Procesy Stochastyczne

Zestaw zadań numer 4

Zad.1 Pokazać, że dla czasu dyskretnego, definicja momentu stopu jest równoważna warunkowi

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Zad.2 Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz filtracja $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Załóżmy, że τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sprawdzić, czy

(i) $\tau + 2$ jest momentem zatrzymania;

(ii) $\tau - 2$ jest momentem zatrzymania;

(iii) τ^2 jest momentem zatrzymania.

Zad.3 Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz filtracja $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Załóżmy, że τ_1 oraz τ_2 są momentami zatrzymania. Pokazać, że

(i) $\max\{\tau_1, \tau_2\}$ jest momentem zatrzymania;

(ii) $\tau_1 + \tau_2$ jest momentem zatrzymania.

Zad.4 Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.

Zad.5 Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest procesem stochastycznym, a B zbiorem borelowskim w $\mathbb{R}$. Pokazać, że $\tau^B = \inf\{n, X_n \in B\}$ jest momentem zatrzymania.

Zad.6 Niech $(Y, \mathcal{F})$ będzie submartyngałem oraz niech S i T będą momentami stopu spełniającymi nierówności $0 \le S \le T \le N$ dla jakiegoś określonego N. Pokazać, że $E(Y_0) \le E(Y_S) \le E(Y_T) \le E(Y_N)$.

Zad.7 Niech $\mathcal{F}$ będzie filtracją. Dla dowolnego momentu stopu T (z dokładnością do $\mathcal{F}$), niech $\mathcal{F}_T$ oznacza zbiór takich zdarzeń A, że dla każdego n, $A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$. Niech S i T będą momentami stopu.

(i) Pokazać, że $\mathcal{F}_T$ jest σ-ciałem, oraz, iż T jest mierzalne względem tego σ-ciała.

(ii) Pokazać, że jeżeli $A \in \mathcal{F}_S$, to $A \cap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_T$.

(iii) Niech $S \le T$. Pokazać, że $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_t$.

Zad.8 Niech X_1, X_2, $\ldots$ będzie ciągiem nieujemnych niezależnych zmiennych losowych. niech $N(t) := max\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \le t\}$. Pokazać, że $N(t)+1$ jest momentem stopu względem odpowiedniej filtracji.

Zad.9 Niech $(Y, \mathcal{F})$ będzie submartyngałem oraz $x > 0$. Pokazać, że

$$P[\max_{0\le m\le n} Y_m \ge x] \le \frac{1}{x} E(Y_n^+)$$

Zad.10 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie oraz niech $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 1/2$ (rzuty symetryczną monetą, jedynka to orzeł). Niech $\xi_n = X_1 + 2X_2 + \ldots + 2^{n-1}X_n$ (w każdym kolejnym rzucie stawiamy dwa razy więcej niż poprzednio, zaczynając od 1PLN). Niech $\tau = min\{n : \text{w } n\text{-tym rzucie wypadł orzeł}\}$.

(i) Pokazać, że $P(\tau < \infty) = 1$

(ii) Pokazać, że $\xi_{min\{\tau,n\}}$ jest martyngałem (wygrana po n rundach).

(iii) Podać wzór na ξ_τ.

(iv) Pokazać, że $E(\xi_{\tau-1}) = -\infty$.