

Rachunek Prawdopodobieństwa 1. Zestaw 9.

Proszę zrobić te zadania, których nie było na wykładzie:

1. Pewnego mroźnego dnia cała populacja krakowskich wiewiórek złożona ze 100 osobników zachorowała na ptasią grypę. Wiemy że każdego poranka chora dotychczas wiewiórka obudzi się (i pozostanie) zdrowa z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, niezależnie od dotychczasowego przebiegu choroby oraz stanu zdrowia pozostałych osobników. Policz oczekiwaną liczbę zdrowych wiewiórek po upływie 5 dni od początku choroby.
2. Powiemy że zmienna losowa X ma rozkład Poissona o parametrze $\lambda > 0$ gdy zachodzi

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Wyznacz wartość oczekiwaną oraz wariancję rozkładu Poissona.

3. Czy suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładach Poissona z parametrami λ_1 oraz λ_2 ma rozkład Poissona? Z jakim parametrem?
4. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję w rozkładzie jednostajnym na odcinku $[a, b]$
5. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję w rozkładzie dwupunktowym Bernoulliego $B(1, p)$. Wykorzystując uzyskane wyniki, wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję w rozkładzie $B(n, p)$.
6. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Bernoulliego, odpowiednio: $B(n_1, p)$ oraz $B(n_2, p)$. Wyznacz rozkład sumy $X + Y$.
7. Zmienna losowa X ma dystrybuantę F_X .
 - a) Pokaż, że jeśli rozkład X posiada gęstość f_X która jest funkcją parzystą to dystrybuanta F_X spełnia $F_X(t) + F_X(-t) = 1, t \in \mathbb{R}$
 - b) Pokaż, że jeśli rozkład P_X jest symetryczny względem zera (tzn. $P(X \in A) = P(X \in -A)$) oraz nie ma punktów skokowych, to dystrybuanta F_X spełnia $F_X(t) + F_X(-t) = 1, t \in \mathbb{R}$.
 - c) Uogólnij poprzedni podpunkt na przypadek gdy rozkład P_X jest symetryczny względem $m \in \mathbb{R}$ oraz nie ma punktów skokowych.