Zestaw A. Imię i nazwisko ...., Czerwiec 2013

1. Podać pełną wypowiedź i udowodnić twierdzenie: $X_n \xrightarrow{d} X$, $X \equiv c \in \mathbb{R} \Longrightarrow X_n \xrightarrow{s} X$.

2. Niech f będzie gęstością n-wymiarowego wektora losowego X. Znaleźć gęstość wektora $\varphi(X)$, gdy φ jest dyfeomorfizmem.

3. Sformułuj i udowodnij lemat z którego wynika, że w tezie centralnego granicznego mamy zbieżność jednostajną.

4. Sformułuj i udowodnij Twierdzenie Halmosa dotyczące martyngałów.

....

5. Do wybudowania podjazdu potrzeba m.in. 990 kostek brukowych, które sprzedawane sa na paletach – na każdej po 40 kostek. W trakcie prac średnio co 50 kostka ulega uszkodzeniu i nie można jej już wykorzystać. Czy wystarczy kupić 30 palet, aby mieć co najmniej 97% pewności, ze nie braknie kostek w trakcie wykonywania podjazdu?

6. Kostka sześcienna została sfałszowana w ten sposób, że szóstka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1+\varepsilon}{6}$, jedynka z prawdopodobieństwem $\frac{1-\varepsilon}{6}$, zaś pozostałe wartości z równymi prawdopodobieństwami. Czy średnia wartość z n rzutów tą kostką pomniejszona o 3,5 jest estymatorem nieobciążonym i zgodnym wartości ε?

7. Niech wektor losowy (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f_{X,Y}(x, y) = K \cdot (x + y) \cdot 1_{[0,2]^2}(x, y),$$

gdzie K jest pewną stałą. Policz $E(X|Y)$.

8. Jędruś nauczył się jeździć do przedszkola na rowerze, jednak zdarza mu się tam pójść na piechotę. Jeśli danego dnia nie wziął rowerka, następnego dnia bierze go z prawdopodobieństwem 0.8. Jeśli jechał na rowerze w danym dniu, wtedy z prawdopodobieństwem 0.3 wywraca się i następnego dnia idzie piechotą. Jeśli dojechał szczęśliwie, to następnego dnia również jedzie rowerkiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ostatniego dnia w przedszkolu Jędruś pojedzie rowerkiem? (zakładamy, że zostało wiele dni do tego czasu).

Tabela niektórych wartości dystrybuanty Φ rozkładu normalnego $N(0, 1)$:

x	0	$1,65$	$1,87$	$1,89$	$1,96$	$2,24$	$3,00$	$4,00$
$\phi(x)$	$0,5$	$0,95053$	$0,96926$	$0,97062$	$0,97500$	$0,98745$	$0,99865$	$0,99997$

Zestaw B. Imię i nazwisko ...., Czerwiec 2013

1. Podać pełne sformułowanie oraz dowód twierdzenia: $X_n \xrightarrow{1} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{s} X$. Podać przykład, że twierdzenie odwrotne nie zachodzi.

2. Wskaż zgodny i nieobciążony estymator służący do przybliżania $\int_0^1 f(x)\,dx$ i oblicz jego wariancję.

3. Wskaż ciąg zmiennych losowych, który jest jednocześnie łańcuchem Markowa i martyngałem. Odpowiedź uzasadnij.

4. Wykazać, że wektor losowy otrzymany w rezultacie przekształcenia afinicznego wektora losowego o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny.

....

5. Czołowa polska tenisistka serwuje piłki z prędkością, która ma rozkład jednostajny na odcinku $(80, 100) km/h$. Oszacuj prawdopodobieństwo, z dokładnością do $0,001$, że przy stu serwisach, co najmniej połowa piłek osiągnie prędkość przynajmniej $95 km/h$.

6. Niech $X_1, X_2, , X_3, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$. Niech $Y_n = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$ oraz $Z_n = \frac{1}{3}(X_1 + 2X_n)$. Czy są to estymatory zgodne i nieobciążone parametru m. Który z nich jest gorszy i dlaczego?

