Równania różniczkowe Kartkówka 1

1. Proszę o czytelny zapis odpowiedzi. Odpowiedzi nieczytelne nie będą sprawdzane.
2. W zadaniach 3-5 sprawdzam tylko podane odpowiedzi (proszę nic innego nie wpisywać pod zadaniami). Odpowiedź powinna być podana w możliwie najprostszej postaci (jeśli to możliwe, w postaci "rozwikłanej"). Jeśli dziedziną rozwiązań wysyconych nie jest cała prosta należy również podać dziedzinę.

Zadania otwarte

Zad.1 (16 pkt) W pewnej średniowiecznej osadzie liczącej 1000 mieszkańców zmagającej się z epidemią tajemniczej choroby policzono osoby chore i stwierdzono, że 100 osób jest zarażonych. Po upływie tygodnia wykonano ponowne rachunki i stwierdzono, że chorych jest już 400 osób. Ile osób będzie zarażonych po upływie kolejnego tygodnia, jeśli założymy że choroba rozprzestrzenia się z prędkością proporcjonalną do iloczynu osób chorych oraz zdrowych? (Zakładamy optymistycznie, że w omawianym okresie populacja jest stała).

Szkic: Nasze równanie ma postać $x' = K * x(1000 - x)$, rozwiązujemy je jako równanie o zmiennych rozdzielonych (lub równanie Bernoulliego) otrzymując $x(t) = \frac{1000\exp(Ct)}{D+\exp(Ct)}$. Warunek poczatkowy $x(0) = 100$ daje nam $D = 9$ oraz $x(t) = \frac{1000\exp(Ct)}{9+\exp(Ct)}$. Drugi warunek $x(1) = 400$ prowadzi do $\exp(C) = 6$ co daje rozwiązanie $x(t) = \frac{1000\cdot 6^t}{9+6^t}$. Odpowiedzią jest zatem wartość $x(2) = \frac{36000}{45} = 800$.

Zad.2 (18 pkt) Narysuj rozszerzony portet fazowy dla następującego równania:

(a) $x' = t - 1$
Wskazówka: Wykorzystać, że wartość pochodnej nie zależy od zmiennej x.

(b) $x' = x - t$
Wskazówka: Wykorzystać, że wartość pochodnej jest stała na prostych $x = t + C$.

(c) $x' = x^2$
Wskazówka: Wykorzystać, że wartość pochodnej nie zależy od zmiennej t.

Na każdym z rysunków podaj dokładne wartości pochodnej rozwiązania w wybranych kilku punktach, można też dać komentarze pozwalający prawidłowo odczytać rysunek.

Zadania zamknięte

Zad.3 (10 pkt) Znajdź rozwiązanie ogólne równania $x' = -\frac{t}{x}$

Odpowiedź: Równanie o zmiennych rozdzielonych, odpowiedź: $x = \pm\sqrt{C - t^2}$, $t^2 \leq C$

Zad.4 (14 pkt) Znajdź rozwiązanie ogólne równania: $x' - 2x = \sin(t)$

Odpowiedź: Równanie liniowe niejednorodne, rozwiązanie szczególne: $x_0 = -\frac{1}{5}(2\sin(t) + \cos(t))$, odpowiedź: $x = C\exp(2t) - \frac{1}{5}(2\sin(t) + \cos(t))$

Zad.5 (10 pkt) Znajdź równanie różniczkowe rodziny krzywych $R = \{y^2 = Cx^3\}_{C\neq 0}$:

Odpowiedź: Rozważając postać $\frac{y^2}{x^3} = C$ różniczkujemy $\frac{d}{dx}\frac{y^2(x)}{x^3} = 0$ i otrzymujemy odpowiedź: $2y'x - 3y = 0$