Zestaw 12

1. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Odwzorowanie $< \cdot, \cdot >: V^2 \to \mathbb{R}$ nazwiemy iloczynem skalarnym, gdy

   - jest symetryczne ($< x, y >=< y, x >$)
   - jest dwuliniowe (liniowe ze względu na każdą zmienną)
   - wartość $< x, x >$ jest większa od zera dla każdego $x \neq 0$

   Przestrzeń V z iloczynem skalarnym $< \cdot, \cdot >$ nazwiemy przestrzenią unitarną. Jest to przestrzeń unormowana z normą $|x| = \sqrt{< x, x >}$

   Udowodnij: a) nierówność Cauchy'ego-Schwarza: $| < x, y > | \leqslant |x| \cdot |y|$
   b) pokaż, że $| < x, y > | = |x| \cdot |y| \iff x$ i y są liniowe zależne
   c) twierdzenie Pitagorasa: jeśli x i y są prostopadłe ($< x, y >= 0$) to $|x|^2 + |y|^2 = |x + y|^2$

2. Niech $L^2 = L^2(\Omega, \Sigma, P)$ oznacza zbiór zmiennych losowych $X : \Omega \to \mathbb{R}$ całkowalnych z kwadratem ($E[X^2] < \infty$) rozbity przez relację równoważności $XRY \iff X = Y$ prawie wszędzie. Pokaż, że $< X, Y >= E(X \cdot Y)$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni L^2.

   Z poprzedniego zadania mamy:
   a) Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza: $E[XY] \leqslant \sqrt{E[X^2]} \cdot \sqrt{E[Y^2]}$
   b)$cor(X, Y) = 0 \iff Y = aX$ dla pewnego $a \neq 0$
   c) Twierdzenie Pitagorasa: $E(X + Y)^2 = EX^2 + EY^2$ dla $< X, Y >$=0
   Przykład: $L^2([0, 1], B([0, 1]), \mathcal{L}^1)$ jest przykładem przestrzeni unitarnej nieskończenie wymiarowej.
   Uwaga: Przestrzenie L^2 są przestrzeniami unitarnymi zupełnymi-takie przestrzenie nazywamy przestrzeniami Hilberta.

3. Rzucamy 100 razy szescienna kostka do gry. a)Uzywajac nierównosci Czebyszewa, oszacuj z góry prawdopodobienstwo, ze suma wyrzuconych oczek wynosi co najmniej 200. Ocen użyteczność uzyskanego wyniku. b) Uzywajac nierównosci Czebyszewa, oszacuj z dolu prawdopodobienstwo, ze suma wyrzuconych oczek wynosi co najmniej 200.

4. Udowodnij regułę trzech sigm: $P(|X - EX| > 3\sigma) < \frac{1}{9}$, gdzie σ to skończone odchylenie standardowe zmiennej losowej X

5. Ile wynosi oczekiwana liczba rzutów kostką, jeśli: a) będziemy rzucać aż do pierwszego wypadnięcia szóstki, b) będziemy rzucać aż do zaobserwowania drugiego wypadnięcia szóstki, c) będziemy rzucać aż do zaobserwowania wszystkich wyników które wystąpiły w ciągu rzutów.