

Zestaw 6

1. Udowodnij **nierówność Schwarz**a: jeśli $E(X^2) < \infty$ oraz $E(Y^2) < \infty$ to mamy

$$(E|X \cdot Y|)^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2)$$

Wniosek: Iloczyn zmiennych losowych całkowalnych z kwadratem jest całkowalny.

2. Pokaż, że istnieją zmienne losowe całkowalne X oraz Y takie, że nie zachodzi następująca nierówność:
 $E(XY) \leq E(X) \cdot E(Y)$
3. Udowodnij **nierówność Jensena**: dla zmiennej losowej X całkowalnej oraz funkcji wypukłej $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej że $\varphi(X)$ jest całkowalna ($E|\varphi(X)| < \infty$) zachodzi

$$\varphi(EX) \leq E(\varphi(X)).$$

Wniosek:

4. (a) dla zmiennej $X > 0$ mamy $\frac{1}{EX} \leq E(\frac{1}{X})$
(b) dla $l > p > 0$: jeśli $E(|X|^l) < \infty$ to $E(|X|^p) < \infty$