UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI
INSTYTUT MATEMATYKI

Marcin Kulczycki

Własność jednostajnego śledzenia pseudoorbit dla homeomorfizmów i odwzorowań ciągłych

Praca magisterska napisana pod kierunkiem pana profesora Romana Srzednickiego

Kraków 2000

Autor wyraża podziękowania

Panu profesorowi Romanowi Srzednickiemu
za pomoc udzieloną mi w czasie pisania tej pracy,
Panu docentowi doktorowi habilitowanemu
Jerzemu Ombachowi
za zwrócenie mojej uwagi na rezultaty
które zainspirowały powstanie tej pracy,
Fundacji Stefana Batorego
za umożliwienie mi odbycia trzymiesięcznego
stażu naukowego na Uniwersytecie Oksfordzkim.

Spis treści

1 Wstęp

Pojęcie własności śledzenia pseudoorbit jest znanym i popularnym obiektem badań, który pojawił się w kontekście analizowania takich pojęć jak C^0-stabilność czy topologiczna stabilność układu dynamicznego na zwartej rozmaitości. Spora ilość prac wykorzystuje w sposób mniej bądź też bardziej związany to pojęcie (patrz rozdział trzeci oraz bibliografia). Uzyskiwane rezultaty formułowane są często jako typowe własności dyfeomorfizmów ustalonej klasy na konkretnej rozmaitości bądź też klasie rozmaitości.

Stosunkowo nowym natomiast pomysłem są próby wyprowadzenia z tego pojęcia pochodnej, mocniejszej własności, której zadaniem jest również uchwycenie typowych zachowań w przestrzeni dyskretnych układów dynamicznych na zwartych rozmaitościach. Własność tą nazwano własnością jednostajnego śledzenia pseudoorbit.

Kazuhiro Sakai udowodnił w swojej pracy [11], że każdy dyfeomorfizm domkniętej gładkiej rozmaitości spełniający Aksjomat A oraz posiadający własność silnej transwersalności posiada C^1-własność jednostajnego śledzenia pseudoorbit (którą w tej pracy oznaczać będziemy angielskim skrótem UPOTP - od uniform pseudo-orbit tracing property). Uzupełniło to rezultat Robinsona [10], który wykazał wynikanie w przeciwną stronę. W pracy autorstwa Rongbao Gu [4] została podjęta próba rozwinięcia tego pojęcia. W artykule tym rozważana jest własność jednostajnego śledzenia pseudoorbit dla ciągłych odwzorowań przestrzeni metrycznej w samą siebie. Sformułowane są również dwie mocne hipotezy, mianowicie generyczność UPOTP w przestrzeni ciągłych odwzorowań zwartej rozmaitości w samą siebie, oraz równoważność pojęcia UPOTP oraz własności stabilności orbitalnej dla autohomeomorfizmów zwartych rozmaitości wymiaru co najmniej dwa. Autor stara się nie wykorzystywać w swojej pracy pojęć i twierdzeń związanych z rozmaitościami stabilnymi/niestabilnymi, własnościami różniczkowymi odwzorowań i ogólnie obiektami matematycznymi wykraczającymi poza czystą topologię.

Okazuje się jednakże, iż obydwie te hipotezy dają się obalić. Co więcej, UPOTP zdefiniowana bez nawiązywania w jakikolwiek sposób do struktury różniczkowej w przestrzeni rozważanych odwzorowań nie jest własnością żadnego autohomeomorfizmu ani żadnego odwzorowania ciągłego zwartej nie-

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 34C40.

Słowa kluczowe: dyskretny układ dynamiczny na rozmaitości, własność śledzenia pseudoorbit, stabilność orbitalna.

pustej rozmaitości wymiaru dodatniego w samą siebie. Z niniejszej pracy wypływa wniosek, iż przyszłe badania nad UPOTP w przypadku odwzorowań jedynie ciągłych (bez struktury różniczkowej) wymagać będą modyfikacji definicji tego pojęcia wykraczającej poza najbardziej naturalne przeniesienie definicji z przypadku C^1.

2 Definicje i oznaczenia

Poprzez M oznaczać będziemy niepustą rozmaitość topologiczną z topologią pochodzącą od metryki d. Przez $C(M)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich ciągłych autoodwzorowań M, natomiast poprzez $H(M)$ rozumiemy przestrzeń wszystkich autohomeomorfizmów M. Metrykę $\tilde{d}$ na $C(M)$ i $H(M)$ definiujemy w następujący sposób:

$$\tilde{d}(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x))$$

Definicja 2.1 *Dla ustalonego $\delta > 0$ oraz $f \in C(M)$ ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ nazywamy δ-pseudoorbitą f wtedy i tylko wtedy, gdy $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ dla $i \in \mathbb{N}$.*

Definicja 2.2 *Dla każdego $\varepsilon > 0$ mówimy, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ jest ε-śledzona przez $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ z definicji wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x_i, y_i) < \varepsilon$ dla $i \in \mathbb{N}$ (odpowiednio $i \in \mathbb{Z}$, gdy rozważamy ciągi obustronnie nieskończone).*

Definicja 2.3 *Dla każdego $\varepsilon > 0$ mówimy, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ jest ε-zbiorczo śledzony przez $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ z definicji wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{d}(\overline{\{x_i\}}, \overline{\{y_i\}}) < \varepsilon$, gdzie i przebiega $\mathbb{N}$ (odpowiednio $\mathbb{Z}$, gdy rozważamy ciągi obustronnie nieskończone), a $\overline{d}$ jest metryką Hausdorffa pochodzącą od d.*

Definicja 2.4 *Mówimy, że $f \in C(M)$ posiada własność śledzenia pseudoorbit (POTP), jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ mające własność, iż każda δ-pseudoorbita f jest ε-śledzona przez jakąś orbitę f.*

Definicja 2.5 *Mówimy, że $f \in C(M)$ posiada jednostajną własność śledzenia pseudoorbit (UPOTP), jeśli istnieje $\Delta > 0$ taka, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ mająca własność, że dla wszystkich $g \in C(M)$ takich, że $\tilde{d}(f, g) < \Delta$ każda δ-pseudoorbita g jest ε-śledzona przez jakąś orbitę g.*

Uwaga 2.6 Zastępując w powyższej definicji $C(M)$ poprzez $H(M)$ otrzymujemy inną własność śledzenia, którą oznaczać będziemy UPOTP(H). Chociaż UPOTP jest równoważna UPOTP(H) na przestrzeni $H(M)$, to nie jest to widoczne w elementarny sposób, i z tego powodu w dalszej części niniejszej pracy rozważać będziemy zazwyczaj oba przypadki oddzielnie.

Definicja 2.7 *Mówimy, że własność P jest typowa w pewnej przestrzeni, jeśli zbiór elementów tej przestrzeni dla których zachodzi P jest rezydualny, to znaczy jest nadzbiorem przeliczalnego przecięcia jednocześnie otwartych i gęstych podzbiorów tej przestrzeni.*

Definicja 2.8 *$f \in H(M)$ jest C^0-stabilna na zaburzenia, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego g odległego nie więcej niż δ od f każda orbita f jest ε-zbiorczo śledzona przez pewną orbitę g oraz każda orbita g jest ε-zbiorczo śledzona przez pewną orbitę f.*

Definicja 2.9 *$f \in H(M)$ jest C^0-silnie stabilna na zaburzenia, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego g odległego nie więcej niż δ od f każda orbita f jest ε-śledzona przez pewną orbitę g oraz każda orbita g jest ε-śledzona przez pewną orbitę f.*

Definicja 2.10 *$f \in H(M)$ jest topologicznie stabilne, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich g odległych od f nie więcej niż δ istnieje ciągłe odwzorowanie $h : M \to M$ takie, że $h \circ g = f \circ h$ oraz $\bar{d}(h, \mathrm{id}_M) < \varepsilon$.*

Definicja 2.11 *Jeśli Λ jest podzbiorem M niezmienniczym ze względu na pewien dyfeomorfizm f, to mówimy, że ma on strukturę hiperboliczną, jeżeli istnieje pewna metryka Riemannowska $\|\cdot\|$ na przestrzeni stycznej do M taka, że wiązka styczna nad Λ rozkłada się na ciągłą sumę Whitneya Tf-niezmienniczych podwiązek*

$$TM|_\Lambda = E^s \oplus E^u$$

tak, że dla pewnej trójki stałych $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, $N \in \mathbb{N}$

$$\|Tf^n|_{E^s}\| < c\lambda^n$$

$$\|Tf^{-n}|_{E^u}\| < c\lambda^n$$

dla wszystkich $n > N$.

