Matematyczne czwartki: rekurencja w kombinatoryce

Joanna Orewczyk

IM UJ

7 listopada 2019

Literatura

1. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN
2. K. E. Ross, Ch. R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN
3. M. Zakrzewski, *Matematyka dyskretna*, Oficyna Wydawnicza GiS
4. Ważniak, http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Matematyka_dysk
5. wieże Hanoi, https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

O co chodzi z tą kombinatoryką i rekurencją?

Przykładowy problem

Mamy pudełko wymiaru 2×10. W nim chcemy ułożyć kostki domina wymiaru 1×2. Na ile sposobów możemy to zrobić?

O co chodzi z tą kombinatoryką i rekurencją?

Przykładowy problem

Mamy pudełko wymiaru 2×10. W nim chcemy ułożyć kostki domina wymiaru 1×2. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Oznaczmy symbolem K_n - liczbę sposobów na jakie możemy ułożyć kostki domina w pudełku o wymiarach $2 \times n$.

O co chodzi z tą kombinatoryką i rekurencją?

Przykładowy problem

Mamy pudełko wymiaru 2×10. W nim chcemy ułożyć kostki domina wymiaru 1×2. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Oznaczmy symbolem K_n - liczbę sposobów na jakie możemy ułożyć kostki domina w pudełku o wymiarach $2 \times n$.

Szukamy więc K_{10}. Zacznijmy powoli

O co chodzi z tą kombinatoryką i rekurencją?

Przykładowy problem

Mamy pudełko wymiaru 2×10. W nim chcemy ułożyć kostki domina wymiaru 1×2. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Oznaczmy symbolem K_n - liczbę sposobów na jakie możemy ułożyć kostki domina w pudełku o wymiarach $2 \times n$.

Szukamy więc K_{10}. Zacznijmy powoli

$K_1 = 1,$

O co chodzi z tą kombinatoryką i rekurencją?

Przykładowy problem

Mamy pudełko wymiaru 2×10. W nim chcemy ułożyć kostki domina wymiaru 1×2. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Oznaczmy symbolem K_n - liczbę sposobów na jakie możemy ułożyć kostki domina w pudełku o wymiarach $2 \times n$.

Szukamy więc K_{10}. Zacznijmy powoli

$K_1 = 1, \;\; K_2 = 2,$

O co chodzi z tą kombinatoryką i rekurencją?

Przykładowy problem

Mamy pudełko wymiaru 2×10. W nim chcemy ułożyć kostki domina wymiaru 1×2. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Oznaczmy symbolem K_n - liczbę sposobów na jakie możemy ułożyć kostki domina w pudełku o wymiarach $2 \times n$.

Szukamy więc K_{10}. Zacznijmy powoli

$K_1 = 1, \;\; K_2 = 2, \;\; K_3 = 3,$

O co chodzi z tą kombinatoryką i rekurencją?

Przykładowy problem

Mamy pudełko wymiaru 2×10. W nim chcemy ułożyć kostki domina wymiaru 1×2. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Oznaczmy symbolem K_n - liczbę sposobów na jakie możemy ułożyć kostki domina w pudełku o wymiarach $2 \times n$.

Szukamy więc K_{10}. Zacznijmy powoli

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad K_3 = 3, \quad K_n = K_{n-1} + K_{n-2}.$$

O co chodzi z tą kombinatoryką i rekurencją?

Przykładowy problem

Mamy pudełko wymiaru 2×10. W nim chcemy ułożyć kostki domina wymiaru 1×2. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Oznaczmy symbolem K_n - liczbę sposobów na jakie możemy ułożyć kostki domina w pudełku o wymiarach $2 \times n$.

