Zestaw 7. Zbieżność zmiennych losowych. Przykłady.

1. Sprawdzić, czy ciąg Z_n zmierza do 0
   (i) średniokwadratowo (czyli w L^2)
   (ii) stochastycznie
   (iii) według rozkładów,
   gdzie
   a) Ciąg niezależnych zmiennych losowych Z_n ma rozkłady
   $$P(Z_n = 0) = \frac{1}{n}, \qquad P(Z_n = n) = 1 - \frac{1}{n}.$$
   b) Ciąg niezależnych zmiennych losowych Z_n ma rozkłady
   $$P(Z_n = 1) = \frac{1}{n}, \qquad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$
   c) ciąg zmiennych losowych Z_n określony jest wzorem
   $$Z_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } U > \frac{1}{n} \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$
   natomiast zmienna losowa U ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$.

2. Dana jest zmienna losowa U o rozkładzie
   $$P(U = 1) = \frac{1}{2}, \qquad P(U = -1) = \frac{1}{2}.$$
   Dany jest ciąg zmiennych losowych Z_n takich, że
   $$Z_n = \begin{cases} U & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ -U & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$
   Sprawdzić, czy ciąg Z_n zmierza do U
   (i) średniokwadratowo?
   (ii) stochastycznie?
   (iii) według rozkładów?

3. Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz niech X_n będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(a, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że ciąg X_n jest słabo zbieżny do zmiennej losowej $X = a$.

4. Niech $a < b$ oraz niech a_n, b_n będą ciągami liczb rzeczywistych takimi, że $a_n < b_n$ oraz $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$. Pokaż, że jeśli X_n ma rozkład jednostajny na $[a_n, b_n]$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$, to X_n jest słabo zbieżny do zmiennej losowej X.

5. Niech $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że zmienne losowe X_n o wartościach w A mają rozkłady $P(X_n = a_j) = p_j(n)$, dla $j \in \{1, \ldots, k\}$. Pokaż, że jeśli dla każdego $j \leqslant k$ $\lim_{n \longrightarrow \infty} p_j(n) = p_j$, to wtedy ciąg X_n jest słabo zbieżny do zmiennej losowej X o rozkładzie $P(X = a_j) = p_j$.

6. Niech X będzie zmienną losową oraz niech $Y_n = 1_{\{|X|>n\}}$. Czy Y_n jest zbieżny do 0 stochastycznie? Czy jest zbieżny do 0 prawie wszędzie?

7. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $\Omega = [-1, 1]$, $\Sigma = B([-1, 1])$, $P = \frac{1}{2}\mu$, gdzie μ oznacza miarę Lebesque'a na Ω oraz $B([-1, 1])$ to Borelowskie podzbiory $[-1, 1]$. Definiujemy $Y_n = n^2 \cdot 1_{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}$. Czy Y_n jest zbieżny do zera prawie wszędzie? Czy jest zbieżny do zera stochastycznie?

8. Niech X ma rozkład wykładniczy. Zbadać zbieżność ciągu $Y_n = 1_{\{X \in (n, n+1)\}}$.