Rachunek Prawdopodobieńtwa 2. Zestaw 4.2

1. Pokaż, że granica ciągu zbieżnego stochastycznie jest wyznaczona z dokładnością do zbiorów miary zero, tzn. jeśli $X_n \xrightarrow{s} X$ oraz $X_n \xrightarrow{s} Y$ to $X = Y \ \ p.w.$ (prawie wszędzie).

2. Pokaż, że dla niezależnych zmiennych losowych $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ oraz funkcji Borelowskiej $T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takiej że zmienna losowa $T(X,Y)$ jest całkowalna, zachodzi

$$E(T(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^m} E(T(x,Y))dP_X(x).$$

   Czy założenie niezależności jest istotne?

   Wnioskiem z Zadania 2 jest poniższe zadanie:

3. Pokaż, że dla niezależnych zmiennych losowych $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$, funkcji Borelowskiej $T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz zbioru Borelowskiego $B \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$P(T(X,Y) \in B) = \int_{\mathbb{R}^m} P(T(x,Y) \in B)dP_X(x).$$

   Uwaga: Rozważając $T(x,y) = x + y$, uzyskujemy wzór na splot rozkładów P_X i P_Y.
   Wniosek: Dystryuanta F zmiennej $T(X,Y)$ spełnia:

$$F(t) = P(T(X,Y) \leqslant t) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} P(T(x,Y) \leqslant t)dP_X(x).$$

4. Pokaż, że zmienna losowa X jest całkowalna (tzn. $E|X| < \infty$) wtw gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \Sigma \ \ P(A) < \delta \Longrightarrow \int\limits_A |X|dP < \epsilon.$$

5. Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą całkowalne. Pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{L_1} X$, to $EX_n \to EX$. Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna?

6. Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą zm. losowymi ze skończoną wariancją. Pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{L_2} X$, to $D^2 X_n \to D^2 X$. Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna?

7. Pokaż, że jeśli $D^2 X_n \to 0$ oraz $EX_n \to c$ to zachodzi $E(X_n - a)^2 \to 0$.