Zestaw 5
Funkcje charakterystyczne

12 marca 2015

Niech $\varphi_X(t) = Ee^{itX}$, $\in \mathbb{R}$ oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Udowodnij następujące własności:
   (a) $\varphi_X(0) = 1$
   (b) $|\varphi_X(t)| \leqslant 1$ dla każdego t
   (c) $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(-t)}$
   (d) φ_X przyjmuje tylko wartości rzeczywiste $\Leftrightarrow$ X ma rozkład symetryczny (tzn: $P_X(C) = P_X(-C)$, $C \in B(\mathbb{R})$)
   (e) φ_X jest jednostajnie ciągła

   Wskazówka do 1(b): wykorzystaj (i uzasadnij) fakt, że $(EX)^2 \leqslant E(X^2)$
2. Znajdź funkcję charakterystyczną dla rozkładu dyskretnego
3. Znajdź funkcję charakterystyczną rozkładu Bernoullego
4. Znajdź funkcję charakterystyczną dla rozkładu Poissona
5. Znajdź funkcję charakterystyczną dla rozkładu jednostajnego na $[-1, 1]$
6. Dla jakich wartości a, b funkcja charakterystyczna dla rozkładu jednostajnego na $[a, b]$ przyjmuje tylko wartości rzeczywiste?
7. Niech X ma gęstość $f_X(x) = (1 - |(x)|) \cdot 1_{[-1,1]}(x)$. Policz φ_X.
8. Znajdź funkcję charakterystyczną dla rozkładu wykładniczego
9. Znajdź φ_{aX+b}, gdzie $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
10. Pokaż, że jeśli X_n zbiega do X według rozkładów, to $a_nX_n + b_n$ zbiega wg rozkładów do $aX + b$, gdzie $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$.
11. Znajdź gęstość sumy niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$.
12. Czy prawdziwa jest implikacja: jeśli X ma rozkład normalny oraz Y ma rozkład normalny więc $X + Y$ ma rozkład normalny. ?
13. Niech X_n ma rozkład Poissona o parametrze λ_n oraz X ma rozkład Poissona o parametrze λ. Pokaż, że jeśli $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ to ciąg X_n zbiega do X według rozkładów (wg dystrybuant).