Rachunek prawdopodobieństwa 2 Imię i nazwisko ....,

Czerwiec 2014 Zestaw **A**

1. Podaj definicję zbieżności ciągu zmiennych losowych według rozkładów i podaj jej związki logiczne z innymi znanymi Ci definicjami zbieżności zmiennych losowych.

2. Wypowiedz i udowodnij Twierdzenie o Nierówności Kołmogorowa.

3. Dana jest funkcja $f : [0,1] \to [0,1]$. Wskaż przedział ufności dla $\int_0^1 f(x)\,dx$, gdy estymujemy ją metodą geometryczną.

4. Podaj formalną wypowiedź oraz dowód twierdzenia mówiącego, że $E(E(X|\mathcal{A})|\mathcal{B}) = E(X|\mathcal{A})$.
****

5. Automat rozlewający napoje do opakowań kartonowych nalewa zadaną ilość płynu z tolerancją 5% i rozkładem jednostajnym (czyli np. w opakowaniu litrowym znajdzie się od 950 do 1050 ml). Jakie jest prawdopodobieństwo, że 1 m^3 wystarczy do napełnienia 720 opakowań litrowych oraz 1380 opakowań o pojemności 0,2 l?

6. W dwukrotnym rzucie kostką X oznacza wynik pierwszego rzutu, zaś Y nieujemną różnicę obu wyników. Policzyć $E(X|Y)$ i $E(Y^2|X)$.

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax}, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Czy $\hat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}$ jest nieobciążonym i zgodnym estymatorem parametru a?

8. Trzej żołnierze elitarnej jednostki specjalnej: porucznik, kapral i szeregowiec dostali rozkaz wykonania ważnego zadania i w tym celu wędrują w terenie zajętym przez nieprzyjaciela. Aby nie dać się zaskoczyć, ustalili następujący regulamin służby wartowniczej. W celu ustalenia, kto ma pełnić danej nocy wartę, rzucają monetą. Jeśli jednej nocy czuwał szeregowiec, to następnej nocy czuwa z równym prawdopodobieństwem szeregowiec lub kapral. Jeśli czuwał kapral, to następnej nocy czuwa szeregowiec lub porucznik. Jeśli zaś czuwał porucznik, to następnej nocy czuwa szeregowiec. Obliczyć dla każdego z nich prawdopodobieństwo, że po bardzo długiej wędrówce ostatniej nocy przed wykonaniem zadania pełnienie warty przypadnie właśnie jemu.

Tabele niektórych wartości dystrybuanty rozkładu normalnego oraz pierwiastków kwadratowych:

x	0.5	1.0	1.28	1.5	1.64	2.0	2.5	3.0	5.0
$\Phi(x)$	0.691	0.841	0.900	0.933	0.949	0.977	0.994	0.999	0.9999997

x	0.646	3	1011	1615
$\sqrt{x}$	0.8	1.7	31.8	40.2

Rachunek prawdopodobieństwa 2 Imię i nazwisko ....,

Czerwiec 2014 Zestaw **B**

1. Podaj definicję stochastycznej zbieżności ciągu zmiennych losowych i podaj jej związki logiczne z innymi znanymi Ci definicjami zbieżności.

2. Wypowiedz co najmniej dwa twierdzenia z analizy matematycznej, z których korzystamy w dowodzie twierdzenia mówiącego, że z równości funkcji charakterystycznych wynika równość rozkładów.

3. Dana jest funkcja $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Wskaż przedział ufności dla $\int_0^1 f(x)\,dx$, gdy jej estymator wyraża się wzorem $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, gdzie $\{X_i\}$ jest i.i.d. o rozkładzie $U(0, 1)$.

4. Podaj formalną wypowiedź oraz dowód twierdzenia mówiącego, że $E(E(X|\mathcal{B})|\mathcal{A}) = E(X|\mathcal{A})$.
****

5. Księgowa w firmie produkującej chrupki przez rok dojeżdżała do pracy tramwajem z przesiadką na autobus i w ten sam sposób wraca do domu. Tramwaj ten jeździ co 10 minut (można więc przyjąć, że czas oczekiwania na jego przyjazd ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 10]$, gdy jako jednostkę weźmiemy minutę). Podobnie, autobus jeździ co 20 minut. Kursy tramwajowe i autobusowe są niezależne od siebie. Obliczyć (w przybliżeniu) prawdopodobieństwo, że przemierzając swoją trasę 500 razy, spędziła na przystankach ponad 5 dób.

