

Procesy Stochastyczne

– notatki z wykładu –
(2022/2023)

dr Marcin Pitera
Uniwersytet Jagielloński

3 lutego 2023

Spis treści

Wstęp	2
1 Wstępne wymagania oraz podstawowe twierdzenia	2
1.1 Warunkowa wartość oczekiwana	3
1.2 Przydatne klasyczne twierdzenia	5
2 Wprowadzenie do procesów stochastycznych	7
2.1 Podstawowe definicje i własności	7
2.2 Ciągłe modyfikacje i twierdzenia Kolmogorowa	9
2.3 Filtracja i adaptowalność	12
2.4 Momenty stopu	15
2.5 Martyngały	20
2.6 Dekompozycja Dooba-Meyera	25
3 Ważne klasy procesów stochastycznych w czasie ciągłym	27
3.1 Ruch Browna	28
3.2 Proces Poissona	34
3.3 Procesy Lévy’ego – miara skoków i dekompozycja	38
3.4 Procesy Markowa	40
4 Ważne klasy procesów stochastycznych w czasie dyskretnym	43
4.1 Łańcuchy Markowa	43
4.2 Procesy typu ARMA	47
4.3 Procesy typu ARCH i GARCH	48
5 Całka stochastyczna Itô	49
5.1 Całka Itô z procesu prostego	49
5.2 Całka Itô z procesu klasy \mathcal{L}^2	54
5.3 Procesy Itô oraz wzór Itô	56
A Dodatek: Różne rodzaje zbieżności zmiennych losowych	59
B Notacja	61

Wstęp

Wykład ten ma charakter wprowadzający i omawia podstawy teorii procesów stochastycznych. Materiał wyłożony na wykładzie stanowi fundament dla wielu zagadnień powiązanych z matematyką stosowaną i finansową. W szczególności, znajomość materiału prezentowanego na tym kursie jest niezbędna do zrozumienia podstaw analizy stochastycznej, stochastycznych równań różniczkowych, czy podstawowych metod sterowania stochastycznego w czasie ciągłym.

Kurs ten zakłada znajomość podstaw teorii mnogości, analizy matematycznej, rachunku prawdopodobieństwa i statystyki. W związku z tym zdecydowaliśmy się pominąć niektóre dowody twierdzeń stanowiących podstawę rachunku prawdopodobieństwa, gdyż są one omawiane (i dowodzone) w trakcie wymienionych kursów. W szczególności dotyczy to podstawowych twierdzeń związanych z warunkową wartością oczekiwaną, czy teorią martyngałów.

Notatki te w pewnej mierze bazują na skrypcie [Pes17] autorstwa prof. Szymona Peszata, który stanowi dobre alternatywne źródło wiedzy o teorii procesów stochastycznych, zob. również [PZ07]. Z kursu tego został zaczerpnięty m.in. koncepcja ogólnego podziału i układu treści, redakcja wybranych dowodów, przykłady, czy wypowiedzi niektórych twierdzeń. Jako alternatywne anglojęzyczne źródło wiedzy polecam również książki [KS12], [GKK⁺10], [App09], oraz [PP02].

Uwaga: Głównym celem tego wykładu jest wyłożenie teoretycznej części podstaw teorii procesów stochastycznych. Mając jednak na uwadze, że jest to wykład wstępny, w kursie tym stosunkowo dużo miejsca poświęciliśmy na prezentację przykładów, mających na celu wyrobienie intuicji. Przykłady te powinny być uzupełnione o zadania przerobione na ćwiczeniach. Zachęcamy również do spojrzenia na wybrane książki (zbiory zadań) w których można znaleźć wiele ciekawych zadań. Oprócz wyżej wymienionych pozycji, zadania z teorii procesów stochastycznych można znaleźć np. w [Bal17] lub [BZ00].

1 Wstępne wymagania oraz podstawowe twierdzenia

Jak już wspomnieliśmy, kurs ten zakłada znajomość podstaw teorii mnogości, analizy matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa. W szczególności odnosi się to do podstawowych pojęć z teorii miary (zbiór borelowski, miara, itd.), analizy (całka względem miary, miara Lebesgue'a, typu zbieżności, całkowalność, itd.), rachunku prawdopodobieństwa (wartość oczekiwana, zmienne losowe, niezależność, martyngał, warunkowa wartość oczekiwana, rozkład, itd.), jak i powiązanych twierdzeń (Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajorizowanej, Twierdzenie Lebesgue'a-Radona-Nikodyma, Lemat Borela-Cantelliego, Twierdzenie Fubinięgo, itd.) oraz nierówności (Nierówność Czebyszewa, Nierówność Jensena, Nierówność Schwarzera, itd.).

