

Zestaw 10 (zadania z ostatniego egzaminu z bieżącego materiału).

1. Na każdej krawędzi kwadratu o boku długości 1 wybieramy losowo i niezależnie jeden punkt zgodnie z rozkładem jednostajnym. Znajdź wartość oczekiwaną pola powierzchni czworokąta o wierzchołkach w wylosowanych punktach.
2. Niech (X, Y) ma rozkład łączny:

$$P_{(X,Y)}(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m+1}}, m \geq n \\ 0, m < n \end{cases} \quad \text{dla } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

oraz niech $A = \{X + Y \leq 5\}$. Oblicz $E(1_A \cdot X)$.

3. W grze toczonej na nieskończonej planszy gracz posuwa się o tyle pól, ile wskaże wynik rzutu kostką. Przy czym tak długo, jak wypada szóstka, gracz przesuwa pionek i wykonuje kolejny rzut. Jaka jest oczekiwana liczba pól, o które przesunie się pionek gracza w jednej turze?
4. Dana jest urna z 6 kulami czarnymi, jedną białą i jedną żółtą. Losujemy po dwie kule bez zwracania. Niech X oznacza numer losowania w którym wyciągneliśmy kulę białą natomiast Y - numer losowania w którym wyciągneliśmy kulę żółtą. Podaj rozkład wektora (X, Y) oraz zbadaj czy X i Y są niezależne.
5. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Znajdź gęstość zmiennej $Z = XY$.