Funkcje charakterystyczne

12 marca 2015

Dla zmiennej losowej $Z\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definiujemy

$$EZ = E(Re(Z)) + E(Im(Z)) * i,$$

gdzie Re(z) (odpowiednio Im(z)) oznacza część rzeczywistą (odpowiednio urojoną) liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$.

Niech

$$\varphi_X(t) \stackrel{def}{=} Ee^{itX}, t \in \mathbb{R}$$

oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Mamy

$$Ee^{itX} = E(cos(tX)) + E(sin(tX)) * i,$$

$$Ee^{itX} = \int_{\mathbb{R}} e^{its} d_X(s).$$

Widzimy, ze funkcja charakterystyczna φ_X jest jednoznacznie wyznaczona przez rozkład zmiennej losowej X - stąd, analogicznie można zdefiniować funkcję charakterystyczną φ_μ dla dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}$.

Prawdziwe (i przydatne) jest następujące twierdzenie:

Theorem 1. *Niech φ_n będzie ciągiem funkcji charakterystycznych odpowiadających ciągowi rozkładów prawdopodobieństwa μ_n . Niech φ będzie funkcją charakterystyczną rozkładu μ. Jeśli ciąg φ_n jest zbieżny punktowo do funkcji φ , wtedy ciąg μ_n jest słabo zbieżny do rozkładu μ.*