**Rachunek 1. Zestaw 17 . Zbieżność zmiennych losowych.**

1. Zbadać słabą zbieżność ciągu $X_n$, gdzie $X_n$ ma rozkład $N(1, 1+\frac{1}{n})$ dla $n$ parzystych oraz $N(1,1)$ dla $n$ nieparzystych.
2. Zbadać zbieżność stochastyczną ciągu $X_n$, gdzie $X_n$ ma rozkład $N(1, n^2)$.
3. Pokaż, że granica w sensie słabej zbieżności nie musi być wyznaczona jednoznacznie, tj. że istnieje ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ oraz dwie zmienne losowe $X, Y$ takie że $P(X = Y) < 1$ spełniające $X_n \xrightarrow{d} X$ oraz $X_n \xrightarrow{d} Y$.
4. Pokaż że granica w sensie zbieżności stochastycznej jest wyznaczona jednoznacznie, tj. jeśli $X_n \xrightarrow{s} X$ oraz $X_n \xrightarrow{s} Y$ to zachodzi $X = Y$ prawie wszędzie.
5. Udowodnić, że jeżeli ciąg zmiennych $X_n$ zmierza do zmiennej losowej $X$ stochastycznie, natomiast $a, b \in \mathbb{R}$, to
$$aX_n + b \xrightarrow{P} aX + b.$$
6. Udowodnić, że jeżeli ciąg zmiennych $X_n$ zmierza do zmiennej losowej $X$ według rozkładów, natomiast $a, b \in \mathbb{R}$, to
$$aX_n + b \xrightarrow{d} aX + b.$$
7. Udowodnić, że jeżeli ciąg zmiennych $X_n$ zmierza do zmiennej losowej $X$ prawie wszędzie natomiast $a, b \in \mathbb{R}$, to
$$aX_n + b \to aX + b \ \ p.w.$$
8. Sprawdzić, czy ciąg $Z_n$ zmierza do 0
(i) średniokwadratowo (czyli w $L^2$)
(ii) stochastycznie
(iii) według rozkładów,
gdzie
a) Ciąg niezależnych zmiennych losowych $Z_n$ ma rozkłady
$$P(Z_n = n^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{n}, \qquad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$
b) ciąg zmiennych losowych $Z_n$ określony jest wzorem $Z_n = 1_{\{U \leqslant \frac{1}{n}\}}$, gdzie zmienna losowa $U$ ma rozkład jednostajny na zbiorze $[0, 1]$
c) ciąg zmiennych losowych $Z_n$ określony jest wzorem $Z_n = 1_{\{U \leqslant \frac{1}{n}\}}$, gdzie zmienna losowa $U$ ma rozkład wykładniczy o parametrze $\lambda$.
9. Ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_n$ ma rozkłady
$$P(X_n = 0) = \frac{1}{n}, \qquad P(X_n = n) = 1 - \frac{1}{n}.$$
Czy istnieje zm. losowa $X : \Omega \to \mathbb{R}$ do której jest zbieżny ciąg $X_n$ (rozstrzygnąć dla każdego rodzaju zbieżności znanej z ćwiczeń)
10. Dana jest zmienna losowa $U$ o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $[-2, 2]$. Dany jest ciąg zmiennych losowych $Z_n$ takich, że
$$Z_n = \begin{cases} U & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ -U & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$
Sprawdzić, czy ciąg $Z_n$ zmierza do $U$
(i) średniokwadratowo?
(ii) stochastycznie?
(iii) według rozkładów?
11. Pokazać, że jeżeli $X_n \xrightarrow{L^1} X$, to $X_n \xrightarrow{s} X$. Pokazać na przykładzie, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi.