Zbieżność zmiennych losowych. Definicje.

Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi na pewnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P). Mówimy, że

1. $X_n \longrightarrow X$ **prawie na pewno**
   (oznaczenia: $X_n \longrightarrow X$ p.n. lub $X_n \longrightarrow X$ p.w. lub $X_n \xrightarrow{1} X$), gdy

   $$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \longrightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega),) = 1;$$

2. $X_n \longrightarrow X$ w L^q $(q \geqslant 1)$ co ozn. $X_n \xrightarrow{L^q} X$, gdy

   $$E(|X_n - X|^q) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty;$$

   W tym rodzaju zbieżności zazwyczaj zakładamy istnienie $q-$tych momentów, tj. $E|X_n|^q < \infty$. Zbieżność w L^2 nazywamy **zbieżnością średniokwadratową**, a zbieżność w L^1 **zbieżnością wg średniej**.

3. $X_n \longrightarrow X$ **według prawdopodobieństwa** (lub: **stochastycznie**) co oznaczamy $X_n \xrightarrow{s} X$ lub $X_n \xrightarrow{P} X$, gdy

   $$\forall \varepsilon \; P(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty;$$

4. $X_n \longrightarrow X$ **według rozkładów** (również: **zbieżność słaba, zbieżność wg dystrybuant**), co oznaczamy $X_n \xrightarrow{d} X$, gdy (przy oznaczeniach: F_n to dystrybuanta X_n, a F dystrybuanta X)

   $$\forall x : \; F \text{ jest ciągła w } x \implies F_n(x) \longrightarrow F(x), n \longrightarrow \infty.$$

Słaba zbieżność rozkładów: Jeśli $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ jest ciągiem rozkładów prawdopodobieństwa z dystrybuantami odpowiednio F, F_1, $F_2, \ldots$ oraz zachodzi

$$\forall x : \; F \text{ jest ciągła w } x \implies F_n(x) \longrightarrow F(x), n \longrightarrow \infty.$$

to mówimy że ciąg μ_n jest słabo zbieżny do μ.

Uwaga1: Widać, że słaba zbieżność dla ciągu zmiennych losowych X_n są zdeterminowana tylko i wyłącznie przez rozkłady zmiennych X_n

Uwaga2: Zawsze spełnione są następujące implikacje:

1. $X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{d} X$
2. $X_n \xrightarrow{1} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$
3. $X_n \xrightarrow{L^p} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ (dla dowolnego $p \geqslant 1$)

Uwaga3: Użyteczne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie: μ_n jest słabo zbieżny do $\mu \iff$ dla dowolnej funkcji ciągłej i ograniczonej $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zachodzi $\int\limits_{\mathbb{R}} f d\mu_n \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} f d\mu_n$.

Wniosek: X_n jest zbieżny do X wg rozkładów $\iff$ dla dowolnej funkcji ciągłej i ograniczonej $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zachodzi $E(f(X_n)) \longrightarrow Ef(X)$.