Rachunek 1. Zestaw 16. CTG-ciąg dalszy.

1. Znajdź przykład zmiennych losowych X i Y o rozkładach normalnych, takich, że $X+Y$ ma rozkład, który nie jest rozkładem dyskretnym oraz nie jest rozkładem normalnym

CTG6 Jest koniec roku 2050. W wyniku postępującej degradacji programu matematyki w polskich szkołach rząd postanowił uruchomić produkcję specjalnych kalkulatorów umożliwiających Polakom funkcjonowanie w codziennym świecie. Ile musi wynosić wielkość próby w badaniu statystycznym, aby z prawdopodobieństwem 0,98 można było oszacować procent osób potrzebujących specjalnego kalkulatora z dokładnością do $\frac{1}{100}$, jeśli

a) wiemy,że potrzebujących Polaków jest co najmniej 40%

b) wiemy że matematyka jest od pewnego czasu przedmiotem nieobowiązkowym w szkołach i odsetek ten wynosi co najmniej 90%?.

CTG7 Automat rozlewający napoje do opakowań kartonowych nalewa zadaną ilość płynu z tolerancją 5% i rozkładem jednostajnym (czyli np. w opakowaniu litrowym znajdzie się od 950 do 1050 ml). Jakie jest prawdopodobieństwo, że 1 m3 wystarczy do napełnienia 720 opakowań litrowych oraz 1380 opakowań o pojemności 0,2 l?

CTG8 Okres obiegu planetoidy Swarożyc wokół Słońca (rok swarożycjański) podlega rocznym (licząc lata swarożycjańskie) losowym wahaniom wokół wartości x sekund, gdzie x jest dużą liczbą większą od zera. Wahania te są zmiennymi losowymi niezależnymi mającymi rozkład jednostajny (w sekundach) na odcinku $[(x-1),(x+1)]$. Czy z prawdopodobieństwem większym niż 0.95 można stwierdzić, że w ciągu tysiąca lat swarożycjańskich całkowite odchylenie sumy okresów obiegu od spodziewanej wartości $1000x$ nie przekroczy minuty?

CTG9 Niech S_n oznacza sumę orłów uzyskanych w trakcie n rzutów monetą symetryczną. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Oblicz:

(a) $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \varepsilon n\right)$

(c) $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}\right)$.

Wykaż, że:

(d) $\lim_{n\to\infty} P\left(|S_n - (n-S_n)| \geqslant \varepsilon\right) = 1$

(e) $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n-S_n}{S_n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) = 1$.

oraz zinterpretuj wyniki (d) oraz (e).

Materiał dla chętnych (oszacowanie tempa zbieżności:)

Twierdzenie Berry-Essena Niech Y_i, $i \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem i.i.d. o wartości oczekiwanej $E(Y_1) = 0$, wariancji σ^2 oraz $E(|Y_1|^3) < \infty$. Niech $Z_n = \frac{S_n}{\sigma\cdot\sqrt{n}}$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Zachodzi

$$|P(Z_n \leqslant t) - \Phi(t)| \leqslant 0,5 \cdot \frac{E(|Y_1|^3)}{\sigma^3\sqrt{n}}, \ t \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie: Wybierz któreś z zadań rozwiązywanych na zajęciach i oszacuj z góry błąd korzystając z twierdzenia Berry-Essena.