Uwaga 2.12 Istnienie struktury hiperbolicznej na konkretnym zbiorze nie zależy od wyboru metryki $\|\cdot\|$ na TM, patrz na przykład [7].

Definicja 2.13 *Zbiór punktów niebłądzących odwzorowania f (oznaczany $\Omega(f)$) definiujemy następująco:*

$$\Omega(f) := \{x \in M : \exists U_x \ \text{otoczenie } x : \forall_{T>0} \exists t > T : f^t(U_x) \cap U_x \neq \emptyset\}$$

Definicja 2.14 *Dyfeomorfizm f spełnia Aksjomat A, jeśli zachodzą następujące dwa warunki:*

a) $\Omega(f)$ ma strukturę hiperboliczną,

b) punkty okresowe f są gęste w $\Omega(f)$.

Definicja 2.15 *Dla $x \in \Omega(f)$ lokalną rozmaitością stabilną/niestabilną w punkcie x dyfeomorfizmu f spełniającego Aksjomat A nazywamy odpowiednio zbiory postaci*

$$W^s_\varepsilon(x, f) := \{y \in M : \forall n \geq 0 \quad d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon\}$$

$$W^u_\varepsilon(x, f) := \{y \in M : \forall n \geq 0 \quad d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon\}$$

dla $\varepsilon > 0$.

Uwaga 2.16 Istnieją $\varepsilon_0 > 0$ oraz $0 < \lambda < 1$ takie, że dla wszystkich $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ oraz $x \in \Omega(f)$

$$d(f^n(y), f^n(z)) \leq \lambda^n d(y, z) \quad \textit{jeśli} \quad y, z \in W^s_\varepsilon(x, f) \quad \textit{oraz} \quad n \geq 0$$

$$d(f^{-n}(y), f^{-n}(z)) \leq \lambda^n d(y, z) \quad \textit{jeśli} \quad y, z \in W^u_\varepsilon(x, f) \quad \textit{oraz} \quad n \geq 0$$

patrz na przykład [11] strona 100.

Definicja 2.17 *Dla punktu $x \in \Omega(f)$ (f jak w powyższej definicji) rozmaitością stabilną/niestabilną w punkcie x dyfeomorfizmu f nazywamy zbiory*

$$W^s(x, f) := \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W^s_{\varepsilon_0}(f^n(x), f))$$

$$W^u(x, f) := \bigcup_{n \geq 0} f^{n}(W^u_{\varepsilon_0}(f^{-n}(x), f))$$

Uwaga 2.18 $\Omega(f)$ rozkłada się na sumę podstawowych zbiorów $\Lambda_i(f)$

$$\Omega(f) = \Lambda_1(f) \cup \ldots \cup \Lambda_l(f)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$W^s(\Lambda_i(f), f) := \bigcup_{x \in \Lambda_i(f)} W^s(x, f)$$

$$W^u(\Lambda_i(f), f) := \bigcup_{x \in \Lambda_i(f)} W^u(x, f)$$

zachodzi własność

$$M = \bigcup_{i=1}^{l} W^s(\Lambda_i(f), f) = \bigcup_{i=1}^{l} W^u(\Lambda_i(f), f)$$

patrz na przykład [11] strona 100.

Definicja 2.19 *Dyfeomorfizm f spełniający Aksjomat A ma własność silnej transwersalności z definicji wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in M$ rozmaitość stabilna i niestabilna są transwersalne w tym punkcie, to znaczy przestrzenie styczne do nich rozpinają przestrzeń styczną do M w punkcie x*

$$T_x M = T_x W^s(x, f) + T_x W^u(x, f)$$

Definicja 2.20 *$f \in H(M)$ jest ekspansywny jeśli istnieje stała ekspansywności $\epsilon > 0$ o następującej własności: jeśli $d(f^n(x), f^n(y)) \le \epsilon$ dla $n \in \mathbb{Z}$ to $x = y$.*

Definicja 2.21 *Jeśli C jest skończonym zbiorem (zwanym zbiorem symboli), to na przestrzeni $C^{\mathbb{Z}}$ możemy rozważać metrykę*

$$d(\{x_i\}, \{y_i\}) := \begin{cases} 2^{-m} & dla\ x_0 = y_0 \\ 1 & dla\ x_0 \neq y_0 \end{cases}$$

gdzie m jest największą liczbą taką, że $x_n = y_n$ dla $|n| < m$.

Subshiftem nazywamy wtedy domknięty podzbiór tej przestrzeni niezmienniczy ze względu na odwzorowanie shiftu σ zdefiniowane następująco:

$$(\sigma(\{x_i\}))_j := x_{j+1}$$

Definicja 2.22 *Subshift jest skończonego typu, jeśli istnieje taki zbiór bloków z których wszystkie są tej samej skończonej długości, że ciąg z $C^{\mathbb{Z}}$ należy do tego subshiftu wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wycinek takiej właśnie długości jest elementem tego zbioru bloków.*

3 Przegląd wybranych rezultatów związanych z pojęciem POTP

W niniejszym oraz kolejnym rozdziale w celu uzgodnienia terminologii oraz ujednolicenia sposobu prezentacji wyników sformułowanie niektórych twierdzeń jest nieco inne niż w oryginalnych pracach.

W 1979 roku w *Springer Lecture Notes* ukazała się seria powiązanych ze sobą artykułów traktujących o własnościach dynamicznych odwzorowań na rozmaitościach zwartych. W jednej z tych prac Rufus Bowen stwierdził, iż najważniejszą spośród własności odwzorowań spełniających Aksjomat A jest własność śledzenia pseudoorbit. Równolegle ukazujące się prace zawierały rezultaty wiążące pojęcie POTP z dynamiką symboliczną oraz topologiczną stabilnością. Dla przykładu cytujemy niektóre twierdzenia z [17] :

Twierdzenie 3.1 *Subshift zwartej przestrzeni metrycznej ma POTP wtedy i tylko wtedy, gdy jest skończonego typu.*

Stosunkowo sporo miejsca poświęcone jest pojęciu homeomorfizmu ekspansywnego:

Twierdzenie 3.2 *Jeśli $f \in H(M)$ jest ekspansywny (bądź też jest ekspansywnym homeomorfizmem zwartej przestrzeni metrycznej) o stałej ekspansywności e mającym POTP, a δ jest stałą jak w definicji 2.4 odpowiadającą $0 < \varepsilon < \frac{e}{2}$, to dla dowolnej δ-pseudoorbity istnieje dokładnie jedna orbita f która ją ε-śledzi.*

Twierdzenie 3.3 *Ekspansywny homeomorfizm zwartej przestrzeni metrycznej posiadający POTP jest topologicznie stabilny.*

W kontekście tego twierdzenia pojawia się w tej samej pracy jego wzmocniona wersja:

Twierdzenie 3.4 *Niech e będzie stałą ekspansywności homeomorfizmu f zwartej przestrzeni metrycznej posiadającego POTP. Wtedy dla każdego ε dodatniego mniejszego od $\frac{e}{3}$ istnieje dodatnia δ taka, że jeżeli g jest homeomorfizmem odległym od f o nie więcej niż δ, to istnieje dokładnie jedno ciągłe odwzorowanie h tej przestrzeni w samą siebie o własnościach $h \circ g = f \circ h$ oraz $\tilde{d}(h, id) < \varepsilon$.*

Twierdzenie 3.5 *Jeśli g w powyższym twierdzeniu jest również ekspansywne ze stałą ekspansywności większą niż 2ε, to odpowiadające f i g odwzorowanie sprzęgające h jest injekcją.*

Wprowadzony zostaje warunek równoważny POTP:

Propozycja 3.6 *Jeżeli homeomorfizm f zwartej przestrzeni metrycznej ma następującą własność śledzenia: dla każdego dodatniego ε istnieje dodatnie δ takie, że dla każdego fragmentu δ-pseudoorbity $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ istnieje element przestrzeni x taki, że ten fragment jest ε-śledzony przez kolejne punkty ze zbioru $\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}$, to f ma POTP.*

Z pomocą tego kryterium dowiedzione zostaje twierdzenie:

Twierdzenie 3.7 *Jeżeli $f \in H(M)$ oraz M jest wymiaru większego niż jeden, a f jest topologicznie stabilne, to f posiada POTP.*

W 1987 roku w pracy [18] pojawił się rezultat dotyczący własności typowych homeomorfizmów okręgu:

Twierdzenie 3.8 *Następujące własności $f \in H(S^1)$*

a) POTP

b) C^0-stabilność na zaburzenia

c) brak topologicznej stabilności

są typowe.