Po więcej informacji związanych z podstawami rachunku prawdopodobieństwa, definicją przestrzeni probabilistycznej, zmiennej losowej, jej rozkładu, wielowymiarowego rozkładu normalnego, funkcji charakterystycznych, rodzajów zbieżności zmiennych losowych, twierdzeń granicznych, itd. odsyłamy do [Pit22]; pojęcia te będą przypomniane na bieżąco w trakcie wykładu, gdy będzie to potrzebne. Poniżej przytoczymy też kilka wybranych pojęć oraz własności, które będą szczególnie ważne w dalszej części wykładu. Warto zajrzeć też do Dodatku A oraz Dodatku 4 w którym przypomnimy kilka pojęć związanych ze zbieżnością zmiennych losowych oraz łańcuchami Markowa w czasie dyskretnym. Literaturą pomocniczą (oprócz notatek i pomocy podanych na innych kursach) może być tutaj [JS04] oraz [Bil12].

Jeżeli nie napisano inaczej, będziemy zakładać, że mamy z góry zadaną referencyjną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a zmienne losowe, które będziemy na niej definiować, są całkowalne. Jeżeli

nie napisano inaczej, wszystkie równości i nierówności należy rozumieć jako "prawie na pewno", tj. na zbiorze o pełnej mierze. W istocie często będziemy operować na przestrzeni $L_1 := L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tj. na przestrzeni klas zmiennych losowych określonych z dokładnością do zbioru miary zero, a nie na przestrzeni wszystkich zmiennych losowych.

1.1 Warunkowa wartość oczekiwana

Niech \mathcal{G} będzie pod σ -algebrą \mathcal{F} , czyli σ -algebrą podzbiorów Ω taką, że $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, oraz niech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie całkowalną zmienną losową, tj. niech $X \in L_1$.

Definicja 1.1 (Warunkowa wartość oczekiwana względem σ -algebry). Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej X względem \mathcal{G} nazywamy zmienną losową Y , która spełnia następujące własności:

- 1) Y jest \mathcal{G} -mierzalna;
- 2) Dla każdego $A \in \mathcal{G}$ zachodzi $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Y]$.

O ile dla całkowalnych zmiennych losowych X zawsze istnieje warunkowa wartość oczekiwana, o tyle może być one określona niejednoznacznie, tzn. może istnieć więcej niż jedna zmienna losowa Y , która spełnia założenia Definicji 1.1. Zmienna ta jest jednak określona jednoznacznie z dokładnością do zbioru miary zero.¹ Od teraz będziemy używać symbolu $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ na oznaczenie warunkowej wartości oczekiwanej z Definicji 1.1.

Zdefiniujmy warunkową wartość oczekiwaną zmiennej losowej X względem innej zmiennej losowej.

Definicja 1.2 (Warunkowa wartość oczekiwana względem zmiennej losowej). Warunkową wartość oczekiwaną X względem zmiennej losowej Y definiujemy jako

$$\mathbb{E}[X|Y] := \mathbb{E}[X|\sigma(Y)],$$

gdzie $\sigma(Y)$ jest σ -algebrą generowaną przez Y .

Wprost z Definicji 1.1 dostajemy, że $\mathbb{E}[X|Y]$ jest $\sigma(Y)$ -mierzalna. Ponadto, z lematu Dooba-Dynkina wynika, że

$$\mathbb{E}[X|Y] = g(Y),$$

dla pewnej (borelowsko) mierzalnej funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Od teraz będziemy używać konwencji

$$\mathbb{E}[X|Y = y] := g(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

na oznaczenie warunkowej wartości oczekiwanej pod warunkiem zdarzenia $\{Y = y\}$. Zdarzenie $\{Y = y\}$ ma często miarę zero, więc nie można tutaj użyć standardowej definicji warunkowej wartości oczekiwanej względem zdarzenia o dodatniej mierze. Oczywiście, jeżeli $\mathbb{P}[\{Y = y\}] > 0$, to definicje te się pokrywają, co ilustrują poniższe przykłady.

¹To znaczy, jeżeli Y oraz V spełniają warunki Definicji 1.1, to zachodzi $\mathbb{P}[Y = V] = 1$.

