Procesy Stochastyczne

Zestaw zadań numer 6

Procesem Wienera będziemy nazywali proces $\{W_t\ t \geq 0\}$ spełniający następujące cztery warunki:

(1) $W_0 = 0$,
(2) Przyrosty $\{W_t\ t \geq 0\}$ są niezależne,
(3) Dla dowolnych $t > s$ $W_t - W_s$ mają rozkład $\mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$,
(4) W_t ma ciągłe trajektorie.

Zad.1 Niech W będzie procesem Wienera. Zbadać, czy następujące procesy też są procesami Wienera:
(1) $-W_t$
(2) $\sqrt{t}W_1$
(3) $W_{2t} - W_t$
(4) $\dfrac{1}{\sqrt{c}}W_{ct}$, $c > 0$
(5) $W_{T+t} - W_T$, dla $T > 0$

Zad.2 Niech (W_t^1) oraz (W_t^2) będą niezależnymi procesami Wienera. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}_+$ proces

$$aW_t^1 + bW_t^2$$

jest procesem Wienera?

Zad.3 Jak wygląda dwuwymiarowy rozkład wektora losowego:
(1) $(W_t - W_s, W_s)$ dla $t > s$?
(2) (W_t, W_s)?

Zad.4 Obliczyć $E[W_s|W_t]$, gdy
(1) $s \geq t$
(2) $s < t$

Zad.5 Obliczyć funkcję autokowariancji procesu Wienera.

Zad.6 Pokazać, że

$$E\Big[|W_t - W_s|^2\Big] = |t-s|$$

Znaleźć $E[W_t^4]$.

Zad.7 Dany jest proces Wienera W. Czy następujące procesy są stacjonarne w szerszym sensie:
(1) Czy proces $\{W_t\}_{t>0}$?
(2) Czy proces $\frac{W_t}{\sqrt{t}}$ $(t > 0)$?