Zadanie1 Czy Y jest $\sigma(X)$ mierzalne gdy

(1) rzucamy dwa razy kostką, X oznacza sumę wyników, zaś Y oznacza iloczyn wyników;
(2) rzucamy trzy razy monetą $0-1$, X oznacza sumę wyników, zaś Y oznacza iloczyn wyników.

Zadanie2 Niech Ω z σ-algebrą zbiorów borelowskich, P miarą Lebesgue'a na Ω, opisz $\sigma(X)$ gdy

(1) $\Omega = [0,1]$, $X(\omega) = 1$;
(2) $\Omega = \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$;
(3) $\Omega = [0,1]$, $X(\omega) = 3$ gdy $\omega \in [0,1/2)$, zaś $X(\omega) = 5$ gdy $\omega \in [1/2,1]$;
(4) $\Omega = R$, $X(\omega) = \sin(\pi\omega)$;
(5) $\Omega = [-1,1]$, $X(\omega) = |w|$;
(6) $\Omega = [-2,2]$, $X(\omega) = |w-1| + |w+1|$.

Zadanie3 Symetryczna kostka do gry boki z numerami 1,2,3 ma pomalowane na zielono, a boki z numerami 4,5,6 ma pomalowane na czerwono. Rzucamy tą kostką jednokrotnie. Niech X przyjmuje wartości równe ilości punktów jaką wyrzucimy na tej kostce.
a) Jaka jest wartość oczekiwana zmiennej X?
b) Jeśli widzimy, że wypadło pole o kolorze zielonym (ale nie widzimy ile wypadło punktów), to jaka w tej sytuacji będzie wartość oczekiwana zmiennej losowej X?

Zadanie4 Niech zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o parametrze 1. Znaleźć $E(X|\{X \geqslant t\})$.

Zadanie5 Niech (X,Y) będzie zmienną losową o gęstości

f(x,y)= $\begin{cases} e^{-x-y} & \text{gdy } x,y \geqslant 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$

Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną zmiennej $X+Y$ pod warunkiem, że $X<Y$.

Zadanie6 Znaleźć $E(X|Y)$, gdy gęstość wektora (X,Y) dana jest następującym wzorem (z odpowiednio dobraną stałą K):

$$\text{(i)}\quad \text{f(x,y)} = \begin{cases} K(x+y), & \text{dla } 0 \leqslant x,y \leqslant 1; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \qquad (0)$$

$$\text{(ii)}\quad \text{f(x,y)} = \begin{cases} K\cos x \cos y, & \text{dla } 0 \leqslant x,y \leqslant \pi/2; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\quad \text{f(x,y)} = \begin{cases} K(2x+y), & \text{dla } x^2+y^2 \leqslant 1; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$(iv)\, f(x,y) = \begin{cases} K(x+y)^2, & \text{dla } 0 \leqslant x,y \leqslant 1; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$(v)\, f(x,y) = \begin{cases} K(x+y^2), & \text{dla } x^2+y^2 \leqslant 1; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zadanie7 Niech X i Y będą dwoma zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach dwupunktowych

$$P(X=0) = P(Y=0) = 1-p,\ P(X=1) = P(Y=1) = p.$$

Niech zmienna Z będzie równa funkcji charakterystycznej zdarzenia $\{X+Y=0\}$. Znaleźć $E(X|Z)$ oraz $E(Y|Z)$ i sprawdzić czy są niezależne.

Zadanie8 Kupujemy Y kuponów loterii, gdzie zmienna Y ma rozkład Poissona o parametrze λ. Każdy kupon może wygrać nagrodę z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Znaleźć warunkową wartość oczekiwaną liczby wygranych nagród X pod warunkiem liczby zakupionych kuponów Y. Obliczyć wartość oczekiwaną EX.