Zestaw 14. Rozkład normalny i centralne twierdzenie graniczne.

Niech $N(\mu, \sigma)$ oznacza rozkład normalny o wartości średniej μ oraz odchyleniu standardowym σ -wzór na gęstość znajdą Państwo na wykładzie. **Standardowym** rozkładem normalnym nazywamy rozkład $N(0, 1)$. Niech ϕ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Poniżej ważne własności:

1. Jeśli X ma rozkład $P_X = N(\mu, \sigma)$ to wtedy $aX + b$ ma rozkład $N(a\mu + b, a\sigma)$
2. Dystrybuanta $\phi_{(\mu,\sigma)}$ rozkładu $N(\mu, \sigma)$ zadana jest wzorem $\phi_{(\mu,\sigma)}(t) = \phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$, $t \in \mathbb{R}$
3. Jeśli X i Y są niezależne oraz $P_X = N(\mu_1, \sigma_1)$, $P_Y = N(\mu_2, \sigma_2)$, to wtedy $P_{X+Y} = N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$
4. $\phi(t) + \phi(-t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$ (wniosek z jednego z poprzednich zadań)

Zadanie1 Dystrybuanta ϕ nie jest dana funkcjami elementarnymi, używa się jej korzystając z tablic dystrybuanty. Zapoznaj się z tablicą dystrybuanty rozkładu normalnego.

Zadanie2 Zmienna losowa X ma rozklad normalny o wartosci oczekiwanej 4 i wariancji 256. Ile wynosi $P(X \in [-4, -2))$? A ile wynosi $P(X \in [-4, -2) \cup (-1, 1])$? (tablice dystrybuanty)

Zadanie3 Czas spędzony na pisaniu sms-ów podczas losowo wybranych zajęć przez statystycznego studenta pewnej uczelni ma rozkład normalny o średniej 10 min i odchyleniu 3 min. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student będzie sms-ować w danym dniu podczas zajęć więcej niż 20 minut, jeśli wiemy, że ma w tym dniu dokładnie 3 zajęcia?

Zadanie4 Udowodnij własności 1. i 2.

Poniżej bardzo ważne twierdzenie (CTG):

Centralne tw. graniczne. Niech $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tych samych rozkładach takich, że $E\xi_i = m$, $D^2\xi_i = \sigma^2 > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$. Określmy

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \qquad Z_n = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

Wtedy

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \; F_{Z_n} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =: \Phi(x)$$

przy czym zbieżność ta jest jednostajna ze względu na x, ($\Phi(\cdot)$) oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego)

Inna wersja CTG, mniej formalna: Założenia i oznaczenia: jak powyżej. Teza: dla "dużych" n zmienna S_n ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(n \cdot m, \sqrt{n}\sigma)$

Zadania

CTG0 Kura z prawdopodobienstwem $0,8$ znosi jedno jajo dziennie (a z 0.2 zadnego). Ile minimalnie kur powinien miec hodowca, zeby prawdopodobienstwo, ze wyprodukuje dziennie przynajmniej 1000 jaj bylo wieksze niz 0.95?

CTG1 Kura z prawdopodobienstwem $0,8$ znosi jedno jajo dziennie (a z prawdopodobienstwem $0,2$ zadnego). Hodowca ma 100 kur i zamierza zrobic jajecznice. Jak duza jajecznice moze zaplanowac, by jego kury zniosly wystarczajaca liczbe jaj z prawdopodobienstwem wiekszym badz rownym $0,95$? (Zakladamy ze kury maja jeden dzien na zniesienie jaj).