Rachunek Prawdopodobieńtwa 2. Zestaw 9. CTG.

1. Aby stwierdzić, jak wielu wyborców popiera obecnie partię ABC, losujemy spośród nich reprezentatywną próbkę i na niej przeprowadzamy badanie. Jak duża powinna być ta próbka, aby uzyskany wynik różnił się od rzeczywistego poparcia dla partii ABC nie więcej niż o 3%, z prawdopodobieństwem co najmniej $1-\alpha = 0.95$?

2. Miasto K. liczy sobie 160 000 obywateli. Kasa chorych działająca na jego terenie podpisała kontrakty z 50 lekarzami rodzinnymi, z których każdy może obsługiwać co najwyżej 3300 pacjentów. Czy ta liczba lekarzy będzie wystarczająca, jeżeli chcemy, by prawdopodobieństwo, że mieszkaniec K. nie zostanie zarejestrowany u wybranego przez siebie lekarza było mniejsze od 0.05? Zakładamy, że obywatele miasta K. dokonują wyboru lekarza w sposób całkowicie losowy i niezależny.

3. Dodajemy 10000 liczb, z których każda jest zaokrąglona z dokładnością do 0.1. Zakładając, że błędy zaokrąglenia są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym na przedziale $(-0,05,+0,05)$, znaleźć najmniejszy przedział postaci $(-n,n)$, gdzie $n\in\mathbb{N}$, w którym z prawdopodobieństwem 0.99 będzie zawierał się błąd sumy.

4. Okres obiegu planetoidy Swarożyc wokół Słońca (rok swarożycjański) podlega rocznym (licząc lata swarożycjańskie) losowym wahaniom wokół wartości x sekund, gdzie x jest dużą liczbą większą od zera. Wahania te są zmiennymi losowymi niezależnymi mającymi rozkład jednostajny (w sekundach) na odcinku $[(x-1),(x+1)]$. Czy z prawdopodobieństwem większym niż 0.95 można stwierdzić, że w ciągu tysiąca lat swarożycjańskich całkowite odchylenie sumy okresów obiegu od spodziewanej wartości $1000x$ nie przekroczy minuty?

5. Niech S_n oznacza sumę orłów uzyskanych w trakcie n rzutów monet$\pm symetryczn. Niech \varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Oblicz:

   (a) $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right)$,

   (b) $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \varepsilon n\right)$

   (c) $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}\right)$.

   Wykaż, że:

   (d) $\lim_{n\to\infty} P\left(|S_n - (n-S_n)| \geqslant \varepsilon\right) = 1$

   (e) $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n-S_n}{S_n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) = 1.$

   oraz zinterpretuj wyniki (d) oraz (e).

6. Jest koniec roku 2025. W związku ze spodziewanym w najbliższym czasie przystąpieniem Polski do strefy euro rząd postanowił oszacować procent Polaków, którzy potrzebują specjalnych kalkulatorów do przeliczania złotówek na euro i odwrotnie. Ile osób musi liczyć próba w badaniu statystycznym, aby z prawdopodobieństwem 0,91 można było oszacować ten procent z dokładnością do $\frac{1}{1000}$?
   a. Rozwiąż powyższe zadanie przy uwzględnieniu dodatkowej informacji, że matematyka stała się w roku 2025 przedmiotem nadobowiązkowym w szkołach i w związku z tym odsetek Polaków potrzebujących kalkulatora jest na pewno większy niż 90%.
   b. Rozwiąż zadanie bez dodatkowego założenia.

7. Generator rzeczywistych liczb losowych daje wyniki zgodne z rozkładem wykładniczym o parametrze λ. Jakie powinno być λ i ile trzeba wygenerować liczb, aby z prawdopodobieństwem $0,9$ średnia z tych liczb wynosiła 1 z dokładnością do $0,01$?