Zestaw 9

---

1. Niech Z_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i zerowej wartości oczekiwanej. Niech

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_{k-1} \cdot Z_k.$$

Udowodnić, że $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem względem $(\sigma(Z_1, \dots, Z_n))_{n=1}^{\infty}$.

2. Niech X_n będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych. Czy z faktu $E|X_n| \longrightarrow 0$ wynika że ciąg X_n jest jednostajnie całkowalny? Odpowiedź uzasadnij.

3. Pokazać, że

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \quad a.s.,$$

gdzie $\{N_t\}_{t \geq 0}$ jest procesem Poissona.

4. Niech $\{W_t\}_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera oraz niech $M_1 > 0$, $M_2 > 0$. Wyznacz $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} P(-M_2 \cdot t < W_t < M_1 \cdot t)$.

5. Niech $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem ograniczonych niezależnych zmiennych losowych. Podaj warunek konieczny oraz wystarczający, by proces $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ był supemartyngałem, gdzie $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} Y_i$.

6. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do momentu aż wypadnie taka sama liczba oczek na obu kostkach. Ile wynosi oczekiwana wartość łącznej liczby wyrzuconych oczek? (dodajemy kolejno wyrzucone sumy oczek na obu kostkach aż do ostatniego rzutu).

7. Niech N_t, $t \geq 0$, będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Policz $P(N_t = n | N_s = k)$, gdzie $k < n$. Rozważ dwa przypadki: $t < s$ oraz $t \geq s$.

8. Niech X_n, $n \in \mathbb{N}$ będzie procesem stochastycznym generującym filtrację. Niech

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{N} | \exists m \leq n \colon X_m < n\}.$$

Czy τ jest momentem stopu?

9. Pokaż, że jednostajnie całkowalny martyngał ξ_n posiada reprezentację $\xi_n = E(\xi|F_n)$ dla pewnej zmiennej losowej całkowalnej ξ oraz filtracji $F_n = \Sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (wskazówka twierdzenie Dooba)

10. Niech $X = \{X_t : t \in [0, T]\}$ będzie supermartyngałem. Pokazać, że X jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $EX_T = EX0$.

11. Niech (W_t^1) oraz (W_t^2) będą niezależnymi procesami Wienera. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}_+$ proces
$$aW_t^1 + bW_t^2$$
jest procesem Wienera?

12. Jak wygląda dwuwymiarowy rozkład wektora losowego:
    (a) $(W_t - W_s, W_s)$ dla $t > s$?
    (b) (W_t, W_s)?