Procesy Stochastyczne - Zestaw 1

Zadanie 1 Niech ξ i η będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\mathcal{N}(0,1)$. Niech $X = \xi + 2\eta$ i $Y = \xi - \eta$. Znaleźć rozkład (X,Y) i rozkład warunkowy $\mathcal{L}_X(\cdot|Y)$.

Zadanie 2 Niech ξ i η będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\mathcal{N}(0,1)$. Niech $X = \xi + \eta$ i $Y = \xi - \eta$. Znaleźć rozkład (X,Y) i rozkład warunkowy $\mathcal{L}_X(\cdot|Y)$.

Zadanie 3 Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza liczbę orłów a Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$. Ile wynosi $\sigma(Y)$?

Zadanie 4 Niech $\Omega = \{1, 2, ..., 10\}$. Znaleźć $\sigma(\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{4,6\})$.

Zadanie 5 Niech $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ i niech $\mathbb{P} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ będzie miarą Lebesgue'a. Niech $X(x,y) = x$ i $Y(x,y) = y$. Policzyć $\mathbb{E}\left(f(X,Y)|\mathcal{G}\right)$ gdy

(i) $f(x,y) = x$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.

(ii) $f(x,y) = x^2 y$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.

(iii) $f(x,y) = x - y$, $\mathcal{G} = \sigma(X+Y)$.

Zadanie 6 Niech $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla $A, B \in \mathfrak{F}$ policzyć $\mathbb{E}(\chi_A|\chi_B)$.

Zadanie 7 Znaleźć $\mathbb{E}\left(X|Y\right)$ gdy $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P} = \mathrm{d}x$, a $X(x) = 2x^2$ i

$$Y(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1/2, \\ 2x-1, & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 8 Niech $\Omega = [0,1]$ i niech $\mathbb{P} = \mathrm{d}x$. Znaleźć $\mathbb{E}\left(X|Y\right)$ gdy $X(x) = x^2$,

$$Y(x) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } x \in [0, 1/2), \\ x^2 & \text{gdy } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 9 Niech $\Omega = [0,1]$ i niech $\mathbb{P} = \mathrm{d}x$. Znaleźć $\mathbb{E}\left(X|Y\right)$ gdy $X(x) = x^2$, $Y(x) = 1 - |2x-1|$.

Zadanie 10 Niech $\Omega = [0,1]$ i niech $\mathbb{P} = \mathrm{d}x$. Znaleźć $\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)$ gdy

(i) $X(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{G} = \sigma([0,1/4),[1/4,1])$,

(ii) $X(x) = -x$, $\mathcal{G} = \sigma([0,1/2],(1/3,1])$.

Zadanie 11 Na $\Omega = [0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a. Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y)$ gdy:

(i) $X(x) = x^2 + 1$, a
$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1/3), \\ 2 & \text{dla } x \in [1/3,2/3), \\ 0 & \text{dla } x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

(ii) $X(x) = x - 1$, a
$$Y(x) = \begin{cases} 10 & \text{dla } x \in [0,1/2), \\ 2 & \text{dla } x \in [1/2,2/3), \\ 0 & \text{dla } x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Zadanie 12 Na $\Omega = [0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a. Niech $Y(x) = x(1-x)$. Pokazać, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X,
$$\mathbb{E}(X|Y)(x) = \frac{X(x) + X(1-x)}{2}, \qquad x \in \Omega.$$

Zadanie 13 Z taśmy produkcyjnej wyszło n-produktów. Produkt jest wadliwy z prawdopodobieństwem p. Kontrola jakości z prawdopodobieństwem $\overline{p}$ wykrywa wadliwy produkt. Niech X oznacza liczbę wadliwych produktów, a Y liczbę produktów, które zostały wykryte jako wadliwe. Policzyć $\mathbb{E}\left(X|Y\right)$.

Zadanie 14 Załóżmy, że w populacji n osób prawdopodobieństwo zachorowania na daną chorobę wynosi p. Do badania na występowania choroby stosuje się test medyczny, który z prawdopodobieństwem $1 - q_1$ daje wynik negatywny gdy badana osoba jest zdrowa, a z prawdopodobieństwem q_2 daje wynik negatywny gdy badana osoba jest chora. Zakładamy, że $p, q_1, q_2 \in (0,1)$. Niech X oznacza liczbę osób chorych, a Y osób z pozytywnym wynikiem testu. Policzyć $\mathbb{E}\left(X|Y\right)$.

Zadanie 15 Niech $X_1, \ldots, X_5$ będą niezależnymi zmienymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z porametrem 1. Niech $Y = \chi_{[3,+\infty]}(X_1)$ oraz $T = X_1 + \ldots + X_5$. Policzyć $\mathbb{E}\left(Y|T=5\right)$.

Zadanie 16 Sąsiadka upiekła placek, którego zjedzenie więcej niż połowy powoduje niestrawność. Najpierw jej najstarszy syn wziął sobie kawałek a następnie młodszy syn odkroił sobie trochę z tego co zostało. Zakładamy, że wielkość porcji jest losowa i ma rozkład jednostajny po tym co jest dostępne, policzyć wartość oczekiwaną rozmiaru placka, który pozostał przy założeniu, że żaden z synów nie zachorował. Co byłoby gdyby synowie przyszli równocześnie? W którym przypadku zostałoby więcej ciasta dla Ojca?

Zadanie 17 Niech X i Y będą zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Uzasadnić, że dla dowolnego y, $\mathbb{E}(X|Y=y)$ zależy tylko od rozkładu łącznego wektora losowego (X,Y). Czy to samo można powiedzieć o $\mathbb{E}(X|Y)$?

Zadanie 18 Niech X i Y będą niezależnymi całkowalnymi z kwardatem zmiennymi losowymi. Załóżmy, że rozkłady X i Y są symetryczne, to znaczy, że rozkład X jest ten sam jak rozkład $-X$ i rozkład Y jest ten sam jak rozkład $-Y$. Pokazać, że $\mathbb{E}\left((X+Y)^2|X^2+Y^2\right) = X^2+Y^2$.

Zadanie 19 Na $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Załóżmy, że wektor losowy (X,Y) ma gęstość

$$\rho(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y)\in\Omega, \\ 0, & (x,y)\notin\Omega. \end{cases}$$

Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 20 Na $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Załóżmy, że wektor losowy (X,Y) ma gęstość

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & (x,y)\in\Omega, \\ 0, & (x,y)\notin\Omega. \end{cases}$$

Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 21 Na $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\le 1\}$ rozważmy σ-ciało zbiorów borelowskich i znormalizowaną miarę Lebesgue'a, to jest

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad A\in\mathcal{B}(\Omega).$$

Niech X i Y będą projekcjami na osie układów współrzędnych. Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2|Y)$.

Zadanie 22 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi całkowalnymi o tym samym rozkładzie. Policzyć $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

Zadanie 23 Niech (X_k) ciąg niezależnych zmiennych losowych całkowalnych o tym samym rozkładzie. Pokazać, że

$$\mathbb{E}\left(X_1|X_1+...+X_n\right)=\frac{1}{n}\left(X_1+...+X_n\right).$$

Zadanie 24 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ będzie takie, że

$$\mathbb{E}|f(X,Y)|<\infty.$$

Pokazać, że

$$\mathbb{E}\left(f(X,Y)|Y=y\right)=\mathbb{E}f(X,y).$$

Zadanie 25 Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych całkowalnych o tym samym rozkładzie. Niech

$$S_n=X_1+....X_n, \quad \mathcal{G}_n=\sigma(S_n,S_{n+1},...).$$

Policzyć $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}_n)$.

Zadanie 26 Niech X i Y będą niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie μ. Policzyć

$$\mathbb{E}\left(X|X^2+Y^2\right)$$

dla dwóch różnych μ.