7. Rozważmy zbiór $\Omega = [-2, 2]$ z sigma algebrą zbiorów borelowskich oraz prawdopodobieństwem $P = \frac{1}{4}\mu$, gdzie μ oznacza miarę Lebesque'a na Ω. Niech $f(x) = x$. Policz $E(f^2|f)$. Policz $E(f|f^2)$.

8. Syzyf wtacza kamień na górę wysokości 4000 m. Pod koniec każdego dnia, z równymi prawdopodobieństwami: udało mu się pokonać kolejne 1000 m lub kamień wysunął się mu z rąk i stoczył się do stóp góry. Jednakże w chwili, gdy ma już dotrzeć do szczytu, złośliwy Zeus zawsze strąca mu kamień na dół. Oszacować prawdopodobieństwo, że po wielu dniach pracy Syzyf będzie znajdował się dokładnie w połowie góry.

Tabela niektórych wartości dystrybuanty Φ rozkładu normalnego $N(0, 1)$:

x	0	$1,65$	$1,87$	$1,89$	$1,96$	$2,24$	$3,00$	$4,00$
$\phi(x)$	$0,5$	$0,95053$	$0,96926$	$0,97062$	$0,97500$	$0,98745$	$0,99865$	$0,99997$

Termin II. Imię i nazwisko ...., Wrzesień 2013

1. Podaj dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego w oparciu o teorię funkcji charakterystycznych.

2. Wykaż, że jeżeli macierz kowariancji wielowymiarowego wektora losowego o rozkładzie normalnym jest dodatnio określona, to rozkład ten jest ciągły.

3. Wykaż, że $E(X) \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n)$, dla każdej zmiennej losowej $X \geqslant 0$ p.w.

4. Podaj pełne definicje zbieżności ciągu zmiennych losowych: prawie wszędzie, stochastycznej, według rozkładów i wskaż związki między nimi.

....

5. Aby stwierdzić, jak wielu wyborców popiera obecnie partię A, losujemy spośród nich reprezentatywną próbkę i na niej przeprowadzamy badanie. Jak duża powinna być ta próbka, aby uzyskany wynik różnił się od rzeczywistego poparcia dla partii A nie więcej niż o $\varepsilon = 0,01$ z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - \alpha = 0.95$? Czy można zmniejszyć wielkość próbki jeśli wiadomo, że partię A popiera co najmniej 30% wyborców? Czy można zmniejszyć wielkość próbki jeśli wiadomo, że partię A popiera co najwyżej 30% wyborców?

6. Wykonujemy kolejne rzuty symetryczną sześcienną kostką. Niech X_n oznacza liczbę wyrzuconych oczek w n-tym rzucie. Niech $Y_n = \frac{1}{3{,}5^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i$. Wykaż, że ciąg Y_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Wskaż taką filtrację, dla której ciąg Y_n nie jest martyngałem (odpowiedź uzasadnij).

7. Gracz rzucił dwiema kostkami do gry. Następnie otrzymał informację, że musi zapłacić za udział w grze, że wypłata z gry jest równa sumie oczek na kostkach oraz, dodatkowo, że suma wyrzuconych przez niego oczek jest podzielna przez 3. Jaka wysokość opłaty wstępnej jest dla gracza korzystna?

8. Hania gra wielokrotnie w papier/kamień/nożyce. Najbardziej lubi nożyce — zawsze wybiera je z prawdopodobieństwem 2/3. Jeśli nie wybiera nożyc, to jej wybór zależy od tego, co wybrała w poprzedniej rundzie gry. Jeśli były to nożyce, to szanse wyboru papier/kamień są równe, jeśli nie, to nigdy nie wybiera w kolejnej grze tego samego. Obliczyć stan stacjonarny dla tak powstałego łańcucha Markowa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po wielu rozgrywkach Hania wybierze kamień?

Tabela niektórych wartości dystrybuanty Φ rozkładu normalnego $N(0,1)$:

x	0	1,65	1,87	1,89	1,96	2,24	3,00	4,00
$\phi(x)$	0,5	0,95053	0,96926	0,97062	0,97500	0,98745	0,99865	0,99997