Trzy lata później K.Odani w swojej pracy [8] uogólnił i wzmocnił te rezultaty:

Twierdzenie 3.9 *Następujące własności autohomeomorfizmów zwartej różniczkowalnej rozmaitości wymiaru trzy lub mniejszego są typowe:*

a) POTP

b) C^0-stabilność na zaburzenia

c) C^0-silna stabilność na zaburzenia *d) brak topologicznej stabilności.*

W 1992 roku na łamach *Nagoya Mathematical Journal* ukazała się praca Kazuhiro Sakai [12] zawierająca rezultaty dotyczące przestrzeni dyfeomorfizmów z topologią C^1 na domkniętej rozmaitości klasy C^∞ wymiaru trzy:

Twierdzenie 3.10 *Istnieje taka domknięta rozmaitość klasy C^∞ wymiaru trzy, że zbiór jej wszystkich dyfeomorfizmów posiadających POTP nie jest gęsty.*

Twierdzenie 3.11 *Jeśli M jest domkniętą rozmaitością klasy C^∞ wymiaru trzy, to wnętrze zbioru dyfeomorfizmów posiadających POTP to dokładnie dyfeomorfizmy spełniające Aksjomat A i warunek silnej transwersalności.*

4 C^1-UPOTP

Rozmaitości o których mowa w tym rozdziale są domknięte klasy C^∞. Przestrzeń dyfeomorfizmów tych rozmaitości jest rozważana z topologią C^1.

W 1977 roku C.Robinson w pracy [10] wykazał

Twierdzenie 4.1 *Jeśli dyfeomorfizm spełnia Aksjomat A oraz ma własność silnej transwersalności, to ma on POTP.*

Praca Kazuhiro Sakai [11] opublikowana w 1992 roku zawiera wzmocnienie tego rezultatu:

Twierdzenie 4.2 *Jeśli dyfeomorfizm spełnia Aksjomat A oraz ma własność silnej transwersalności, to ma on C^1-UPOTP.*

W połączeniu z wynikami zawartymi w [12] powyższe twierdzenie daje następującą charakteryzację:

Twierdzenie 4.3 *Jeśli wymiar rozmaitości nie przekracza trzech, to dla dyfeomorfizmów posiadanie C^1-UPOTP jest równoważne spełnianiu Aksjomatu A i posiadaniu własności silnej transwersalności.*

W roku 1994 wynik ten został uogólniony na rozmaitości dowolnego wymiaru (patrz [13]).

5 Główny wynik

Propozycja 5.1 *Gdy* $\dim M = 0$ *to każde* $f \in C(M)$ *posiada UPOTP oraz każde* $f \in H(M)$ *posiada UPOTP(H).*

Dowód. Obydwie własności są elementarne, ponieważ M jest zbiorem skończonym.

$\square$

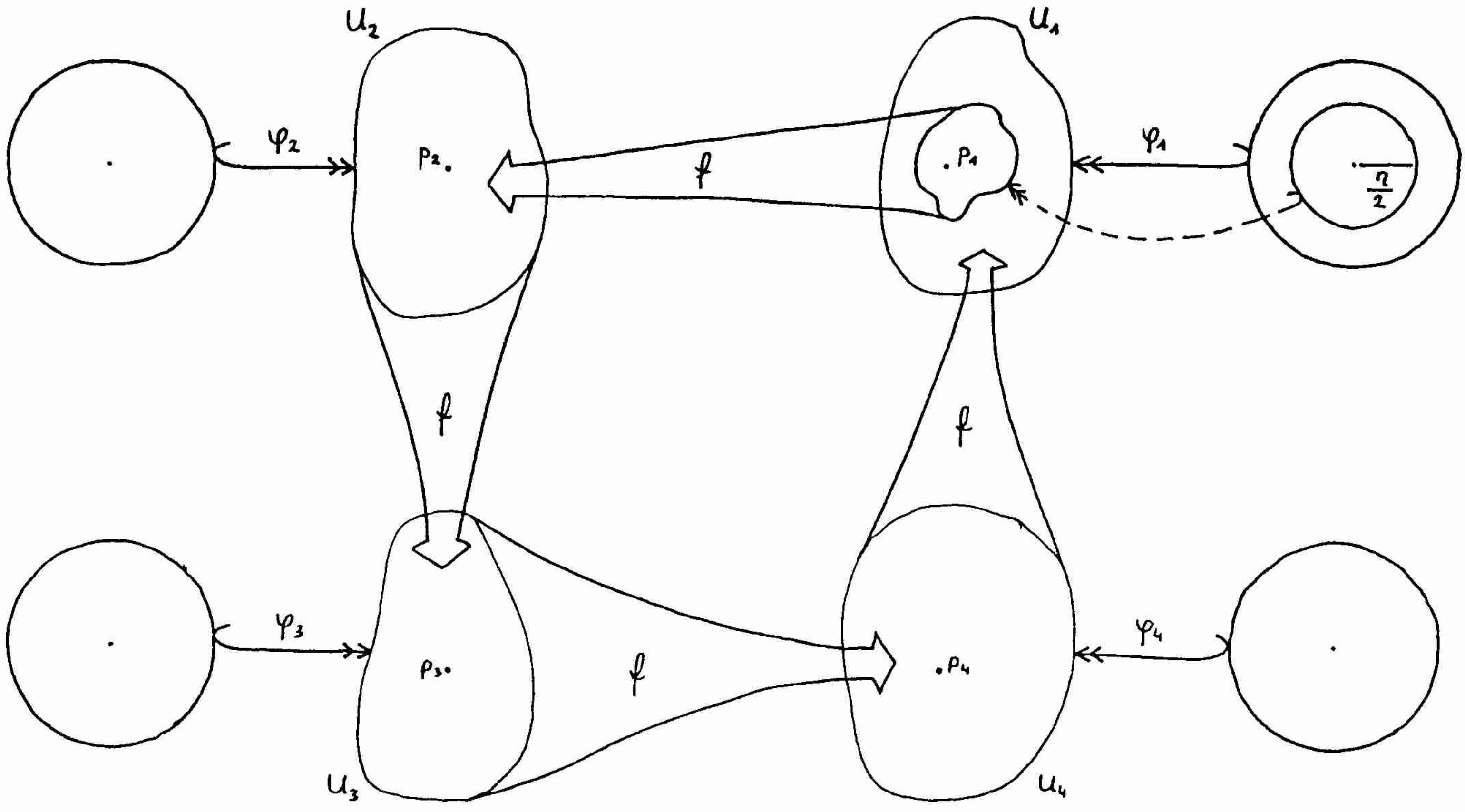
Twierdzenie 5.2 (Główny wynik) *Jeśli* $\dim M > 0$ *to żadne* $f \in C(M)$ *nie ma UPOTP oraz żadne* $f \in H(M)$ *nie ma UPOTP(H).*

Lemat 5.3 *Jeśli* $f \in C(M)$ *ma orbitę okresową, to nie ma ono UPOTP. Podobnie, jeśli* $f \in H(M)$ *ma orbitę okresową, to nie ma ono UPOTP(H).*

Dowód. Niech $\Delta > 0$ będzie dane. Oznaczmy przez $\{p_i\}_{i=1}^k$ dowolną orbitę okresową $f \in C(M)$. Najpierw zajmiemy się przypadkiem $k > 1$. Niech $\{U_i\}_{i=1}^k$ będzie rodziną rozłącznych otwartych otoczeń $\{p_i\}_{i=1}^k$ takich, że $\operatorname{diam} U_i < \Delta$, U_i homeomorficzne z $\mathbb{B}(0,1)$ (otwartą kulą w $\mathbb{R}^n$), $f(U_i) \subset U_{i+1}$ dla $i = 2, \ldots, k-1$ oraz $f(U_k) \subset U_1$. Niech

$$\varphi_i : \mathbb{B}(0,1) \longrightarrow U_i$$

będzie rodziną homeomorfizmów takich, że $\varphi_i(0) = p_i$. Ustalmy $\eta > 0$ takie, że $f(\varphi_1(\mathbb{B}(0,\eta))) \subset U_2$.



