Zestaw 5 Zadanie 8 Dostajemy 5 kart (z talii 24 kart). Jakie jest prawdopodobienstwo, ze mamy jedną parę, jesli wiadomo, ze dostaliśmy dokładnie 4 trefle.

RP 1. Zestaw 6. Dystrybuanta, rozkłady prawdopodobieństwa, zm. losowe

Oznaczenia: Niech (Ω, Σ, P) będzie prz. probabilistyczną.

1. **rozkładem (prawdopodobieństwa) zmiennej losowej** X nazywamy prawdopodobieństwo P_X na $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ zadane wzorem
$$P_X(U) = P(X \in U) = P(\{\omega \in \Omega \colon X(w) \in U\}).$$
2. **dystrybuantą zmiennej losowej** X nazywamy dystrybuantę jej rozkładu prawdopodobieństa P_X
3. $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazywamy **wektorem losowym** gdy X jest mierzalne. Rozkład prawdopodobieństwa P_X oraz dystrybuantę F_X wektora losowego X definiujemy analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym.

Zadania.

1. a) Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie p. probabilistyczną.
Pokazać, iż dowolna stała funkcja $X = c$ jest zmienną losową na tej przestrzeni $(X : \Omega \to \mathbb{R})$. Podaj jej rozkład oraz narysuj jej dystrybuantę.
b) Narysować dystrybuantę rozkładu $P = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \delta_i$, gdzie δ_c oznacza miarę Diraca skoncentrowaną w punkcie c.
2. Narysować oraz podać wzór na dystrybuantę zmiennej losowej X, takiej, że $X(\omega) = 1$ dla $\omega \in A$ oraz $X(\omega) = 2$ dla $\omega \notin A$, gdzie $P(A) = \frac{1}{3}$
3. Dla każdej z poniższych zmiennych losowych, zdefiniuj formalnie przestrzeń probabilistyczną, podaj jawny wzór na zmienną losową, znajdź ich rozkłady prawdopodobieństwa. a) mniejszy z wyników w rzucie dwiema kostkami b) $\lfloor x^2 \rfloor$ (”podłoga” z x^2), gdzie x pochodzi z rokładu jednostajnego na zbiorze $[-2, 2]$
4. Dana jest dystrybuanta F zmiennej losowej X. Dla $Y = X^2$ obliczyć $P(Y \leqslant 13)$.
5. Dany jest rozkład zmiennej losowej X:
$$P(X = -2) = P(X = 2) = 0.25, \quad P(X = -1) = P = (X = 1) = 0.2, \quad P(X = 0) = 0.1$$
Znaleźć rozkłady zmiennych losowych $Y := X^2$ oraz $Z := 1 - 8X$. Narysować ich dystrybuanty.
6. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie p. probabilistyczną taką, że $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$. Czy $X(\omega) = 1 + \omega$ jest zmienną losową na tej przestrzeni? Jeżeli nie, to podaj przykład (niestałej) funkcji $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, która jest zmienną losową na tej przestrzeni.
7. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną (Ω, Σ, P) przedstawiającą pewien eksperyment związany z rzutem dwiema kostkami, gdzie mamy $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$, $\Sigma = \{C \times \{1, 2, \ldots, 6\} \colon C \subset \{1, 2, \ldots, 6\}\}$, natomiast P zadanie jest wzorem $P(C \times \{1, 2, \ldots, 6\}) = \frac{\#C}{6}$. Podaj przykład funkcji $Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ nie będącej zmienną losową oraz nietrywialny przykład zmiennej losowej na Ω (nie będącej stałą). Jaki eksperyment może opisywać podana przestrzeń probabilistyczna?
8. Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F i niech $a < b$. Znaleźć i narysować dystrybuanty zmiennych losowych Y i Z danych wzorami:
a) $Y = \begin{cases} a & \text{gdy } X < a, \\ X & \text{gdy } a \leqslant X \leqslant b, \\ b & \text{gdy } X > b, \end{cases}$
b) $Z = \begin{cases} X & \text{gdy } |X| \leqslant b, \\ 0 & \text{gdy } |X| > b. \end{cases}$

9. Punkt $x \in \mathbb{R}$ nazwiemy puktem skokowym dystrybuanty F_X gdy $P(X < x) < F_X(x)$. Pokaż, że x jest punktem skokowym wtedy i tylko wtedy $P(X = x) > 0$ wtedy i tylko wtedy F_X nie jest ciągła w punkcie x. Pokaż że dystrybuanta ma co najwyżej przeliczalnie wiele punktów skokowych (o ile nie było na wykładzie)

10. Dla jakich liczb rzeczywistych a oraz b zachodzi: jeśli F_1 oraz F_2 to dystrybuanty, wtedy $aF_1 + bF_2$ jest dystrybuantą.

11. Podać przykład par zmiennych losowych X_1, Y_1 oraz X_2, Y_2, takich że ich rozkłady prawdopodobieństwa spełniają $P_{X_1} = P_{X_2}$ oraz $P_{Y_1} = P_{Y_2}$ ale ich łączne rozkłady są różne, tj. $P_{(X_1,Y_1)} \neq P_{(X_2,Y_2)}$. Rozważyć, czy zachodzi przeciwna implikacja: jeśli rozkłady łączne są równe, czy wtedy rozkłady brzegowe muszą być sobie równe?

12. Niech X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$ oraz niech F będzie ściśle rosnącą dystrybuatną pewnego rozkładu. Jaki rozkład (jaką dystrybuantę) ma zmienna losowa $Y = F^{-1}(X)$.