Przykład 1.3. Niech $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, A_2, \dots, A_n\})$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^n$ jest skończonym rozbiem Ω .² Wtedy, dla każdej całkowalnej zmiennej losowej X dostajemy

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}[A_i]} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i} X] & \text{jeżeli } \omega \in A_i \text{ oraz } \mathbb{P}[A_i] > 0; \\ 0 & \text{jeżeli } \omega \in A_i \text{ oraz } \mathbb{P}[A_i] = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Warto tutaj zauważyć, że w (1.1) możemy zastąpić 0 przez dowolną liczbę rzeczywistą, dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ takiego, że $\mathbb{P}[A_i] = 0$. Używając konwencji $\frac{0}{0} = 0$ możemy również zapisać (1.1) jako

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i} X]}{\mathbb{P}[A_i]} \mathbb{1}_{A_i}.$$

Dowód. Podzielmy dowód (1.1) na trzy kroki.

1) Pokażemy, że

$$\mathcal{G} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i : I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\}. \quad (1.2)$$

Niech $\tilde{\mathcal{G}}$ oznacza prawą stronę (1.2). Ponieważ $\tilde{\mathcal{G}}$ zawiera rodzinę zbiorów $\{A_1, \dots, A_n\}$, dostajemy od razu $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$. Z drugiej strony wiemy, że dla każdego $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ zachodzi $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{G}$, a więc $\mathcal{G} \supseteq \tilde{\mathcal{G}}$.

2) Pokażemy, że zmienna Y jest \mathcal{G} -mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest stała (tj. jest funkcją stałą) na każdym zbiorze A_i . Skupimy się na dowodzie implikacji w prawą stronę (implikację w lewą pozostawiamy jako proste ćwiczenie domowe). Załóżmy, że istnieje taka zmienna losowa Y oraz i_0 , że Y jest \mathcal{G} -mierzalna oraz Y nie jest stała na A_{i_0} . Wtedy istnieje punkt $x \in \mathbb{R}$ taki, że dla $B = (-\infty, x]$ zachodzi

$$Y^{-1}(B) \cap A_{i_0} \neq \emptyset \quad \text{oraz} \quad Y^{-1}(B^c) \cap A_{i_0} \neq \emptyset.$$

To już przeczy (1.2), gdyż $Y^{-1}(B) \cap A_{i_0}$ jest (istotnym) podzbiorem A_{i_0} , który należy do \mathcal{G} .

3) Pokażmy (1.1). Z poprzednich kroków wiemy, że zachodzi

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i},$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a_1, \dots, a_n . Używając Definicji 1.1 i zauważając, że dla $i \neq j$ mamy $\mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{A_i \cap A_j} = 0$, dostajemy

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i} X] = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{A_i} \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \right] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i} a_i] = \mathbb{P}[A_i] a_i,$$

co kończy dowód (1.1). □

Przykład 1.4. Niech Y będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą skończenie wiele wartości $\{y_1, \dots, y_n\}$ – każde z dodatnim prawdopodobieństwem. Wtedy, dla każdej zmiennej losowej X dostajemy

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y=y_i\}} X]}{\mathbb{P}[Y=y_i]} \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}}. \quad (1.3)$$

²Skończonym ciągiem zdarzeń takim, że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Możemy również zapisać (1.3) jako

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}[Y=y_i]} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y=y_i\}} X] & \text{jeżeli } y = y_i \text{ dla pewnego } i \in \{1, \dots, n\}, \\ 0 & \text{jeżeli } y \notin \{y_1, \dots, y_n\}. \end{cases}$$

Dowód. Wiemy, że

$$\sigma(Y) = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$$

gdzie $A_i := \{Y = y_i\}$ dla $i = 1, \dots, n$. Łatwo również zauważyć, że $\{A_1, \dots, A_n\}$ jest rozbiem Ω . Jest to więc specjalny przypadek sytuacji z Przykładu 1.3, co kończy dowód. \square

Przedstawmy teraz podstawowe własności warunkowej wartości oczekiwanej; pomijamy ich dowód.

Twierdzenie 1.5 (Podstawowe własności warunkowej wartości oczekiwanej). Niech $X, Y \in L^1$ oraz niech \mathcal{G} będzie pod σ -algebrą \mathcal{F} . Wtedy,

- 1) Jeżeli X jest \mathcal{G} -mierzalna, to $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$;
- 2) Jeżeli X jest \mathcal{G} -mierzalna oraz $XY \in L^1$, to $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$;
- 3) Jeżeli X jest niezależna od \mathcal{G} ,^a to $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$;
- 4) Jeżeli X jest niezależna od \mathcal{G} , oraz \mathcal{H} jest pod σ -algebrą \mathcal{F} , to $\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$;
- 5) Jeżeli $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$, to $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$;
- 6) Dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$;
- 7) Jeżeli \mathcal{H} jest pod σ -algebrą \mathcal{G} , to $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]$;
- 8) Jeżeli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$;
- 9) Jeżeli $X \geq Y$, to $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.

^aTo znaczy $\sigma(X)$ oraz \mathcal{G} są niezależne: dla każdego $A \in \sigma(X)$ oraz $B \in \mathcal{G}$, zachodzi $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.

1.2 Przydatne klasyczne twierdzenia

Przedstawimy teraz wybrane klasyczne twierdzenia znane z rachunku prawdopodobieństwa, dla warunkowej wersji wartości oczekiwanej. Pomijamy większość dowodów, gdyż są one bardzo podobne do tych z przypadku bezwarunkowego, zob. [Bil12].

Twierdzenie 1.6 (Twierdzenie o zbieżności monotonicznej). Niech (X_n) będzie ciągiem nieujemnych i niemalejących zmiennych losowych zbieżnych (prawie na pewno) do X . Wtedy, dla każdej pod σ -algebry \mathcal{G} dostajemy

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}], \quad n \rightarrow \infty.$$

Twierdzenie 1.7 (Twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej). Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych zbieżnych (prawie na pewno) do X oraz takim, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|X_n| < Y$, gdzie Y jest całkowalną zmienną losową. Wtedy zmienna losowa X jest całkowalna oraz dla każdej pod σ -algebry \mathcal{G} dostajemy

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}], \quad n \rightarrow \infty.$$

Twierdzenie 1.8 (Lemat Fatou). Niech (X_n) będzie ciągiem nieujemnych i całkowalnych zmiennych losowych. Wtedy, dla każdej pod σ -algebry \mathcal{G} dostajemy

$$\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}].$$

Warto również przypomnieć, że jeżeli X jest zmienną całkowalną z kwadratem (tzn. $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$), to warunkową wartość oczekiwaną względem pod σ -algebry \mathcal{G} można traktować jako rzut ortogonalny zmiennej X na podprzestrzeń $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.³ Stąd wynika, że $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ jest najlepszą całkowalną z kwadratem aproksymacją zmiennej X , która jest \mathcal{G} -mierzalna. W szczególności, jeżeli zinterpretujemy \mathcal{G} jako ogólną informację/wiedzę o danym systemie (np. indeksie giełdowym na danym rynku akcji), a X jako zmienną losową powiązaną z tym systemem (np. ceną konkretnej akcji), to możemy potraktować $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ jako najlepszą prognozę wartości X mając dane pochodzące z \mathcal{G} ; zob. Twierdzenie 1.9.

Twierdzenie 1.9 (Warunkowa wartość oczekiwana jako najlepszy predyktor). Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową, a \mathcal{G} pod σ -algebrą \mathcal{F} . Wtedy, dla każdej całkowalnej z kwadratem oraz \mathcal{G} -mierzalnej zmiennej losowej Z dostajemy

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] \leq \mathbb{E}[(X - Z)^2]. \quad (1.4)$$

Dowód. Niech Z będzie całkowalną z kwadratem i \mathcal{G} -mierzalną zmienną losową. Korzystając z prawa wieży, dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - Z)^2] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) + (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)]^2 \\ &\geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] + 2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Z)] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] - 2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])Z]. \end{aligned}$$

Ponadto, zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])Z] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])Z | \mathcal{G}]] \\ &= \mathbb{E}[Z \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) | \mathcal{G}]] \\ &= \mathbb{E}[Z (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])] \\ &= 0, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

³W istocie można pokazać, że $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią Hilberta (z iloczynem skalarnym $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}XY$) oraz $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ jest jej liniową podprzestrzenią.

2 Wprowadzenie do procesów stochastycznych

W tym rozdziale będziemy używać \mathbb{T} od oznaczenia czasu. W przypadku dyskretnym, \mathbb{T} zazwyczaj odpowiada uporządkowanemu zbiorowi dni albo lat indeksowanego liczbami całkowitymi, tzn. $\mathbb{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ dla ustalonego $T \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ lub $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. W przypadku ciągłym \mathbb{T} zazwyczaj utożsamiamy z (pod-)zbiorem \mathbb{R} dla rozważanego okresu czasu, tzn. $\mathbb{T} = [0, T]$ dla jakiegoś $T \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

2.1 Podstawowe definicje i własności

Na początku zdefiniujemy formalnie proces stochastyczny.

Definicja 2.1 (Proces stochastyczny). Rodzinę zmiennych losowych $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ określoną na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indeksowaną parametrem $t \in \mathbb{T}$ nazywamy **procesem stochastycznym**.

Możemy patrzeć na proces stochastyczny, jak na funkcję $X: \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Czasami będziemy też rozważać wielowymiarową wersję procesu stochastycznego, zwaną *wektorowym procesem stochastycznym*, jeżeli wartości X będą w \mathbb{R}^n , tzn. dla każdego $t \in \mathbb{T}$ mamy do czynienia z wektorem losowym $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dla pewnego \mathbb{R}^n . Obie te rzeczy będziemy jednak w uproszczeniu nazywać *prosami stochastycznymi* mając na uwadze, że wymiar procesu będzie wynikał z kontekstu.

Dla ustalonego $\omega \in \Omega$, możemy patrzeć na $(X_t(\omega))_{t \in \mathbb{T}}$, jak na deterministyczną funkcję zależną od czasu, która jest konkretną realizacją procesu stochastycznego.

Definicja 2.2 (Trajektoria procesu stochastycznego). Niech X będzie procesem stochastycznym. **Trajektorią procesu stochastycznego** X dla zdarzenia elementarnego $\omega \in \Omega$ nazywamy funkcję $t \rightarrow X_t(\omega)$, gdzie $t \in \mathbb{T}$.

Zazwyczaj będziemy wymagać dodatkowych własności od procesu stochastycznego takich jak ciągłość trajektorii. Niektóre z przydatnych własności są podsumowane w Definicji 2.3. Dla uproszczenia, od teraz ograniczymy się do czasu ciągłego. O ile niektóre z własności w sposób naturalny przenoszą się na czas dyskretny (np. całkowalność) o tyle inne wymagają dodatkowych komentarzy (np. ciągłość).

Definicja 2.3 (Podstawowe własności procesów stochastycznych). Niech X będzie procesem stochastycznym w czasie ciągłym. Mówimy, że X jest

- 1) **mierzalnym**, jeżeli odwzorowanie $X: \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{T})$ -mierzalne;
- 2) **ciągły** (odp. lewostronnie ciągły, prawostronnie ciągły), jeżeli wszystkie trajektorie X są ciągłe (odp. lewostronnie ciągłe, prawostronnie ciągłe);
- 3) **stochastycznie ciągły**, jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi $X_s \rightarrow X_t$, $s \rightarrow t$, według prawdopodobieństwa, tzn. jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \mathbb{P}[|X_t - X_s| \geq \epsilon] \leq \epsilon, \quad \text{dla } s \in \mathbb{T} \text{ takich, że } |t - s| \leq \delta;$$

- 4) **cádlág**, jeżeli X jest prawostronnie ciągły oraz wszystkie trajektorie mają lewostronne granice dla każdego $t \in \mathbb{T}$,^a
- 5) **całkowalny**, jeżeli $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ dla każdego $t \in \mathbb{T}$;
- 6) **całkowalny z kwadratem**, jeżeli $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ dla każdego $t \in \mathbb{T}$;
- 7) **całkowalny z p -tą potęgą**, jeżeli $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty$ dla ustalonego $p \in \mathbb{N}$ i każdego $t \in \mathbb{T}$.

^afr. *continu á droite at limites á gauche*

Chcielibyśmy również powiązać ze sobą procesy dla których trajektorie są w pewnym sensie takie same.

Definicja 2.4 (Rozróżnialność procesów stochastycznych). Niech X, Y będą dwoma procesami stochastycznymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Mówimy, że

- 1) Y jest **nierozróżnialny** od X jeżeli $\mathbb{P}[X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}] = 1$.
- 2) Y jest **modyfikacją** X jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$.
- 3) Y ma te same **rozkłady skończenie wymiarowe** co X , jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$, skończonej liczby punktów $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$, oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dostajemy

$$\mathbb{P}[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A] = \mathbb{P}[(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in A].$$

Czasami, zamiast mówić, że Y jest *modyfikacją* procesu X będziemy mówić, że Y jest *wersją* X . Warto przy tym zauważyć, że jeżeli X oraz Y są (prawie) wszędzie ciągłe oraz są swoimi modyfikacjami, to są nierozróżnialne (ćw. do domu). Pokażmy teraz przykład procesów, które są swoimi modyfikacjami, ale jednak nie są nierozróżnialne.