Szukamy więc K_{10}. Zacznijmy powoli

$K_1 = 1, \;\; K_2 = 2, \;\; K_3 = 3, \;\; K_n = K_{n-1} + K_{n-2}.$

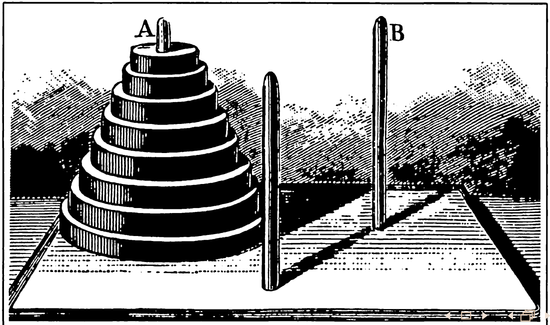
$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$

Wieże Hanoi

Zadanie francuskiego matematyka Edouarda Lucasa z 1883 roku

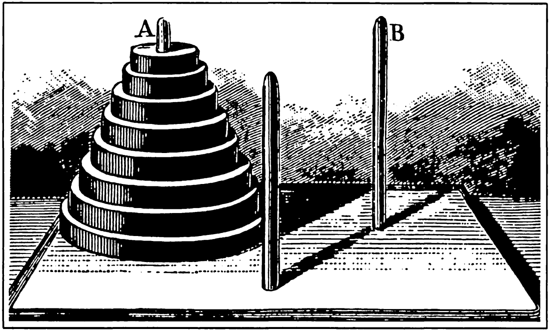
Dane są trzy iglice. Na jednej z nich nałożone jest 8 krążków (na dole o największej średnicy, na nim krążek o mniejszej itd.). Ile najmniej ruchów należy wykonać aby przełożyć wszystkie krążki z pierwszej iglicy na której inną tak aby spełniane były dwa warunki:

1. można przekładać po jednym krążku
2. krążek większy nigdy nie może leżeć na krążku mniejszym?



Wieże Hanoi, c.d.

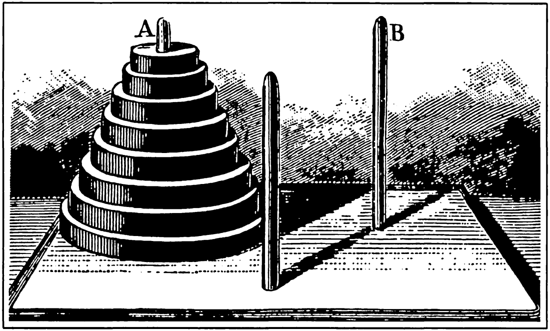
Oznaczmy: T_n - najmniejsza liczba ruchów do przeniesienia n krążków.



Wieże Hanoi, c.d.

Oznaczmy: T_n - najmniejsza liczba ruchów do przeniesienia n krążków.

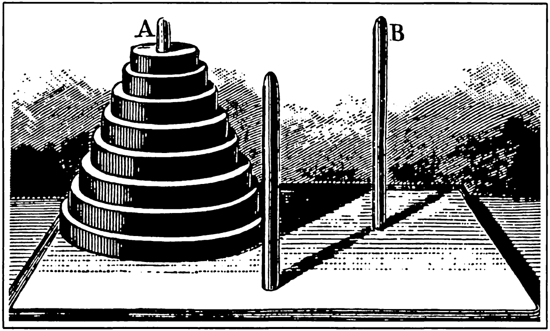
$$T_1 = 1,$$



Wieże Hanoi, c.d.

Oznaczmy: T_n - najmniejsza liczba ruchów do przeniesienia n krążków.

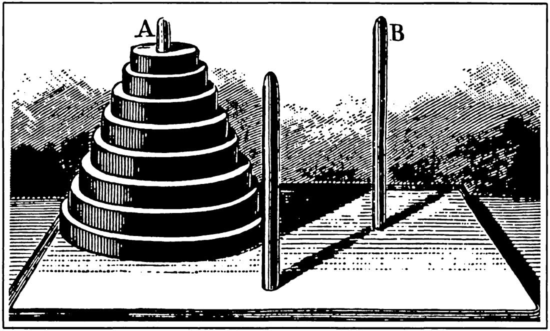
$$T_1 = 1, \; T_2 = 3,$$



Wieże Hanoi, c.d.

Oznaczmy: T_n - najmniejsza liczba ruchów do przeniesienia n krążków.

