Temat XII.

Lagrange theorem, derivatives and properties of functions.

1. Using Lagrange Theorem show that:
a) $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$, dla $x > 0$.

b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$, dla $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Find the intervals on which the function is monotonic::
a) $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.
b) $f(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$.
c) $f(x) = e^x \cos x$.

3. a) Show that $f(x) = x + \sin x$ is strictly increasing on $\mathbb{R}$.
b) Use the above to show the existence of the inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
c) Examine for which arguments $y \in \mathbb{R}$ there exists the derivative of the inverse, $(f^{-1})'(y)$ (finite or infinite).

4. Find the local extrema of the function $f(x) = x + \sin 2x$.

5. Show that among all rectangles with fixed perimeter the square has the biggest area.
6. Wyznaczyć długości krawędzi prostopadłościennego pojemnika bez pokrywy, o kwadratowym dnie i pojemności 0,5 metra sześciennego, aby na jego wykonanie zużyć jak najmniej materiału.

7. Wykazać, że dla promienia świetlnego, poruszającego się ze stałą prędkością c od punktu A do punktu B, z odbiciem od powierzchni lustra w takim punkcie, by czas przebycia tej trajektorii był minimalny, spełniona jest zasada ‘kąt padania jest równy kątowi odbicia’. Porównać uzyskany rezultat z prawem załamania światła przy przechodzeniu z jednego ośrodka do drugiego.

Krzysztof Barański i Waldemar Pałuba