Procesy Stochastyczne

Zestaw zadań numer 5

Procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ nazywamy proces $\{N_t, t \geq 0\}$ spełniający następujące warunki:

(1) $N_0 = 0$ a.s.,
(2) $\{N_t, t \geq 0\}$ ma przyrosty niezależne,
(3) dla każdej pary (s,t) $(t > s)$ zmienna losowa $N_t - N_s$, ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t-s)$.

Zad.1 Dany jest proces:

$$Z_t = t^2 + Xt + Y, \quad t \geq 0$$

Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu Z_t jeśli X i Y są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi.

Zad.2 Dany jest porces Poissona $\{N_t, t \geq 0\}$ z intensywnością $\lambda > 0$

(a) Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu Poissona.
(b) Czy zmienne losowe N_t i N_s dla $s > t$ są niezależne?
(c) Policzyć $P(N_s = k, N_t = n)$ oraz $P(N_t = n | N_s = k)$ dla $0 \leq s < t$

Zad.3 Pokazać, że prawie wszystkie trajektorie procesu Poissona są rosnące oraz

$$\lim_{t \to +\infty} N_t = +\infty \quad \text{a.s.}$$

Zad.4 Dane są dwa niezależne procesy Poissona (N_t^1 i N_t^2). Pokazać, że $N_t^1 + N_t^2$ jest procesem Poissona. Z jaką intensywnością?

Zad.5 Pokazać, że

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \quad \text{a.s.}$$

Zad.6 Obliczyć funkcję charakterystyczną procesu Poissona oraz funkcję generującą momenty.

Zad.7 Dany jest proces: $X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \quad t \geq 0$ gdzie $\{N_t\}$ jest procesem Poissona z intensynością λ, a $\{Y_i\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Policzyć $E(X_t)$ oraz $D^2(X_t)$.

Zad.8 *Policzyć funkcję generującą momenty dla Procesu z poprzedniego zadania.