Rys. 1

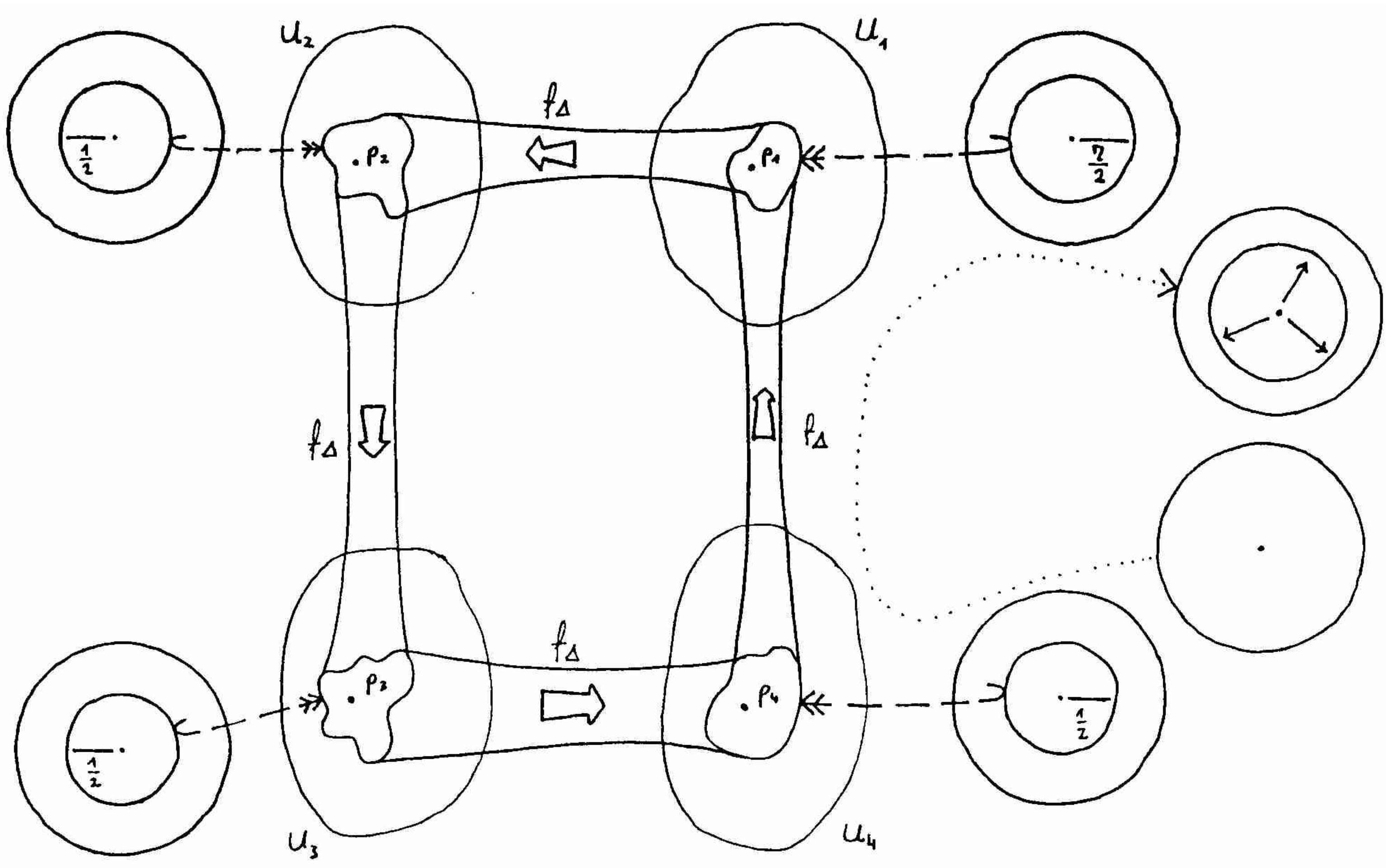
Zmodyfikujmy f w sposób ciągły

- na $\varphi_1(\mathbb{B}(0,\eta))$ tak, aby $(\varphi_2|_{\mathrm{B}(0,\frac{1}{2})})^{-1} \circ f \circ \varphi_1|_{\mathrm{B}(0,\frac{\eta}{2})} = \frac{1}{\eta}\mathrm{id}_{\mathrm{B}(0,\frac{\eta}{2})}$ oraz $f \circ \varphi_1(\mathbb{B}(0,\eta)) \subset U_2$,
- dla $i = 2,\ldots,k-1$ na U_i tak, aby $(\varphi_{i+1}|_{\mathrm{B}(0,\frac{1}{2})})^{-1} \circ f \circ \varphi_i|_{\mathrm{B}(0,\frac{1}{2})} = \mathrm{id}_{\mathrm{B}(0,\frac{1}{2})}$ oraz $f(U_i) \subset U_{i+1}$,
- na U_k tak, aby

$$(\varphi_1|_{\mathrm{B}(0,\frac{\eta}{2})})^{-1} \circ f \circ \varphi_k|_{\mathrm{B}(0,\frac{1}{2})}(x) = \begin{cases} \eta x\left(\frac{5}{4} - (\|4x\| - \frac{1}{2})^2\right) & \textit{dla } x \in \mathbb{B}(0,\frac{1}{4}) \\ \eta x & \textit{dla } x \in \mathbb{B}(0,\frac{1}{2}) \setminus \mathbb{B}(0,\frac{1}{4}) \end{cases}$$

oraz $f(U_k) \subset U_1$.

Oznaczmy otrzymane odwzorowanie symbolem $f_\Delta \in C(M)$.



Rys. 2

Możliwe jest wyprowadzenie jawnego wzoru na f_Δ, lecz pomijamy tutaj ten krok ze względu na to, iż interesuje nas jedynie istnienie f_Δ, który to fakt nie budzi żadnych wątpliwości.

Skoro diam $U_i < \Delta$, to zachodzi $\tilde{d}(f, f_\Delta) < \Delta$. Definiujemy

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{d(p_1, M\backslash\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{4}))), d(\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{4})), M\backslash\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{2})))\right\}$$

Niech $\delta > 0$ będzie dane. Rozważmy następującą δ-pseudoorbitę f_Δ^k

- rozpoczynamy w punkcie p_1,
- zeskakujemy z p_1 na pewien punkt w zbiorze $\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{4}))$,
- czekamy aż kolejne iteracje f_Δ^k przeniosą nas bliżej niż δ do zbioru $\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{2}))\backslash\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{4}))$,
- wskakujemy na zbiór $\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{2}))\backslash\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{4}))$,
- skończoną liczbą skoków przedostajemy się do dowolnego punktu w $\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{2}))\backslash\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{4}))$ bardziej odległego niż ε od $\varphi_1(\mathbb{B}(0,\frac{\eta}{4}))$,
- następnie nie opuszczamy już tego punktu.

Od takiej δ-pseudoorbity $\{z_i\}$ odwzorowania f_Δ^k pochodzi oczywiście pewna δ-pseudoorbita f_Δ, mianowicie

$$z_1, f_\Delta(z_1), f_\Delta^2(z_1), \ldots, f_\Delta^{k-1}(z_1), z_2, f_\Delta(z_2), \ldots$$

Żadna orbita f_Δ nie śledzi tej δ-pseudoorbity. Ze względu na wybór ε taka śledząca orbita musiałaby rozpoczynać się gdzieś w $\varphi_1(\mathbb{B}(0, \frac{\eta}{4}))$, stąd orbita f_Δ^k rozpoczynająca się w tym samym punkcie nie mogłaby opuścić tego zbioru. Jednakże nasza δ-pseudoorbita oddala się dalej niż ε od tego zbioru, i z tego powodu nie może tu wystąpić ε-śledzenie.

Podsumowując, dla każdego $\Delta > 0$ potrafimy skonstruować $f_\Delta \in C(M)$ tak, aby $\tilde{d}(f, f_\Delta) < \Delta$ oraz dobrać takie $\varepsilon > 0$, aby dla wszystkich $\delta > 0$ istniała δ-pseudoorbita f_Δ która nie jest ε-śledzona przez żadną orbitę f_Δ. Innymi słowy, f nie ma własności UPOTP.

Przypadek $k = 1$ (tzn. p_1 jest punktem stałym f) rozpatrujemy w analogiczny sposób. Mając dane otoczenie U_1 punktu p_1 średnicy mniejszej niż Δ oraz homeomorfizm $\varphi_1 : \mathbb{B}(0,1) \to U_1$ dobieramy $\eta > 0$ tak, aby $f(\varphi_1(\mathbb{B}(0,\eta))) \subset U_1$. Wystarczy teraz zmodyfikować f na $\varphi_1(\mathbb{B}(0,\eta))$ w dokładnie taki sam sposób, w jaki f była modyfikowana na U_k w powyższym dowodzie. Analiza własności f_Δ otrzymanego tą metodą odbywa się teraz tak jak poprzednio.

