

Rachunek 1. Zestaw 4. Prawdopodobieństwo warunkowe. Niezależność zdarzeń.

1. Rozpatrujemy rodziny o dwóch dzieciach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że rodzina ma dwóch synów, jeżeli wiadomo, że
 - a) starsze dziecko jest synem,
 - b) co najmniej jedno dziecko jest chłopcem.
2. Rzucamy kostką do gry. Czy zdarzenie, że wypadnie parzysta liczba oczek jest niezależne od zdarzenia, że wypadło jedno lub dwa oczka?
3. Sa trzy karty: jedna jest z obu stron biała, jedna z obu stron czerwona, a ostatnia z jednej strony biała, a z drugiej czerwona. Losujemy jedną kartę i kładziemy ją na stół. Patrzymy i widzimy, że u góry jest strona koloru czerwonego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że i na dole jest strona czerwona?
4. Czy zdarzenia A i B są niezależne, gdy: losujemy 5 kart z talii (24 karty), $A = \{ \text{co najmniej dwie karty to trefle} \}$, $B = \{ \text{wylosowaliśmy kolor} \}$ Ile wynosi $P(B|A)$? A ile $P(A|B)$? Czy $P(B|A) > P(B)$? Czy $P(A|B) > P(A)$?
5. **Urny** Są dwie urny. W pierwszej są 4 kule białe i 2 czarne, a w drugiej 2 białe i 3 czarne. Losujemy jedną kulę z urny pierwszej i wrzucamy do drugiej, a następnie losujemy kulę z urny drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę białą?
6. Test na rzadką chorobę, którą jest dotknięta statystycznie jedna na 5000 osób, daje fałszywą odpowiedź pozytywną w 2 procentach przypadków. Jaka jest szansa, że przypadkowo wybrana osoba, u której test dał odpowiedź pozytywna, jest faktycznie chora? (Zakładamy że u osoby chorej test zawsze daje odpowiedź pozytywną)
7. Mamy dwie urny: w pierwszej są trzy białe kule i jedna czarna, w drugiej dwie białe i dwie czarne. Rzucamy kostką i następnie losujemy kulę z jednej z urn: jeśli wypadnie mniej niż 5 oczek, losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym wypadku losujemy kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo że wylosujemy kulę czarną?
8. W zbiorze 100 monet jedna ma po obu stronach orły, pozostałe są prawidłowe. Wybieramy losowo jedną monetę, rzucamy kolejno 10 razy i otrzymujemy 10 orłów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to moneta z orłami po obu stronach?
9. Suma cyfr pewnej, losowo wybranej, liczby pięciocyfrowej jest równa 12. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma jej pierwszych dwóch cyfr wynosi 5?
10. Podaj przykład zdarzeń A, B, C , które są parami niezależne, ale nie są niezależne
11. Rozważmy ciąg zdarzeń niezależnych $A_1; A_2; \dots; A_6$ zawartych w przestrzeni zdarzeń elementarnych. Zakładamy że prawdopodobieństwa są znane: $P(A_i) = p_i, i = 1; 2 \dots; 6$. Policzyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A_1 \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4' \cap A_5 \cap A_6'$ (A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A)
12. **Paradoks więźnia.** Spośród trzech więźniów, Mateusza, Marka i Tomka, dwóch ma być straconych. Mateusz nie wie kto zostanie stracony i zwraca się do strażnika: Z pewnością zostanie stracony Marek lub Tomek, tak więc jeżeli podasz mi imię jednego z nich, Marka lub Tomka, który będzie stracony, to nic mi nie powiesz o moim losie. Po chwili namysłu strażnik odpowiedział: Marek będzie stracony. Wtedy Mateusz poczuł się spokojniejszy, ponieważ stwierdził, że prawdopodobieństwo jego stracenia wynosiło uprzednio $2/3$, a teraz po odpowiedzi udzielonej przez strażnika, pozostawało już tylko dwóch więźniów, Tomek i on sam, z których jeden nie będzie stracony, prawdopodobieństwo stracenia zmalało więc do $1/2$. Czy Mateusz rozumował prawidłowo?