Zadanie 27 Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y)$ gdy (X,Y) ma rozkład z gęstością:

- $g(x,y)=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}$ dla $0\le x\le y<\infty$ i 0 w przeciwnym przypadku,
- $g(x,y)=x\mathrm{e}^{-x(y+1)}$ dla $x,y\ge 0$ i 0 w przeciwnym przypadku.

Zadanie 28 Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ_X, λ_Y, λ_Z. Policzyć

$$\mathbb{P}\left(X<Y<Z\right).$$

Zadanie 29 Niech (X,Y) ma rozkład łączny o gęstości

$$g(x,y)=\begin{cases} cx(y-x)\mathrm{e}^{-y} & \text{dla } 0\le x\le y<\infty,\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

- Znaleźć parametr c.
- Pokazać, że dla $0 \le x \le y < \infty$,

$$f_{X|Y}(x|y) = 6x(y-x)y^{-3},$$
$$f_{Y|X}(y|x) = (y-x)\mathrm{e}^{x-y}.$$

- Wywnioskować, że $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1}{2}Y$ i $\mathbb{E}(Y|X) = X + 2$.

Zadanie 30 Niech θ i ρ oznaczają długość i szerogość geograficzną losowo wybranego punktu sfery jednostkowej. Policzyć $\mathbb{E}(\theta|\rho)$ i $\mathbb{E}(\rho|\theta)$.

Zadanie 31 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, 1)$ gdzie $\mu \in \mathbb{R}$ jest zadane. Znaleźć rozkład warunkowy wektora losowego (X, Y) względem $X + Y$.

Zadanie 32 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{G}$ niech będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$, a X zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Jeżeli $\mathbb{E}X^2 < \infty$, to możemy zdefiniować *warunkową wariancję*

$$\mathrm{Var}\,(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}\,(X|\mathcal{G}))^2\,|\mathcal{G}\right).$$

Udowodnić, że

$$\mathrm{Var}\,X = \mathbb{E}\,(\mathrm{Var}\,(X|\mathcal{G})) + \mathrm{Var}\,(\mathbb{E}\,(X|\mathcal{G})).$$

Zadanie 33 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$, a $\mathcal{H}$ niech będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{G}$. Pokazać, że dla dowolnej zmiennej X spełniającej $\mathbb{E}\,X^2 < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}\,|X - \mathbb{E}\,(X|\mathcal{H})|^2 \ge \mathbb{E}\,|X - \mathbb{E}\,(X|\mathcal{G})|^2.$$

Zadanie 34 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$. Udowodnić następującą wersję twierdzenia Bayesa:

$$\mathbb{P}\,(B|A) = \frac{\int_B \mathbb{P}\,(A|\mathcal{G})\,\mathrm{d}\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{P}\,(A|\mathcal{G})\,\mathrm{d}\mathbb{P}}, \qquad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}.$$

Zadanie 35 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, niech $\mathcal{G}$ będzie pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$, a X zmenną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ całkowalną. Niech $\rho \ge 0$ będzie zmienną losowoą na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ taką, że $\mathbb{E}\,\rho = 1$ i niech $\mathbb{Q}$ oznacza prawdopodobieństwo na $(\Omega, \mathcal{F})$ dane wzorem

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \rho \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Oznaczmy przez $\mathbb{E}^*(X|\mathcal{G})$ warunkową wartość oczekiwaną X względem $\mathcal{G}$ ze względu na prawdopodobieństwo $\mathbb{Q}$. Udowodnić następującą wersję twierdzenia Bayesa:

$$\mathbb{E}^*(X|\mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}(\rho X|\mathcal{G})}{\mathbb{E}(\rho|\mathcal{G})}.$$

Zadanie 36 Niech $\Omega = [0,\pi]$, $\mathfrak{F} = \mathcal{B}([0,\pi])$, oraz $\mathbb{P} = \alpha \mathrm{d}x$. Wyznaczyć α dla którego $\mathbb{P}$ jest miarą probabilistyczną. Policzyć $\mathbb{E}(X|Y)$ gdy $X(\omega) = \sin\omega$ a $Y(\omega) = \cos\omega$.