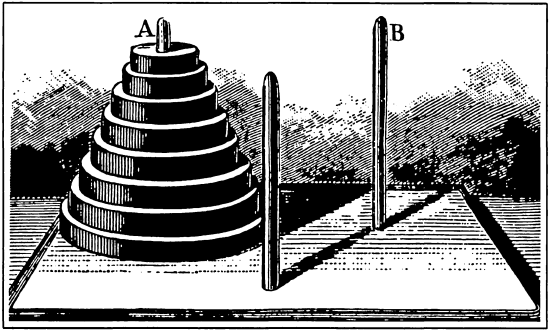
$$T_1 = 1,\ T_2 = 3,\ T_3 = 7,$$



Wieże Hanoi, c.d.

Oznaczmy: T_n - najmniejsza liczba ruchów do przeniesienia n krążków.

$$T_1 = 1,\ T_2 = 3,\ T_3 = 7,$$
$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$



Wieże Hanoi, c.d.

Mamy rekurencję:

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_1 = 1 \end{cases}$$

Wieże Hanoi, c.d.

Mamy rekurencję:

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2 = 2(T_{n-1} + 1) \\ T_1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Wieże Hanoi, c.d.

Mamy rekurencję:

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2 = 2(T_{n-1} + 1) \\ T_1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Co przy oznaczeniu $U_n = T_n + 1$ daje

$$\begin{cases} U_n = 2U_{n-1} \\ U_1 = 2 \end{cases}$$

Wieże Hanoi, c.d.

Mamy rekurencję:

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2 = 2(T_{n-1} + 1) \\ T_1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Co przy oznaczeniu $U_n = T_n + 1$ daje

$$\begin{cases} U_n = 2U_{n-1} \\ U_1 = 2 \end{cases}$$

Czyli $U_n = 2^n$, więc $T_n = 2^n - 1$.

Zadanie geometryczne

Jaka jest największa liczba obszarów L_n wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

Zadanie geometryczne

Jaka jest największa liczba obszarów L_n wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

- $L_0 = 1$,

Zadanie geometryczne

Jaka jest największa liczba obszarów L_n wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

- $L_0 = 1$,
- $L_1 = 2$,

Zadanie geometryczne

Jaka jest największa liczba obszarów L_n wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

- $L_0 = 1$,
- $L_1 = 2$,
- $L_2 = 4$,

Zadanie geometryczne

Jaka jest największa liczba obszarów L_n wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

- $L_0 = 1$,
- $L_1 = 2$,
- $L_2 = 4$,
- $L_3 = 7$,

Zadanie geometryczne

Jaka jest największa liczba obszarów L_n wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

- $L_0 = 1$,
- $L_1 = 2$,
- $L_2 = 4$,
- $L_3 = 7$,
- Dla $n > 0$, n-ta prosta zwiększa liczbę obszarów o k wtedy i tylko wtedy, gdy przecina k zastanych obszarów, a tak się dzieje gdy przecina $k - 1$ prostych w różnych punktach.

Zadanie geometryczne

Jaka jest największa liczba obszarów L_n wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

- $L_0 = 1$,
- $L_1 = 2$,
- $L_2 = 4$,
- $L_3 = 7$,
- Dla $n > 0$, n-ta prosta zwiększa liczbę obszarów o k wtedy i tylko wtedy, gdy przecina k zastanych obszarów, a tak się dzieje gdy przecina $k - 1$ prostych w różnych punktach.
- $L_n = L_{n-1} + n$.

Zadanie geometryczne - rozwiązanie rekurencji

Tym razem mamy rekurencję

$$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + n \\ L_0 = 1 \end{cases}$$

Zadanie geometryczne - rozwiązanie rekurencji

Tym razem mamy rekurencję

$$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + n \\ L_0 = 1 \end{cases}$$

$$L_n = L_{n-1} + n =$$

Zadanie geometryczne - rozwiązanie rekurencji

Tym razem mamy rekurencję

$$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + n \\ L_0 = 1 \end{cases}$$

$$L_n = L_{n-1} + n = L_{n-2} + (n-1) + n =$$

Zadanie geometryczne - rozwiązanie rekurencji

Tym razem mamy rekurencję

$$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + n \\ L_0 = 1 \end{cases}$$

$$L_n = L_{n-1} + n = L_{n-2} + (n-1) + n =$$

$$L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \ldots =$$

Zadanie geometryczne - rozwiązanie rekurencji

Tym razem mamy rekurencję

$$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + n \\ L_0 = 1 \end{cases}$$

$$L_n = L_{n-1} + n = L_{n-2} + (n-1) + n =$$

$$L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \ldots =$$

$$= L_0 + 1 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Rozwiązywanie rekurencji liniowej

