Procesy Stochastyczne, 09.12.2014.

Zestaw zadań numer 8

Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $\xi_1, \xi_2, \ldots$ jest **jednostajnie całkowalny**, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : \int_{\{|\xi_n| > M\}} |\xi_n| dP < \epsilon$$

dla wszystkich $n = 1, 2, 3, ...$

Zad.1 Pokazać, że zmienna losowa ξ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : \int_{\{|\xi| > M\}} |\xi| dP < \epsilon$$

Zad.2 Pokazać, że ciąg $\xi_n = n\mathbf{1}_{(0,1/n)}$ nie jest jednostajnie całkowalny (standardowa przestrzeń $[0, 1]$ z miarą Lebesgue'a).

Zad.3 Pokazać, iż jeżeli ξ jest całkowalna to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że:

$$P(A) < \delta \to \int_A |\xi| dP < \epsilon$$

Zad.4 Niech ξ będzie całkowalną zmienną losową, a $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ... filtracją. Pokazać, że $E(\xi|\mathcal{F}_n)$ jest jednostajnie całkowalnym martyngałem.

Zad.5 Pokazać, że jednostajnie całkowalny ciąg zmiennych losowych ξ_n jest ograniczony w L^1 ($\sup_n E(|\xi_n|) < \infty$).

Z zadań tych wynika, iż każdy jednostajnie całkowalny martyngał spełnia założenia tw. Dooba, więc jest zbieżny p.n. do całkowalnej zmiennej losowej. Można pokazać, iż zachodzi także zbieżność z L^1 (jest to zadanie dla chętnych! można to pokazać dla supermartyngału/submartyngału.). Dla takich martyngałów mamy więc wygodną reprezentację $\xi_n = E(\xi|\mathcal{F}_n)$, gdzie ξ to granica ξ_n w L^1, a $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.