Warunkowa wartość oczekiwana.

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 1. Niech $A \in \Sigma$ będzie taka, że $P(A) > 0$. Niech X będzie zmienną losową na Ω.

Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej X pod warunkiem zdarzenia A nazywamy wartość oczekiwaną zmiennej X na przestrzeni $(\Omega, \Sigma, P(\cdot|A))$, tzn

$$E(X|A) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega|A)$$

Można łatwo pokazać, że zachodzi wzór:

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A X\, dP = \frac{1}{P(A)} E(X \cdot 1_A)$$

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o różnych wartościach $x_1, x_2, \ldots$ to łatwo widać, że

$$E(X|A) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i|A)$$

Łatwo uzyskać coś ogólniejszego: jeśli $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym o różnych wartościach $x_1, x_2, \ldots$ oraz $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, to mamy:

$$E(\varphi(X)|A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i) P(X = x_i|A)$$

Przykład: Niech zmienna losowa X ma gęstość f oraz niech $t \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $P(X \geq t) > 0$. Wtedy

$$E(X|\{X \geq t\}) = \frac{E(X \cdot 1_{\{X \geq t\}})}{P(X \geq t)} = \frac{\int_t^\infty x f(x) dx}{\int_t^\infty f(x) dx}.$$

Definicja 2. Niech X będzie zmienną losową na Ω, zaś Y zmienną losową o rozkładzie dyskretnym przyjmującą różne wartości $y_1, y_2, \ldots$ Wtedy warunkową wartością oczekiwaną X pod warunkiem **zmiennej** Y nazywamy **zmienną losową** daną wzorem

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|Y = y_i) \text{ gdy } Y(\omega) = y_i$$

Równoważnie:

$$E(X|Y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} E(X|Y = y_i) \cdot 1_{\{Y = y_i\}}.$$

Zauważ że $E(X|Y)$ jest funkcją zmiennej losowej Y, to jest

$$E(X|Y) = h(Y),$$

dla pewnej funkcji mierzalnej (w tym wypadku funkcji prostej, inaczej-schodkowej,) h.

Uwaga: Łatwo widać, że

1. $\Sigma_{E(X|Y)} \subset \Sigma_Y$

   dla warunkowej wartości oczekiwanej zdefiniowanej definicją 2.

2. Dla warunkowej wartości oczekiwanej określonej definicją 2, dla dowolnego $B \in \Sigma_Y$

$$\int_B E(X|Y)\, dP = \int_B X\, dP$$

Zawsze zachodzi:

$$\Sigma_Y = \{Y^{-1}(Z)\colon Z \in B(\mathbb{R})\} = \sigma(\{Y^{-1}(Z)\colon Z - \text{ otwarty}\}) = \sigma(\{Y^{-1}((-\infty, t])\colon t \in \mathbb{R}\}).$$

Uwaga: czasami stosuję oznaczenie σ_Y zamiast Σ_Y. Poniżej definicja ogólna warunkowej wartości.

Definicja 3. Niech X, Y będą dowolnymi zmiennymi losowymi na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P).

Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej X pod warunkiem zmiennej Y nazywamy zmienną losową oznaczaną $E(X|Y)$ spełniającą warunki

(i) $\Sigma_{E(X|Y)} \subset \Sigma_Y$

(ii) $\int_B E(X|Y)\, dP = \int_B X\, dP \quad \forall B \in \Sigma_Y$.

Uwaga: Warunkowa wartość oczekiwana może być analogicznie zdefiniowana dla zmiennej losowej X oraz dowolnego sigma-ciała $\sigma \subset \Sigma$.

Dodatkowo, można pokazać że $E(X|Y) = h(Y)$ dla pewnej funkcji Borelowskiej h.

Poniżej kilka własności (zawsze zakładamy, że $E|X| < \infty$ co gwarantuje istnienie $E(X|Y)$). Większość z nich pochodzi z wykładów z rachunku prawdopodobieństwa lub z procesów stochastyczny, natomiast pozostałe, jeśli będziemy je stosować do rozwiązywania zadań, musimy uprzednio udowodnić (szczególnie na pracach pisemnych!):

1. warunkowa wartość oczekiwana jest wyznaczona z dokładnością do zbiorów miary zero, tzn. dowolne dwie zmienne Z_1 i Z_2 spełniające warunki definicji, muszą spełniać $P(Z_1 = Z_2) = 1$.
2. Jeśli X jest mierzalna względem Σ_Y, wtedy $E(X|Y) = X$
3. Jeśli X jest niezależna względem Σ_Y (X i Y niezależne), wtedy $E(X|Y) = E(X)$ (prawie wszędzie)
4. Jeśli $X \geq Z$, wtedy $E(X|Y) \geq E(Z|Y)$
5. Funkcja $X \to E(X|Y)$ jest liniowa.
6. $E(X) = E(E(X|Y))$
7. Prawo wieży: dla dowolnych sigma-ciał spełniających $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ mamy
$$E(X|\Sigma_1) = E(E(X|\Sigma_2)|\Sigma_1) = E(E(X|\Sigma_1)|\Sigma_2).$$
8. Jeśli Y jest Σ_Z- mierzalna i taka, że $E|XY| < \infty$, wtedy $E(XY|Z) = Y \cdot E(X|Z)$.
9. Jeśli $A \in \Sigma_Y$ oraz każdego dla $\omega \in A$ mamy $X(\omega) = \varphi(Y(\omega))$, to wtedy $E(X|Y)(\omega) = \varphi(Y(\omega))$ dla prawie każdego $\omega \in A$.

10. Dla stałej c zmienna losowa $E(X|Y)$ jest stała na zbiorze $\{w\colon Y(w) = c\}$. Przy założeniu $P(Y = c) > 0$ pokaż, że
$$E(X|Y)(w) = E(X|\{Y = c\}) \text{ dla } \omega \in \{\omega\colon Y(\omega) = c\}.$$

Warto znaleźć kontrprzykład stwierdzający, że własość z ostatniego podpunktu nie musi zachodzić bez założenia $A \in \Sigma_Y$

Poniżej przypadek gdy wektor (X, Y) posiada gęstość.

Tw. 1. Załóżmy, że wektor (X, Y) ma rozkład (absolutnie) ciągły o gęstości f. Określamy tzw. gęstość warunkową wzorem

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

gdzie f_Y jest gęstością zmiennej Y (gdy $f_Y(y)$=0 to kładziemy $f_{X|Y}(x|y) := 0$). Dla funkcji mierzalnej $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachodzi:

$$E(h(X)|Y) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X|Y}(x|Y)dx.$$

W szczególności uzyskujemy wzory:

$$E(X|Y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|Y)dx \text{ oraz } E(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Uwaga: Niech $Z, X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mierzalne (i całkowalne). Aby sprawdzić warunek (ii) z definicji ogólnej wwo, a mianowicie: $\int_B Z\,dP = \int_B X\,dP \quad \forall B \in \Sigma_Y$,
można skorzystać z następujących faktów:

1. Jeśli $\Sigma_Y = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$, wtedy wystarczy sprawdzić czy dla wszystkich generatorów A_i mamy $\int_{A_i} Z\,dP = \int_{A_i} X dP$ (warto to udowodnić)
2. Jeśli $\Sigma_Y = \sigma(A_i\colon i \in I)$ oraz rodzina $A_i, i \in I$ jest $\Pi-$ układem, to również wystarczy sprawdzić równość całek dla generatorów (można to sobie udowodnić jako wniosek z twierdzenia Dynkina-Sierpińskiego z wykładu)