

## Rachunek Prawdopodobieństwa 1. Zestaw 7 wersja 2. Rozkłady i niezależność zmiennych losowych.

**Definicja:** Zmienne losowe  $X$  i  $Y$  nazywamy **niezależnymi**, gdy dla dowolnych zbiorów Borelowskich  $A$  i  $B$  zawartych w  $\mathbb{R}$  zdarzenia  $\{X \in A\}$ ,  $\{Y \in B\}$  są niezależne, czyli

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$

Innymi słowy:  $X$  i  $Y$  są niezależne, gdy rozkład łączny wektora  $(X, Y)$  jest produktem miar brzegowych  $P_X$  i  $P_Y$ , tzn.

$$P_{(X,Y)} = P_X \times P_Y.$$

### Zadania:

1. W urnie znajdują się jedna żółta kula, dwie czerwone oraz trzy niebieskie kule. Losujemy dwie kule. Niech  $X$  oznacza liczbę wylosowanych kul czerwonych oraz  $Y$  niech oznacza liczbę wylosowanych kul niebieskich. Znaleźć rozkład łączny  $P_{X,Y}$  oraz rozkłady brzegowe  $P_X$ ,  $P_Y$  wektora  $(X, Y)$ . Czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne?
2. Rzucamy dwiema kostkami. a) Czy zmienne losowe oznaczające odpowiednio liczbę oczek na pierwszej kostce oraz liczbę oczek na drugiej kostce są niezależne? b) Czy zmienne losowe oznaczające sumę wyrzuconych oczek oraz wartość bezwzględną różnicy wyrzuconych oczek są niezależne?
3. Losujemy punkt z prostokąta  $[0, 1] \times [-1, 1]$ . Niech  $X$  oraz  $Y$  oznaczają pierwszą oraz drugą współrzędną tego punktu. Znaleźć ich rozkłady. Sprawdzić niezależność.
4. Niech  $U$  oraz  $V$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach jednostajnych na  $[0, 1]$ .
  - a) Czy zmienne losowe  $U$  oraz  $U + V$  są niezależne?
  - b) Czy zmienne losowe  $\max(U, V)$  oraz  $\min(U, V)$  są niezależne?
5. Niech  $X$  będzie zmienną losową o dystrybuancie  $F(x) = C_1 \cdot \arctan(x) + C_2$ , gdzie  $C_1, C_2$  to pewne stałe rzeczywiste. Wyznacz wartości stałych  $C_1$  oraz  $C_2$ . Czy zmienna losowa  $X$  ma gęstość? Jeśli tak, znajdź ją.
6. Mówimy że zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda > 0$  gdy posiada ona gęstość  $f_X$  zadaną wzorem:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{gdy } x \geq 0, \\ 0 & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

- a) Wyznacz dystrybuantę rozkładu wykładniczego
  - b) Wyznacz rozkłady zmiennych losowych  $Y = 3X - 5$ ,  $Z = -2X + 1$ .
7. Niech  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Rozważmy  $\sigma$ -algebrę zbiorów Borelowskich na kwadracie jednostkowym z miarą Lebesgue'a. Niech  $X(\omega)$  opisuje odległość (w metryce maksimum) punktu  $\omega$  od najbliższego rogu kwadratu. Czy  $X$  jest zmienną losową? Jeżeli tak, to podaj jej rozkład oraz dystrybuantę.
  8. W zadaniu 1 wyznacz rozkłady warunkowe  $P_{X|Y}$  oraz  $P_{Y|X}$ .
  9. Niech wektor  $(X, Y)$  ma rozkład jednostajny na półkolu  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \wedge y \geq 0\}$ .
    - a) Czy  $X$  i  $Y$  są niezależne? - podaj odpowiedź NIE wykorzystując gęstości brzegowych.
    - b) Znajdź gęstości brzegowe  $f_X$  i  $f_Y$  oraz gęstości warunkowe.
  10. Dane są niezależne zmienne losowe:  $X$  o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, 1]$  oraz zmienna losowa  $Y$  o rozkładzie jednostajnym na zbiorze  $\{-1, 0, 1\}$ .
    - a) Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej  $Z = X + Y$ .
    - b) Czy rozkład ten jest ciągły? Odpowiedź uzasadnić.