Definicja rekurencji liniowej rzędu k

Dla ustalonych niezerowych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_k$ i ustalonego ciągu liczbowego (f_n) rekurencją liniową nazywamy

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k} + f_n$$

Rozwiązywanie rekurencji liniowej

Definicja rekurencji liniowej rzędu k

Dla ustalonych niezerowych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_k$ i ustalonego ciągu liczbowego (f_n) rekurencją liniową nazywamy

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k} + f_n$$

Rozwiązań rekurencji jednorodnej szukamy w postaci $x_n = \lambda^n$, co po wstawieniu do równania daje

$$\lambda^n = a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_k \cdot \lambda^{n-k}$$

Rozwiązywanie rekurencji liniowej

Definicja rekurencji liniowej rzędu k

Dla ustalonych niezerowych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_k$ i ustalonego ciągu liczbowego (f_n) rekurencją liniową nazywamy

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k} + f_n$$

Rozwiązań rekurencji jednorodnej szukamy w postaci $x_n = \lambda^n$, co po wstawieniu do równania daje

$$\lambda^n = a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_k \cdot \lambda^{n-k}$$

i po skróceniu tzw. równanie charakterystyczne

$$\lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - \ldots - a_k = 0$$

Przykład rozwiązania

Rozważmy rekurencję

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Przykład rozwiązania

Rozważmy rekurencję

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$.

Przykład rozwiązania

Rozważmy rekurencję

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$.
Rozwiązanie ogólne rekurencji to $x_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n = A + B \cdot 2^n$.

Przykład rozwiązania

Rozważmy rekurencję

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$.
Rozwiązanie ogólne rekurencji to $x_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n = A + B \cdot 2^n$.
A szczególne dostajemy uwzględniając warunki początkowe:
$1 = x_1 = A + 2B$, $3 = x_2 = A + 4B$, czyli $A = -1$, $B = 1$, więc

$$x_n = 2^n - 1$$

Inne wersje wcześniejszych zadań

Wieże Hanoi inaczej

Jaki jest najmniejszy łączny ciężar krążków, przy założeniu, że krążek o numerze i ma ciężar i?

Inne wersje wcześniejszych zadań

Wieże Hanoi inaczej

Jaki jest najmniejszy łączny ciężar krążków, przy założeniu, że krążek o numerze i ma ciężar i?

(odp. $b_n = n + 2b_{n-1}, B_1 = 1$, czyli $b_n = 2 \cdot 2^n - 2 - n$)

Inne wersje wcześniejszych zadań

Wieże Hanoi inaczej

Jaki jest najmniejszy łączny ciężar krążków, przy założeniu, że krążek o numerze i ma ciężar i?

(odp. $b_n = n + 2b_{n-1}, B_1 = 1$, czyli $b_n = 2 \cdot 2^n - 2 - n$)

Zadanie geometryczne inaczej

Jaka jest maksymalna liczba O_n obszarów ograniczonych wyznaczonych przez n prostych?

Inne wersje wcześniejszych zadań

Wieże Hanoi inaczej

Jaki jest najmniejszy łączny ciężar krążków, przy założeniu, że krążek o numerze i ma ciężar i?

(odp. $b_n = n + 2b_{n-1}, B_1 = 1$, czyli $b_n = 2 \cdot 2^n - 2 - n$)

Zadanie geometryczne inaczej

Jaka jest maksymalna liczba O_n obszarów ograniczonych wyznaczonych przez n prostych?

($O_0 = 0, O_1 = 0, O_2 = 0, O_3 = 1, O_4 = 3$, Ogólnie n-ta prosta przecinając k prostych w k różnych punktach, to dostajemy $k - 1$ obszarów ograniczonych i 2 nieograniczone, czyli $O_n = O_{n-1} + (n-2)$ stąd $O_n = L_n - 2n$.)