

Rachunek Prawdopodobieństwa 2. Zestaw 3

1. Wiemy, że jeżeli $X_n \xrightarrow{s} X$, to $X_n \xrightarrow{d} X$. Pokazać na przykładzie, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi.
2. Pokazać, że jeżeli $X_n \xrightarrow{L^1} X$, to $X_n \xrightarrow{s} X$. Pokazać na przykładzie, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi.
3. Udowodnić, że jeżeli ciąg zmiennych X_n zmierza do zmiennej losowej X stochastycznie, natomiast $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, to

$$aX_n + b \xrightarrow{P} aX + b.$$

4. Czy prawdziwa jest implikacja: jeżeli ciąg zmiennych X_n zmierza do zmiennej losowej X stochastycznie, natomiast $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ oraz $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$, to

$$a_n \cdot X_n + b_n \xrightarrow{P} aX + b.$$

5. Udowodnić, że jeżeli ciąg zmiennych X_n zmierza do zmiennej losowej X według rozkładów, natomiast $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, to

$$aX_n + b \xrightarrow{d} aX + b.$$

6. Czy prawdziwa jest implikacja: jeżeli ciąg zmiennych X_n zmierza do zmiennej losowej X według rozkładów, natomiast $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ oraz $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$, to

$$a_n \cdot X_n + b_n \xrightarrow{d} aX + b.$$

7. Pokaż że istnieje ciąg zmiennych losowych X_n zbieżny według prawdopodobieństwa do zmiennej losowej X ale nie zbieżny do niej prawie na pewno.
8. Pokazać, że jeśli zmienna losowa $X : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ ma rozkład **jednopunktowy**, to zachodzi: $X_n \rightarrow X$ wg rozkładów (słaba zbieżność) $\Leftrightarrow X_n \rightarrow X$ wg prawdopodobieństwa (dla dowolnego ciągu zmiennych losowych X_n)
9. Pokazać, że jeśli zmienna losowa $X : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ jest określona na przestrzeni probabilistycznej dyskretnej, to zachodzi $X_n \rightarrow X$ prawie na pewno $\Leftrightarrow X_n \rightarrow X$ wg prawdopodobieństwa (dla dowolnego ciągu zmiennych losowych X_n)
10. Pokazać, że jeśli ciąg zmiennych losowych $X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ jest malejący (tzn. $P(X_{n+1} \leq X_n) = 1$), to $X_n \rightarrow X$ prawie na pewno $\Leftrightarrow X_n \rightarrow X$ wg prawdopodobieństwa (dla dowolnego ciągu zmiennych losowych X_n).