Z zestawu 1 zostały zadania: 2,3,4,5,6,8b)

**Rachunek Prawdopodobieństwa 2. Zestaw 2.**

1. Zmienna losowa $X$ ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,2]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = \min\{X, X^2\}$.

2. W urnie znajdują się: 3 kule białe, 3 kule czarne oraz 2 kule niebieskie. Losujemy kolejno bez zwracania po dwie kule aż do momentu gdy po raz pierwszy wylosujemy kulę czarną. Oblicz oczekiwaną liczbę losowań oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej oznaczającej liczbę losowań.

3. Zmienne losowe $X, Y, Z$ są niezależne. Zmienna $X$ ma rozkład dwuwpunktowy Bernoullego $P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{3}{4}$, zmienna losowa $T$ jednostajny na przedziale $[-1,1]$ zaś $Z$ jednostajny na przedziale $[0,2]$. Znaleźć rozkład zmiennej $W = XY + (1-X)Z$.

4. Niech $X$ będzie zmienną losową o dystrybuancie
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \leqslant -\pi/2 \\ C_1 \cdot \sin(x) + C_2, & \text{dla } x \in (-\pi/2, \pi/2] \\ 1, & \text{dla } x > \pi/2 \end{cases} \quad ;$$
gdzie $C_1$, $C_2$ to pewne stałe rzeczywiste. Wyznacz wartości stałych $C_1$ oraz $C_2$. Znajdź gęstość zmiennej losowej $X$.

5. Osoby A i B umówiły się na spotkanie. Osoba A przychodzi w losowo (w sposób jednorodny) wybranym momencie pomiędzy godziną 14 a 15. Osoba B z szansą 50% przychodzi o 14, a z szansą 50% w losowo (w sposób jednorodny) wybranym momencie pomiędzy godziną 14 a 15. Oblicz wartość oczekiwaną długości czasu, który osoba, która przyjdzie pierwsza, spędzi czekając na drugą.

6. Dane są niezależne zmienne losowe: $X$ o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$ oraz zmienna losowa $Y$ o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $\{-1, 0, 1\}$.
   (a) Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej $Z = X + Y$.
   (b) Czy rozkład ten jest ciągły? Odpowiedź uzasadnić.

7. Prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwego detalu wynosi $0,05$. Ile detali powinna wyprodukowac fabryka, aby z prawdopodobieństwem równym co najmniej $0,9$ przynajmniej 100 spośród nich nie było wybrakowanych. Podaj oszacowanie w oparciu o nierówność Czebyszewa.

8. Zmienna losowa $X$ ma dystrybuantę $F_X$.
   a) Pokaż, że jeśli rozkład $X$ posiada gestosc $f_X$ ktora jest funkcją parzystą to dystrybuanta $F_X$ spelnia $F_X(t) + F_X(-t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$
   b) Pokaż, że jeśli rozkład $P_X$ jest symetryczny względem zera (tzn. $P(X \in A) = P(X \in -A)$) oraz nie ma punktów skokowych, to dystrybuanta $F_X$ spelnia $F_X(t) + F_X(-t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.
   c)Uogólnij poprzedni podpunkt na przypadek gdy rozkład $P_X$ jest symetryczny względem $m \in \mathbb{R}$ oraz nie ma punktów skokowych.

9. Zmienna losowa $X$ ma rozklad $N(m, \sigma)$. Policzyć: $P(X \in (m \in \sigma, m+\sigma))$, $P(X \in (m-2\sigma, m+2\sigma))$, $P(X \in (m-3\sigma, m+3\sigma))$.