Przypadek $f \in H(M)$ oraz UPOTP(H) wymaga uwzględnienia faktu, iż modyfikacje prowadzące do otrzymania f_Δ nie mogą zepsuć jego homeomorficzności. Przyjmujemy oznaczenia jak poprzednio.

Jeśli $\dim M = 1$ to uzyskanie takiego zachowania f_Δ^k jak powyżej (ewentualnie modulo rodzaj symetrii środkowej względem punktu p_1 wynikającej z faktu, iż f może zmieniać orientację) jest elementarne. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że $\dim M > 1$.

Skonstruujemy f_Δ jako $h \circ f$, gdzie h będzie pewnym autohomeomorfizmem M tożsamym identyczności poza zbiorem U_k. Niech $\varepsilon, \delta > 0$ będą ustalonymi stałymi dodatnimi z definicji UPOTP(H). Niech ε będzie tak małe, aby $\mathbb{B}(p_1, 4\varepsilon) \subset \varphi_1(\mathbb{B}(0, \frac{\eta}{2}))$. Pomniejszmy ewentualnie δ tak, aby $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$.

Zauważmy, że jeśli $W \subset U_1$ jest zbiorem homeomorficznym z $\mathbb{B}(0,1)$ poprzez ξ

$$\xi : \mathbb{B}(0,1) \longrightarrow W$$

oraz $f^k(\xi(0)) \in W$, to modyfikując h na $f^{-1}(W)$ następująco

$$h(x) := \xi\left(\xi^{-1}(f^k(\xi(0))) \cdot (1 - \|\xi^{-1}(x)\|) + \|\xi^{-1}(x)\| \cdot \xi^{-1}(x)\right)$$

uzyskujemy własność $(h \circ f)^k(\xi(0)) = \xi(0)$.

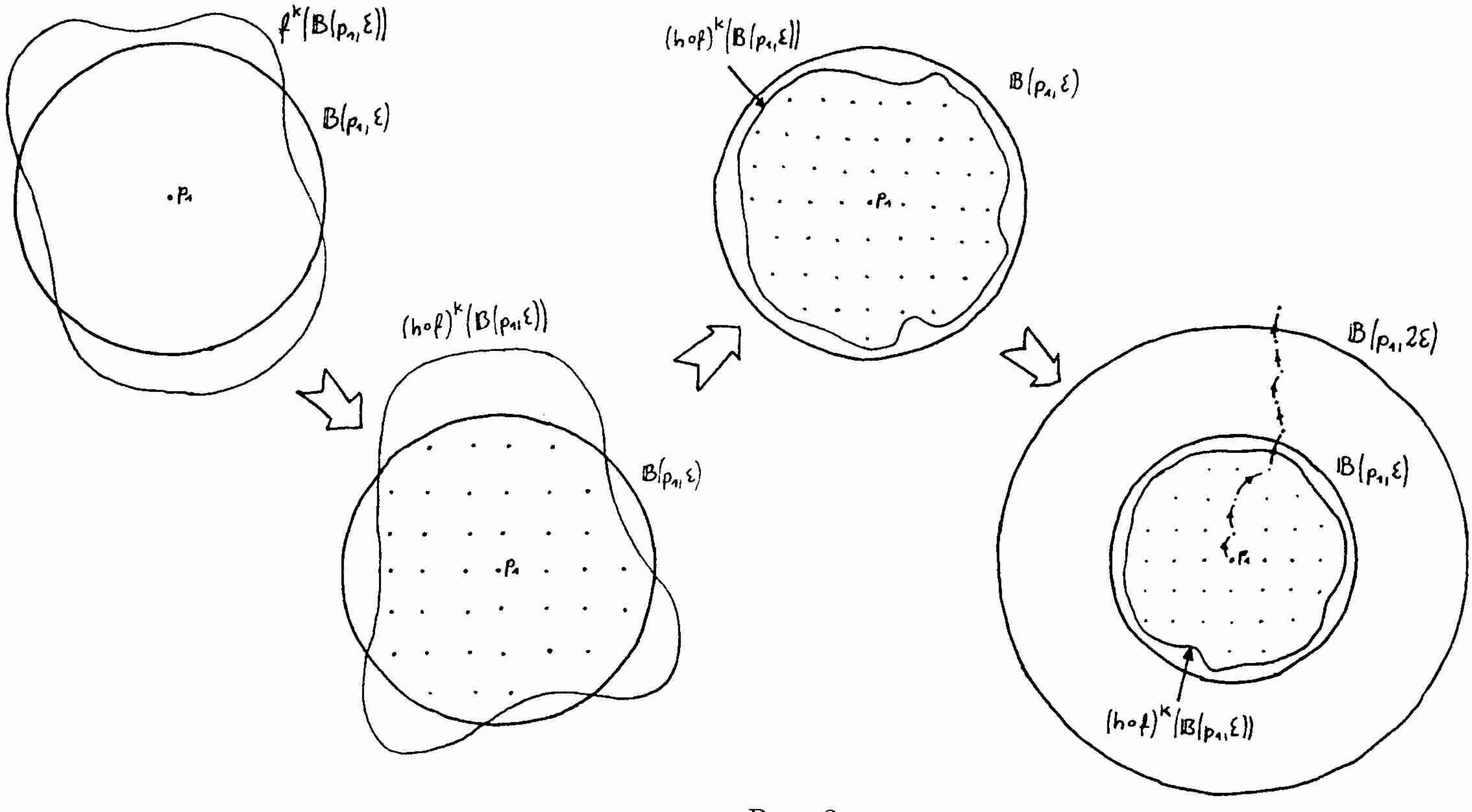
Korzystając skończoną ilość razy z takiej modyfikacji umieszczamy w $\mathbb{B}(p_1, \varepsilon - \frac{\delta}{3}))$ skończoną ilość punktów stałych odwzorowania $(h \circ f)^k$ o tej własności, że każdy punkt z kuli $\mathbb{B}(p_1, \varepsilon)$ leży w odległości co najwyżej $\frac{\delta}{2}$ od jednego z tych punktów stałych.

Następnej modyfikacji h dokonujemy na zbiorze

$$f^{-1}(\mathbb{B}(p_1, \max_{x\in(h\circ f)^k(\mathbb{B}(p_1,\varepsilon))} d(x,p_1) + \frac{\delta}{4}))\backslash\mathbb{B}(p_1, \varepsilon - \frac{\delta}{4})$$

tak, aby $(h \circ f)^k(\mathbb{B}(p_1, \varepsilon)) \subset \mathbb{B}(p_1, \varepsilon)$ (pomijamy ten krok jeśli to zwieranie już zachodzi). Ze względu na to, że wymieniony powyżej zbiór jest homeomorficzny z $\mathbb{B}(0,2)\backslash\mathbb{B}(0,1)$, wystarczy tu zastosować dostatecznie silne ściąganie w kierunku wewnętrznym.

Ostatnim krokiem jest dodanie w $\mathbb{B}(p_1, 3\varepsilon)\backslash\mathbb{B}(p_1, \varepsilon)$ łańcucha punktów stałych, który rozpoczyna się w $\mathbb{B}(p_1, \varepsilon + \frac{\delta}{4})$, kończy poza $\mathbb{B}(p_1, 2\varepsilon)$, a jego kolejne ogniwa są od siebie odległe o nie więcej niż $\frac{\delta}{2}$. Modyfikacji dokonujemy poza zbiorem $(h \circ f)^{-1}(\mathbb{B}(p_1, \varepsilon))$.



Rys. 3

δ-pseudoorbita f_Δ^k otrzymanego w ten sposób zaczynająca się w p_1 i opuszczająca $\mathbb{B}(p_1, 2\varepsilon)$ poprzez punkty stałe f_Δ^k nie może być ε-śledzona przez żadną orbitę f_Δ^k, ponieważ taka orbita śledząca musiałaby zaczynać się w $\mathbb{B}(p_1, \varepsilon)$, a zatem nie mogłaby opuścić tego zbioru.

Zwróćmy uwagę, że jest to jedyne miejsce w tej pracy w którym konstruowane f_Δ zależy istotnie od stałych ε i δ - pozostałe konstrukcje konkretnych odwzorowań dają się zbudować niezależnie od nich. $\square$

Lemat 5.4 *Zbiór wszystkich odwzorowań mających orbitę okresową jest gęsty w $C(M)$ oraz $H(M)$.*

Dowód. Metoda modyfikacji odwzorowania w celu uzyskania orbity okresowej, która przedstawiona jest poniżej, użyta została przedtem w [4].

