_{E(X|Y)} \subset \Sigma_Y$

(ii) $\displaystyle\int_B E(X|Y)\, dP = \int_B X\, dP \quad \forall\, B \in \Sigma_Y.$

Uwaga: Powyższa definicja jest wyznaczona przez zmienną losową X oraz sigma-ciało Σ_Y. Stąd, warunkowa wartość oczekiwana może być analogicznie zdefiniowana dla zmiennej losowej X oraz dowolengo sigma-ciała Σ.

Tw. 1. Jeżeli $E|X| < \infty$, to zmienna losowa $E(X|Y)$ istnieje i jest wyznaczona z dokładnością do zbiorów miary zero.

zad. 9. Jeśli nie było dowodu na wykładzie, udowodnij jedyność warunkowej wartości oczekiwanej (z dokładnością do zbiorów miary zero), tzn. pokaż że dowolne dwie zmienne Z_1 i Z_2 spełniające warunki definicji, muszą spełniać $P(Z_1 = Z_2) = 1$.

zad. 10. Pokaż, że: a) Jeśli X jest mierzalna względem Σ_Y, wtedy $E(X|Y) = X$
b)Jeśli X jest niezależna względem Σ_Y (X i Y niezależne), wtedy $E(X|Y) = E(X)$ (prawie wszędzie)
c) Jeśli $X \geq Z$, wtedy $E(X|Y) \geq E(Z|Y)$
d) Pokaż że funkcja przyporządkowująca całkowalnej zmiennej losowej X warunkową wartość $E(X|Y)$ jest liniowa.
e) Pokaż, że $E(X) = E(E(X|Y))$
f) Udowodnij prawo wieży: dla dowolnych sigma-ciał spełniających $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$
mamy

$$E(X|\Sigma_1) = E(E(X|\Sigma_2)|\Sigma_1) = E(E(X|\Sigma_1)|\Sigma_2).$$

g) Pokaż, że jeśli Y jest Σ_Z- mierzalna, wtedy $E(XY|Z) = Y \cdot E(X|Z)$.

zad. 11. a) Pokaż, że jeśli $A \in \Sigma_Y$ oraz każdego dla $\omega \in A$ mamy $X(\omega) = \varphi(Y(\omega))$, to wtedy $E(X|Y)(\omega) = \varphi(Y(\omega))$ dla prawie każdego $\omega \in A$.
b) Zauważ, że dla stałej c zmienna losowa $E(X|Y)$ jest stała na zbiorze $\{w\colon Y(w) = c\}$ (z dokładnością do zbiorów miary zero). Przy założeniu $P(Y = c) > 0$ pokaż, że

$$E(X|Y)(w) = E(X|\{Y = c\}) \text{ dla prawie każdego } \omega \in \{\omega\colon Y(\omega) = c\}.$$

c) Podaj kontrprzykład stwierdzający, że własość z podpunktu a) nie musi zachodzić bez założenia $A \in \Sigma_Y$

zad. 12. Niech $\Omega = [0,1]$ z σ-algebrą zbiorów borelowskich, a P niech będzie miarą Lebesgue'a na Ω. Znaleźć $E(X|Y)$ jeżeli
(i) $X(\omega) = 2\omega$, $Y(\omega) = 2$;
(ii) $X(\omega) = 2\omega$, $Y(\omega) = 0$, gdy $\omega \in [0, 1/2)$ i $Y(\omega) = 1$ dla $\omega \in [1/2, 1]$;
(iii) $X(\omega) = 2\omega$, $Y(\omega) = \omega^2$;
(iv) $X(\omega) = 2\omega$, $Y(\omega) = \omega$, gdy $\omega \in [0, 1/2)$ i $Y(\omega) = 1/2$ dla $\omega \in [1/2, 1]$;
(v) $X(\omega) = 2\omega - 1 + |2\omega - 1|$, $Y(\omega) = 1 - |2\omega^2 - 1|$ (zadanie nieobowiązkowe);
(VV) $X(\omega) = 2\omega - 1 + |2\omega - 1|$, $Y(\omega) = 1 - |2\omega - 1|$;
(VVV) $X(\omega) = 2\omega - 1 + |2\omega - 1|$, $Y(\omega) = 1 - |2\omega - 1|$ **przy założeniu** $\Omega = [0, 2]$
(vi) $X(\omega) = 1 - \omega$, $Y(\omega) = 0$, gdy $\omega \in [0, 1/2)$ i $Y(\omega) = 1$ dla $\omega \in [1/2, 1]$;
(vii) $X(\omega) = 1 - \omega$, $Y(\omega) = 0$, gdy $\omega \in [0, 1/2)$ i $Y(\omega) = \omega$ dla $\omega \in [1/2, 1]$.