Rozkłady wielowymiarowe

1. **Dystrybuanta wielowymiarowa a gęstość** Załóżmy że (X, Y) ma rozkład łączny o gęstości $f_{(1,2)}$ oraz dystrybuantę F (wyrażoną wzorem $F(t_1, t_2) = P(X \leqslant t_1, Y \leqslant t_2)$. Wtedy zachodzi prawie wszędzie:
$$f(t_1, t_2) = \frac{dF}{dxdy}(t_1, t_2)$$

2. **Wzór na gęstość- przekształcenie dyfeomorficzne**. Załóżmy że (X, Y) ma rozkład łączny o gęstości f. Niech $P((X, Y) \in S) = 1$ oraz niech $\varphi\colon S \to \mathbb{R}^2$ będzie bijekcją na obraz klasy C_1, o nietrywialnym Jakobianie $J_\varphi = det|\frac{d\varphi}{dxdy}| \neq 0$. Wtedy zmienna $\varphi(X, Y)$ ma gęstość g postaci:
$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y)) \cdot |J_\varphi^{-1}(y)| \cdot 1_{\varphi(S)}(y).$$

3. **Niezależność współrzędnych wektora losowego.** Jeśli $X_1, \ldots, X_n$ to zmienne losowe o gęstościach $f_1, \ldots, f_n$ oraz wektor $(X_1, \ldots, X_n)$ ma gęstość $f_{(1,\ldots,n)}$, to zachodzi
$$X_1, \ldots, X_n \text{ są niezależne} \Leftrightarrow f_{(1,\ldots,n)} = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n \text{ prawie wszędzie}$$

Uwaga: Oczywiście, z faktu że X ma rozkład absolutnie ciągły oraz Y ma rozkład absolutnie ciągły w ogólnym przypadku nie wynika że (X, Y) ma rozkład ciągły (przykład: rozważyć $X = Y$).