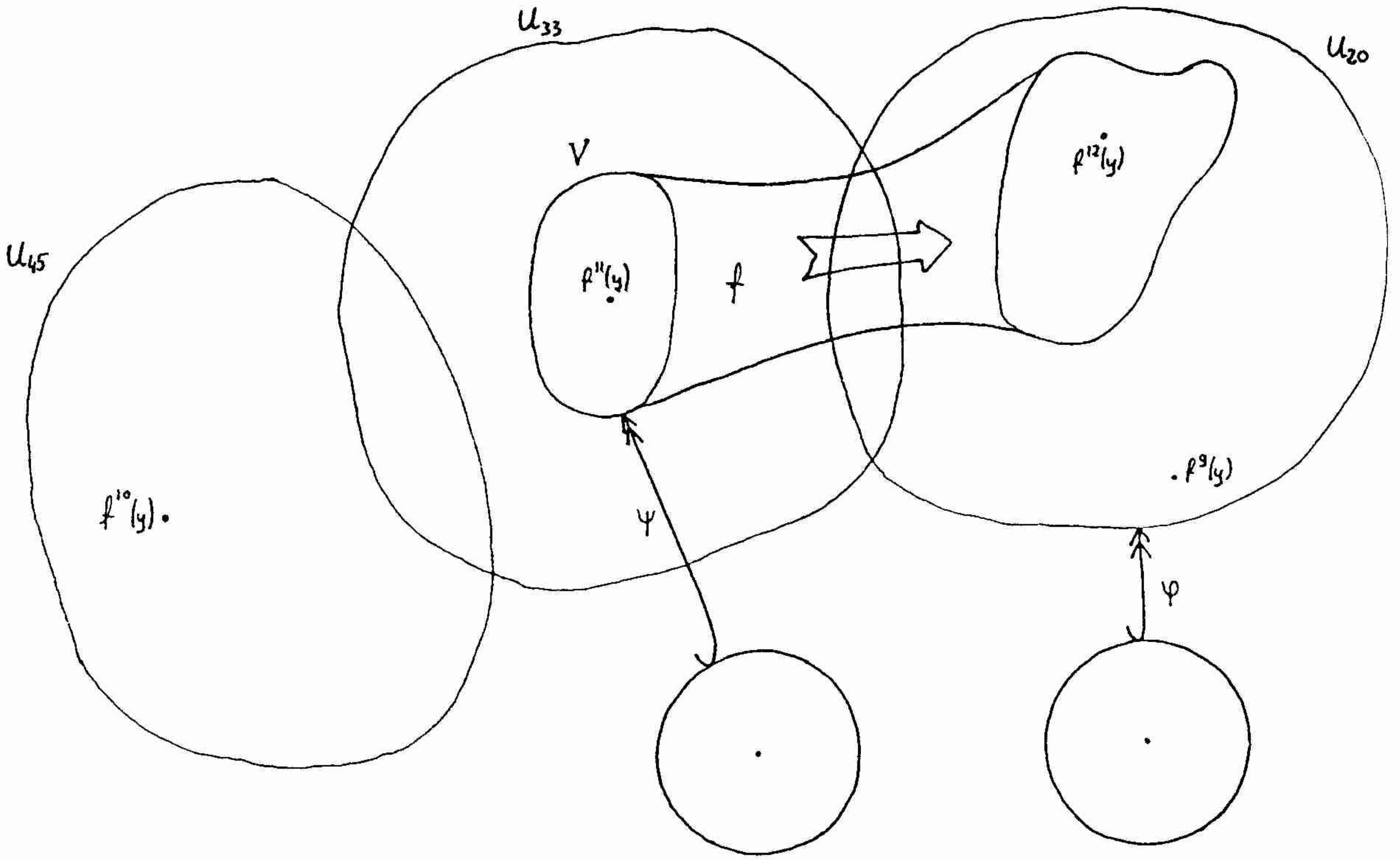
Niech $f \in C(M)$ oraz $\varepsilon > 0$ będą dane. Ustalmy otwarte pokrycie M zbiorami $\{U_i\}_{i=1}^m$ o średnicy mniejszej niż ε oraz homeomorficznymi z $\mathbb{B}(0,1)$. Wybierzmy $y \in M$. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie najmniejszą liczbą o tej własności, że istnieją $i \in \{1, \ldots, m\}$ oraz $j < k$ takie, że $f^j(y), f^k(y) \in U_i$.

Niech V będzie otwartym otoczeniem $f^{k-1}(y)$ homeomorficznym z $\mathbb{B}(0,1)$ o tej własności, że $f(V) \subset U_i$ oraz $y, f(y), \ldots, f^{k-2}(y) \notin V$. Niech

$$\varphi : \mathbb{B}(0,1) \longrightarrow U_i$$

$$\psi : \mathbb{B}(0,1) \longrightarrow V$$

będą homeomorfizmami takimi, że $\psi(0) = f^{k-1}(y)$.

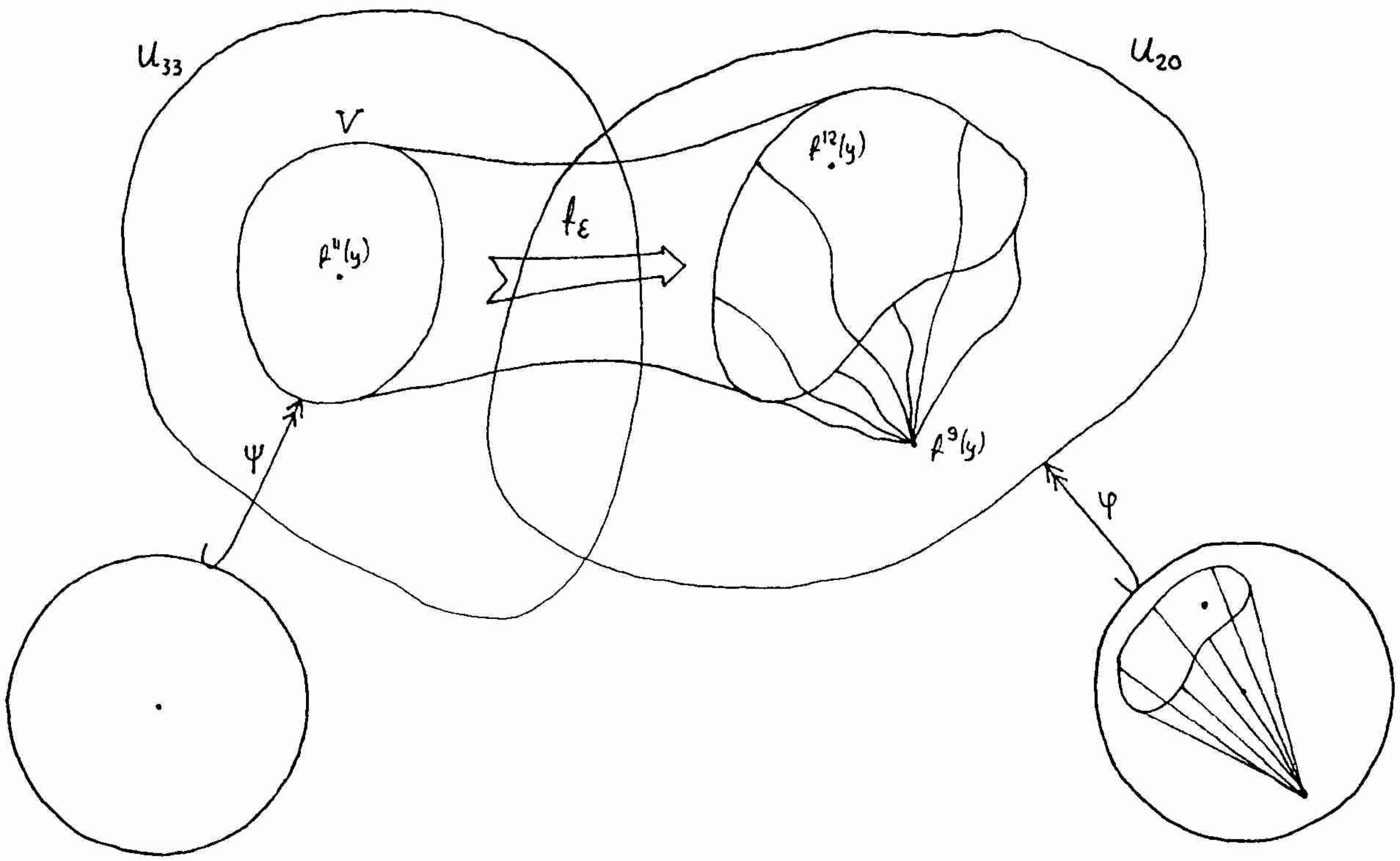


Rys. 4

Definiujemy $f_\varepsilon \in C(M)$ jako

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi\left(\|\psi^{-1}(x)\|\varphi^{-1}(f(x)) + (1 - \|\psi^{-1}(x)\|)\varphi^{-1}(f^j(y))\right) & dla\ x \in V \\ f(x) & dla\ x \notin V \end{cases}$$

Ciągłość f_ε jest widoczna.



