Zestaw 8. Wartość oczekiwana, wariancja.

Wstęp.

Niech (Ω, Σ, P) będzie prz. probabilistyczną.

Wartością oczekiwaną(wartością średnią; nadzieją matematyczną) zmiennej losowej $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy całkę względem miary P

$$EX = \int_{\Omega} X dP.$$

Uwaga: wartość oczekiwana może być liczbą rzeczywistą, może być $+-$ nieskończonością lub może nie być określona. Poniższe wzory zachodzą przy założeniu całkowalności wszystkich występujących w nich zmiennych losowych (zm.losową nazywam całkowalną gdy posiada skończoną wartość oczekiwaną). Wartość oczekiwana ma wszystkie własności całki, np.

1. liniowość: $E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$
2. monotoniczność: $P(X \leqslant Y) = 1 \Longrightarrow EX \leqslant EY$
3. dla zmiennych losowych X i Y **niezależnych**, $E[XY] = EX \cdot EY$.

Przypadek dyskretny. Jeśli $X \in \{a_1, a_2, a_3, \dots,\}$, to zachodzi

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot P(X = a_i)$$

oraz

$$E\varphi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(a_i) \cdot P(X = a_i),$$

gdzie $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją Borelowską.

Przypadek ciągły. Jeśli X ma gęstość f, to zachodzi

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx$$

oraz

$$E\varphi(X) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \cdot f(x) dx,$$

gdzie $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją Borelowską.

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy wielkość

$$D^2(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Wariancja jest zatem średnim kwadratem odchylenia zmiennej losowej od jej wartości średniej. Korzystając z wcześniejszych wzorów dostajemy wzór na wariancję w przypadku dyskretnym oraz w przypadku ciągłym (wskazówka: wykorzystać funkcję $\varphi(x) = (x - E(X))^2$). Możma pokazać, że wariancja ma następujące (przydatne) własności:

1. $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$
2. jeśli X i Y to zmienne losowe niezależne, to zachodzi: $D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

Odchyleniem standardowym zmiennej X nazywamy wielkość $D(X) = \sqrt{D^2(X)}$.

Zadania:

1. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Opisać przestrzeń probabilistyczną dla tego doświadczenia. Zdefiniować zmienna losową X przyjmującą wartość równą liczbie oczek na kości z większą liczbą oczek. Obliczyć $P(X \in [2, 4])$ oraz znaleźć dystrybuantę i wartość oczekiwaną X.

2. a) Niech X oznacza liczbę wyrzuconych oczek w rzucie kostką. Policzyć wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennych losowych: X oraz $2X + 6$.
   b) Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza ciąg rzutów kostką. Ile wynosi wartość oczekiwana i wariancja zmiennej $X_1 + X_2 + \ldots X_n$?
   c) Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza ciąg rzutów kostką. Ile wynosi wartość oczekiwana i wariancja zmiennej $1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + \cdots + n \cdot \ X_n$?

3. Ile wynosi wartość oczekiwana oraz wariancja zmiennej losowej X o gęstości $f(x) = (\alpha + 1) \cdot x^{\alpha}$, $x \in (0, 1)$. Ile wynosi wartość oczekiwana zmiennej X^2 ? Znajdź dystrybuantę zmiennej losowej X oraz X^2.

4. Po trzeciej lampce szampana studentka postanowiła rozwiązywać zadania z rachunku prawdopodobieństwa: jedno zadanie po trzeciej, jedno po czwartej oraz jedno po piątej lampce. Ile wynosi oczekiwana wartość oraz wariancja liczby rozwiązanych przez nią poprawnie zadań, jeśli wiadomo że prawdopodobieństwo poprawnego rozwiązania wyraża się wzorem: $P(n) = 0,9 - 0,1 * n$, gdzie $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ oznacza liczbę wypitych lampek szampana.