6. Łasuch piecze tort urodzinowy dla Smerfetki. Miał w spiżarni pięć paczek rodzynek, z tego dwie jeszcze nie otwarte, w których było po 500 rodzynek, a pozostałe napoczęte: dwie, w których zostało po 400 rodzynek, i jedną, w której zostało tylko 100. Wybrał losowo dwie paczki i wsypał ich zawartość do ciasta. Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną $E(Y|X)$, gdzie Y to liczba rodzynek w torcie, a X liczba nie otwartych jeszcze paczek z rodzynkami, które pozostały w spiżarni.

7. Niech $X_1, X_2, X_3, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Poissona z parametrem λ. Definiujemy estymator

$$Y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

parametru $y = e^{-a\lambda}$, gdzie $a \neq 0$ jest znaną stałą. Czy jest to estymator zgodny i nieobciążony dla wartości y?

8. Dwa pokoje połączone są dwoma korytarzami. W jednym z nich znajduje się strażnik, który co 10 minut przechodzi do innego pomieszczenia. Jeśli znajdował się w pokoju, z równym prawdopodobieństwem przemieszcza się do jednego z pozostałych trzech pomieszczeń. Natomiast jeśli znajdował się w korytarzu, przechodzi z równym prawdopodobieństwem do jednego z pokojów. Znaleźć prawdopodobieństwo, że za pół godziny strażnik znajdzie się w pokoju, z którego rozpoczął patrol. Oszacować to prawdopodobieństwo po całym, kilkugodzinnym dyżurze.

Tabele niektórych wartości dystrybuanty rozkładu normalnego oraz pierwiastków kwadratowych:

x	0.5	1.0	1.28	1.5	1.64	2.0	2.5	3.0	5.0
$\Phi(x)$	0.691	0.841	0.900	0.933	0.949	0.977	0.994	0.999	0.9999997

x	0.646	3	1011	1615
$\sqrt{x}$	0.8	1.7	31.8	40.2

Rachunek prawdopodobieństwa 2 Imię i nazwisko ....,

Wrzesień 2014

1. Podaj co najmniej dwa warunki mogące służyć za definicję zbieżności rozkładów.
2. Podaj dowód twierdzenia Chinczyna.
3. Wiadomo, że zmienna losowa X spełnia warunki: $P(X \geqslant 0) = 1$ oraz $E(X) = 5$. Wypowiedz twierdzenie gwarantujące, że $\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n) \geqslant 3$.
4. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o wyłączaniu zmiennej losowej $\mathcal{A}$-mierzalnej spod nadziei warunkowej.

   ****

5. Na pewnej wybrakowanej kostce do gry szóstka, piątka i czwórka wypadają z prawdopodobieństwami p, a trójka, dwójka i jedynka z prawdopodobieństwami $\frac{1}{3} - p$, przy czym $p \in [0, \frac{1}{3}]$. Dla każdej liczby naturalnej n definiujemy na podstawie wyników n rzutów tą kostką

$$U_n = \frac{m}{n} - \frac{1}{3},$$

   gdzie m to ilość tych spośród n rzutów, w których wypadła parzysta liczba oczek. Sprawdzić, czy estymator U_n parametru p jest nieobciążony i zgodny.
6. Pewna przemysłowa firma chce zainwestować w kształcenie nowych pracowników, w związku z tym postanawia wesprzeć finansowo pewną szkołę techniczną. Stawia jej jednak jeden warunek: co roku co najmniej 50 uczniów tej szkoły ukończy ją w terminie. Wiedząc, że przeciętnie 20% spośród ogólnej liczby uczniów przyjętych do tej szkoły kończy je w terminie, oblicz ile co najmniej trzeba przyjąć uczniów na pierwszy rok, aby mieć 95% pewności, że zostaną spełnione wymagania firmy?
7. Wektor (X, Y) ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{(x, y) : x, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Obliczyć $E(X^2Y|Y)$.
8. W urnie znajdują się 3 kule, z których każda jest biała albo czarna. Przeprowadzamy następującą operację: wyciągamy losowo jedną kulę, wyrzucamy ją z urny, a na jej miejsce wrzucamy z równym prawdopodobieństwem kulę białą lub czarną. Podać przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 200 powtórzeniach tej procedury w urnie znajdą się same kule czarne.

Tabele niektórych wartości dystrybuanty rozkładu normalnego oraz pierwiastków kwadratowych:

x	0.5	1.0	1.28	1.5	1.64	2.0	2.5	3.0	5.0
$\Phi(x)$	0.691	0.841	0.900	0.933	0.949	0.977	0.994	0.999	0.9999997

x	0.646	3	1011	1615
$\sqrt{x}$	0.8	1.7	31.8	40.2