Rys. 5

Zauważmy, że $\tilde{d}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ oraz f_ε ma orbitę okresową składającą się z punktów $f^j(y), f_\varepsilon(f^j(y)), \ldots, f_\varepsilon^{k-j}(f^j(y)) = f^j(y)$. Ten fakt dowodzi gęstości.

Przypadek $H(M)$ wymaga nieco innego podejścia. f_ε musi zostać skonstruowane jako homeomorfizm, a ponieważ bezpośrednia modyfikacja f (jak wyżej) nie zawsze daje w rezultacie element $H(M)$, to stosujemy inne rozwiązanie.

Zauważmy najpierw, że jeśli $W \subset U_i$ jest homeomorficzne z $\mathbb{B}(0,1)$ poprzez ξ

$$\xi : \mathbb{B}(0,1) \longrightarrow W$$

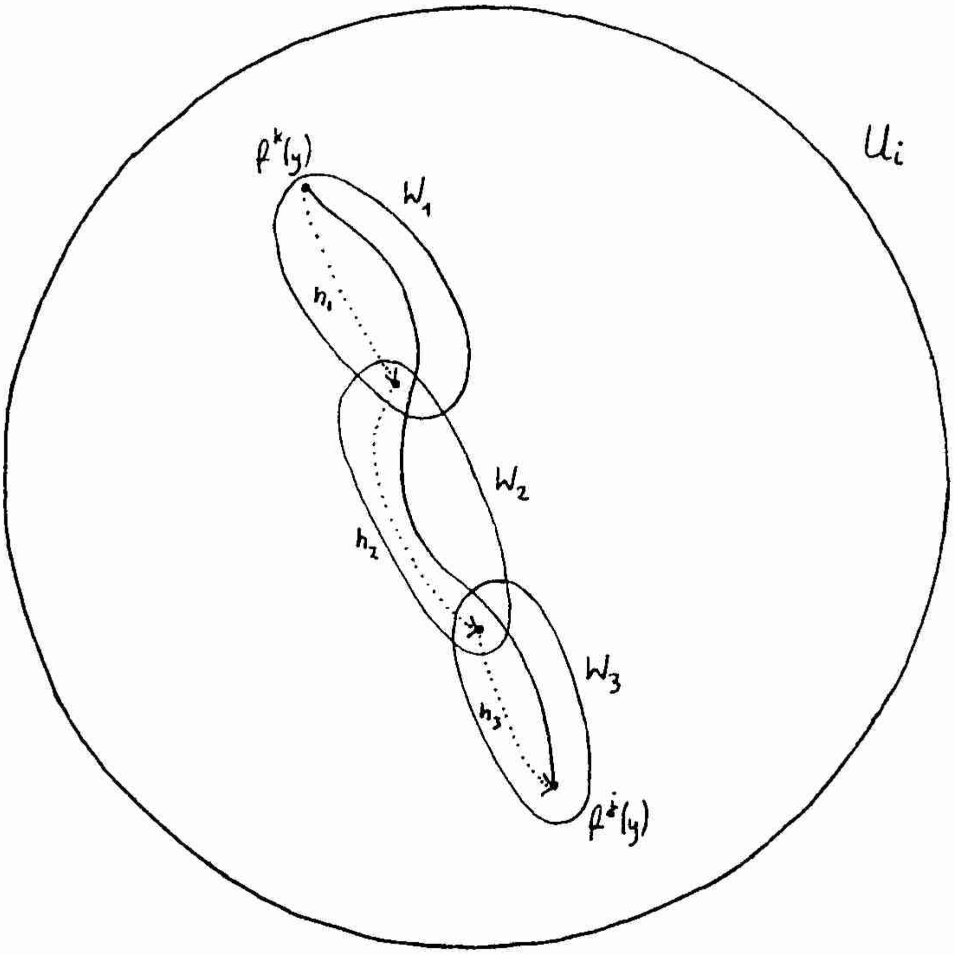
oraz $r \in W$, to istnieje autohomeomorfizm h rozmaitości M taki, że $h(\xi(0)) = r$ oraz $h|_{M\setminus W} = \mathrm{id}_{M\setminus W}$. Istotnie, h można wypisać explicite

$$h(x) := \begin{cases} \xi\left(\xi^{-1}(r)\cdot(1 - \|\xi^{-1}(x)\|) + \|\xi^{-1}(x)\|\cdot\xi^{-1}(x)\right) & dla\ \ x \in W \\ x & dla\ \ x \notin W \end{cases}$$

Ponieważ U_i jest homeomorficzne z $\mathbb{B}(0,1)$, więc istnieje droga łącząca punkty $f^j(y)$ i $f^k(y)$ której przeciwobraz poprzez f jest rozłączny z punktami $y, f(y), \ldots, f^{k-2}(y)$. Wynika z tego istnienie skończonej ilości zbiorów $W_1, \ldots, W_p$ homeomorficznych z $\mathbb{B}(0,1)$ poprzez odwzorowania ξ_l

$$\xi_l : \mathbb{B}(0,1) \longrightarrow W_l$$

takich że $\xi_1(0) = f^k(y), \xi_l(0) \in W_{l-1}$ dla $l = 2, \ldots, p$ oraz $f^j(y) \in W_p$. Ponadto zbiory te można wybrać tak, aby przeciwobraz ich sumy był rozłączny z punktami $f^j(y), \ldots, f^{k-2}(y)$. Niech teraz h_l będą autohomeomorfizmami M (skonstruowanymi w taki sposób jak h powyżej) o własności $h_l(\xi_l(0)) = \xi_{l+1}(0)$ dla $l = 1, \ldots, p-1$ oraz $h_p(\xi_p(0)) = f^j(y)$.



Rys. 6

f_ε wystarczy teraz zdefiniować następująco

$$f_\varepsilon := h_p \circ \ldots \circ h_1 \circ f$$

$\square$

Dowód twierdzenia 5.2. Przypuśćmy, że $f \in C(M)$ ma własność UPOTP ze stałą $\Delta > 0$. Z lematu 5.4 istnieje $g \in C(M)$ posiadające orbitę okresową, takie, że $\tilde{d}(f, g) < \frac{\Delta}{2}$. Z definicji UPOTP g ma tą własność ze stałą $\frac{\Delta}{2}$, co daje sprzeczność z lematem 5.3.

Dla przypadku homeomorfizmów wystarczy w powyższym rozumowaniu zastąpić $C(M)$ przez $H(M)$ oraz UPOTP przez UPOTP(H). $\square$

6 Wnioski

Wniosek 6.1 Dla $\dim M > 0$ UPOTP nie jest własnością generyczną w $C(M)$, a UPOTP(H) nie jest własnością generyczną w $H(M)$ (porównaj [4] str.353).

Definicja 6.2 *Mówimy że $f \in H(M)$ ma własność stabilności orbit, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że gdy $g \in H(M)$ oraz $\tilde{d}(f,g) < \delta$, to każda orbita f jest ε-śledzona przez pewną orbitę g, oraz każda orbita g jest ε-śledzona przez pewną orbitę f.*

Uwaga 6.3 Powyższa definicja pokrywa się z definicją 2.9. Przedstawiamy ją tu ponownie celem uzgodnienia terminologii z pracą [4], w której C^0-silna stabilność na zaburzenia nazywana jest zgodnie z nowszymi oznaczeniami stabilnością orbitalną.

Wniosek 6.4 Jeśli $\dim M > 0$ to UPOTP(H) nie jest równoważne własności stabilności orbit (porównaj [4] str.358).

Dowód. Dla dowolnego $n > 0$ możemy rozważyć homeomorfizm f sfery jednostkowej $\mathbb{R}^{n+1}$

$$f : S^n \ni (x_0, \ldots, x_n) \longrightarrow \left(\frac{x_0}{a(x_n)}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{a(x_n)}, \frac{1}{2}(x_n + 1)^2 - 1\right) \in S^n$$

gdzie $a(x_n) > 0$ są dobrane tak, aby $\mathrm{Im} f = S^n$.

