1. Procesy stochastyczne, zestaw zadań numer 8, 2012.

Zad. 1.1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz ciąg zmiennych losowych $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pokazać, że $\Sigma_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ jest najmniejszą filtracją, względem której ciąg $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest adaptowany, tzn. jeśli ciąg ten jest adaptowany względem jakiejś filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to $\Sigma_n \subset \mathcal{F}_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 1.2. Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P). Pokazać, ze jeżeli ξ_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$, to $E(\xi_n) = E_(\xi_0)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 1.3. Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P). Pokazać, ze jeżeli ξ_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$, to jest on też martyngałem względem filtracji $\Sigma_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$

Zad. 1.4. Niech $X = \{X_t | \ t \in [0,T]\}$ będzie supermartyngałem. Pokazać, że X jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$

Zad. 1.5. Niech $\eta_1, \eta_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach

$$P(\eta_n = 1) = P(\eta_n = -1) = \frac{1}{2}$$

(na przykład: ciąg rzutów monetą). Filtracja $\Sigma_n := \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Które z poniższych ciągów zmiennych losowych są martyngałami względem powyższej filtracji:

(a) $S_n = \xi_1$;
(b) $S_n = \xi_n - \xi_1$;
(c) $S_n = \xi_{n-1}$;
(d) $S_n = \xi_{n+1}$;
(e) $S_n = \xi_1 + 2\xi_2 + \ldots + n\xi_n$;
(f) $S_n = 2\xi_n^2 - 1/2$;

Zad. 1.6. Niech ξ_n oznacza symetryczne błądzenie losowe, tzn. $\xi_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$, gdzie $\eta_1, \eta_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach

$$P(\eta_n = 1) = P(\eta_n = -1) = \frac{1}{2}$$

(na przykład: ciąg rzutów monetą). Pokazać, że ciąg zmiennych losowych

(a) $X_n := \xi_n^2 - n$
(b) $Y_n = (-1)^n \cos(\pi\xi_n)$

jest martyngałem względem filtracji $\Sigma_n := \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

Zad. 1.7. Pokazać że martyngałami względem naturalnej filtarcji procesu $\{W_t \ t \geq 0\}$ są procesy:

(1) $\{W_t, \ t \geq 0\}$
(2) $\{W_t^2 - t, \ t \geq 0\}$

Zad. 1.8. Dany jest proces Poissona $\{N_t, \ t \geq 0\}$ z intensywnośćią λ. Pokazać, że proces $\{N_t - \lambda t, \ t \geq 0\}$ oraz $\{(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t, \ t \geq 0\}$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez $\{N_t, t \geq 0\}$.

Zad. 1.9. Gra „Teraz czerwony" może być rozgrywana przez pojedynczego gracza grającego dobrze potasowaną talią 52 kart. W chwilach $n = 1, 2, \dots, 52$ kolejno odkrywamy karty z talii, aby zaobserwować ich kolor. Dokładnie raz, w trakcie całej gry, gracz ma, tuż przed odsłonięciem wybranej karty powiedzieć „teraz czerwone". Gracz wygrywa, jeśli wybrana karta okaże się być czerwona. Niech R_n oznacza liczbę czerwonych kart wśród kart jeszcze nie odsłoniętych po odsłonięciu n-tej karty z talii. Pokazać, że

$$X_n := \frac{R_n}{52 - n}, \qquad 0 \leq n \leq 52$$

określa martyngał.

Zad. 1.10. Niech $(Y, \mathcal{F})$ będzie martyngałem takim, że $E[Y_n^2] < \infty)$ dla każdego n. Pokazać, że dla $i \leq j \leq k$:

(a) $E[(Y_k - Y_j)Y_i] = 0$

(b) $E[(Y_k - Y_j)^2|\mathcal{F}_i] = E[Y_k^2|\mathcal{F}_i] - E[Y_j^2|\mathcal{F}_i]$

(c) Załóżmy dodatkowo, iż istnieje stała K taka, że $E[Y_n^2] \leq K$ dla każdego n. Pokazać, że ciąg $\{Y_n\}$ jest zbieżny w $\mathcal{L}_2$.