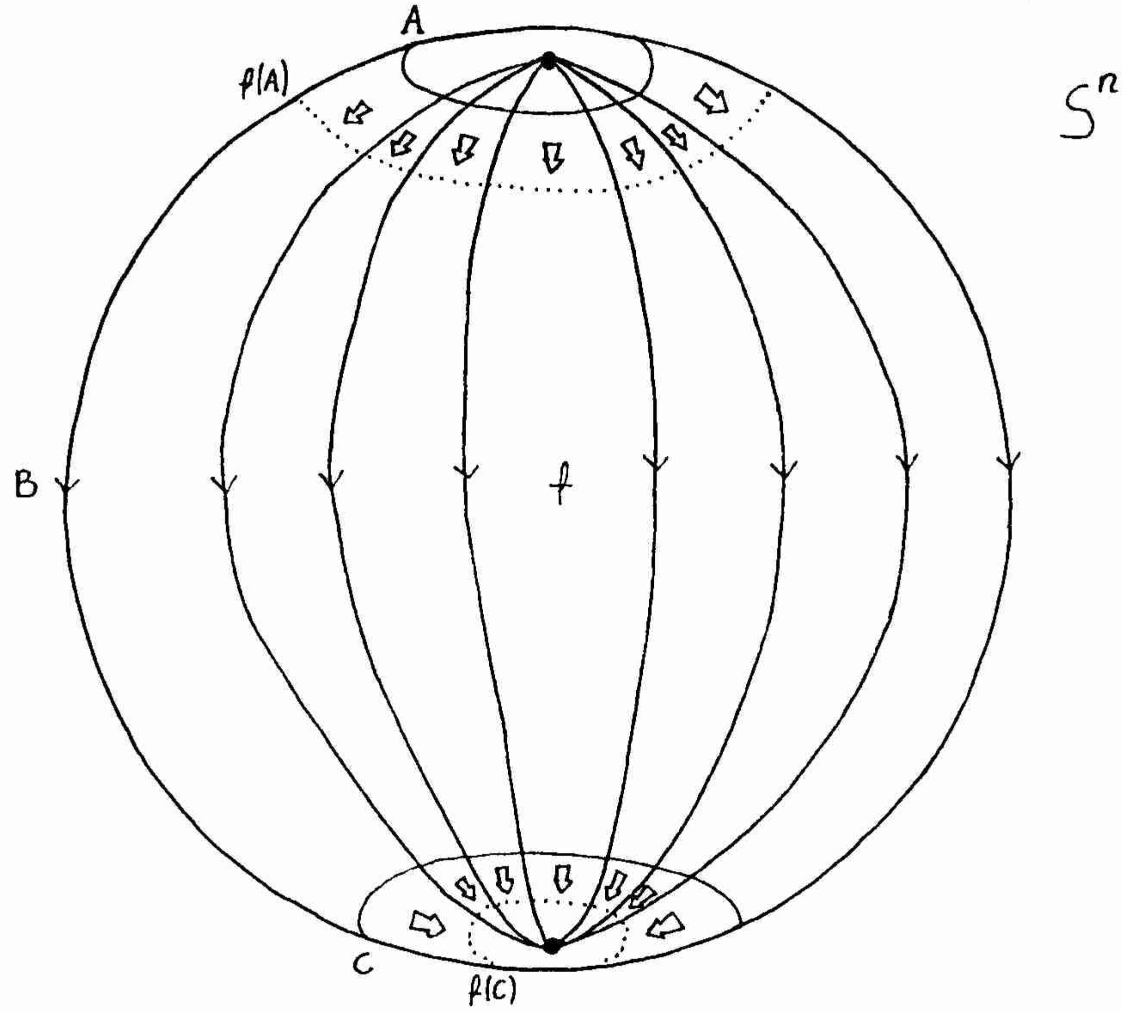
Z twierdzenia 5.2 f nie ma UPOTP(H).

Dla małego $\varepsilon > 0$ podzielmy S^n na trzy rozłączne zbiory

$$A = \mathbb{B}((0, \ldots, 0, 1), \frac{\varepsilon}{4})$$

$$C = \mathbb{B}((0, \ldots, 0, -1), \frac{\varepsilon}{4})$$

$$B = S^n \setminus (A \cup C)$$



Rys. 7

Dobieramy $\eta > 0$ tak małe, aby jeśli $g \in H(S^n)$ oraz $\tilde{d}(f,g) < \eta$, to

- $g(B \cup C) \subset B \cup C$
- $g(C) \subset C$
- istniało $k \in \mathbb{N}$ takie, że każda orbita g ma nie więcej niż k punktów w B.

Definiujemy $\delta = \min\{\eta, \frac{\varepsilon}{k}\}$. Weźmy dowolne $g \in H(S^n)$ takie, że $\tilde{d}(f,g) < \delta$.

Z twierdzenia Brouwera zastosowanego odpowiednio do $g(A)$ i C wnioskujemy, że g ma punkty stałe $a \in A$ oraz $c \in C$.

Jeżeli $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest orbitą g, to jest również δ-pseudoorbitą f. Są trzy możliwe typy zachowania orbity g

- może ona pozostawać w A przez cały czas. Wtedy ε-śledzi ją $(0,\ldots,0,1)$ który jest punktem stałym f,
- może ona pozostawać w C przez cały czas. Wtedy ε-śledzi ją $(0,\ldots,0,-1)$ który jest punktem stałym f,
- może istnieć $m \geq 0$ takie, że $x_1,\ldots,x_{m-1} \in A$ ale $x_m \in B$.

Wtedy przez wybór δ jest ona ε-śledzona przez $f^{-m}(x_m), \ldots, f^{-1}(x_m), x_m, f(x_m), \ldots$.

W podobny sposób każda orbita f jest ε-śledzona przez pewną orbitę g. Punkty stałe f są śledzone odpowiednio przez a i c, a dowolna inna orbita $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ taka, że $x_1, \ldots, x_{m-1} \in A$ ale $x_m \in B$ jest śledzona przez $g^{-m}(x_m), \ldots, g^{-1}(x_m), x_m, g(x_m), \ldots$. Z tego powodu f ma własność stabilności orbit, co kończy dowód. $\square$

Bibliografia

[1] N.Aoki, *The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycle*, Bol. Soc. Bras. Mat. 23-New Series(1992), str.21-65

[2] R.Bowen, *Equilibrum States and the Ergodic Theory of Axiom A Diffeomorphisms*, Springer Lecture Notes tom 470(1975)

[3] J.Franks, *Neccessary conditions for stability of diffeomorphisms*, Trans. A.M.S. 158(1971), str.301-308

[4] R.Gu, *Uniform pseudo-orbit tracing property and orbit stability*, Ann. Differential Equations 13(1997) No.4, str.350-359

[5] M.Hurley, *Consequences of topological stability*, J. Differential Equations 54(1984), str.60-72

[6] K.Moriyasu, *The topological stability of diffeomorphisms*, Nagoya Math. J. 123(1991), str.91-102

[7] Z.Nitecki, *On semi-stability for diffeomorphisms*, Invent. Math. 14(1971), str.83-122

[8] K.Odani, *Generic homeomorphisms have the pseudo-orbit tracing property*, Proc. Amer. Math. Soc. 110(1990), str.281-284

[9] J.Palis, C.Pugh, M.Shub, D.Sullivan, *Genericity theorems in topological dynamics*, Springer Lecture Notes tom 468(1975), str.241-250

[10] C.Robinson, *Stability theorem and hyperbolicity in dynamical systems*, Rocky Mountain J. Math. 7(1977), str.425-437

[11] K.Sakai, *The C^1-uniform pseudo-orbit tracing property*, Tokyo J. Math. 15(1992), str.99-109

[12] K.Sakai, *Diffeomorphisms with pseudo orbit tracing property*, Nagoya Math. J. 126(1992), str.125-140

[13] K.Sakai, *Pseudo-orbit tracing property and strong transversality of diffeomorphisms on closed manifolds*, Osaka J. Math. 31(1994), str.373-386

[14] M.Shub, *Structurally stable diffeomorphisms are dense*, Bull. Amer. Math. Soc. 78(1972), str.817-818

[15] F.Takens, *Tolerance stability*,
Springer Lecture Notes tom 468(1975), str.293-304

[16] P.Walters, *Anosov diffeomorphisms are topologically stable*,
Topology 9(1970), str.71-78

[17] P.Walters, *On the pseudo-orbit tracing property and its relation to stability*,
Springer Lecture Notes tom 668(1979), str.231-244

[18] K.Yano, *Generic homeomorphisms of* S^1 *have the pseudo-orbit tracing property*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 34(1987), str.51-55