Przykład 2.5. Niech $\mathbb{T} = [0, 1]$ oraz niech $\Omega = [0, 1]$ wyznacza standardową przestrzeń probabilistyczną. Definiujemy X poprzez $X_t \equiv 0$, dla każdego $t \in \mathbb{T}$, oraz Y poprzez

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } t = \omega, \\ 0 & \text{jeżeli } t \neq \omega. \end{cases}$$

Wtedy, dla każdego $t \in \mathbb{T}$ dostajemy $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = \mathbb{P}[\Omega \setminus \{t\}] = 1$ oraz $\mathbb{P}[X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}] = 0$.

Na koniec tego rozdziału zdefiniujemy trzy własności, które są używane do zadania pewnych użytecznych klas procesów stochastycznych; własności te można w łatwy sposób przeformułować w czasie dyskretnym.

Definicja 2.6 (Stacjonarność procesu stochastycznego). Niech X będzie procesem stochastycznym dla czasu ciągłego. Mówimy, że X jest procesem

- 1) **stacjonarnym**, jeżeli dla każdego (dopuszczalnego) przesunięcia $h \in \mathbb{T}$, procesy $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ oraz $(X_{t+h})_{t \in \mathbb{T}}$ mają te same rozkłady skończenie wymiarowe;
- 2) **słabo stacjonarnym**, jeżeli dla każdego (dopuszczalnego) przesunięcia $h \in \mathbb{T}$ procesy $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ oraz $(X_{t+h})_{t \in \mathbb{T}}$ mają skończenie wymiarowe rozkłady o tych samych (skończonych) pierwszych dwóch momentach;
- 3) o **niezależnych przyrostach** jeżeli dla każdego skończonego zbioru punktów $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ (z \mathbb{T}), zmienne losowe zadające przyrosty procesu, dane przez

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \quad X_{t_3} - X_{t_2}, \quad \dots, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

są niezależne.

Ponadto, jeżeli rozkłady dla wszystkich przyrostów $X_t - X_s$ zależą tylko od $t - s$, to mówimy, że X ma **niezależne i stacjonarne przyrosty**.

Warto zauważyć, że o ile własność 1) jest dosyć mocna i zazwyczaj wymaga się jej do dowodów własności teoretycznych, o tyle własność 2) można często zbadać empirycznie, np. za pomocą odpowiednich testów statycznych. Jest to szczególnie ważne w dziedzinie matematyki stosowanej zwanej przetwarzaniem sygnałów (ang. *signal processing*). Dodajemy, że słaba stacjonarność implikuje, że średnia wartość procesu jest taka sama (tzn. nie zależy od punktu w czasie), a funkcję auto-kowariancji dana przez

$$C_X(t, s) := \text{Cov}(X_t, X_s),$$

dla $t, s \in \mathbb{T}$, zależy tylko od różnicy między t i s .

2.2 Ciągłe modyfikacje i twierdzenia Kołmogorowa

Na początku tego podrozdziału pokażemy, że jeżeli proces ma ciągłą modyfikację, to musi być ciągły według prawdopodobieństwa.

Propozycja 2.7. Niech X będzie procesem stochastycznym dla którego istnieje ciągła modyfikacja. Wtedy X jest ciągły według prawdopodobieństwa.

Dowód. Niech \tilde{X} oznacza ciągłą modyfikację procesu X . Ustalmy $t \in \mathbb{T}$ oraz $\epsilon > 0$. Niech

$$A_n := \{\omega \in \Omega : \text{istnieje } s \in \mathbb{T} \text{ takie, że } |t - s| \leq \frac{1}{n} \text{ oraz } |\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \geq \epsilon\}.$$

Z ciągłości \tilde{X} wiemy, że zbiór A_n jest mierzalny ponieważ można go przedstawić jako

$$A_n := \{\omega \in \Omega : \text{istnieje } s \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q} \text{ takie, że } |t - s| \leq \frac{1}{n} \text{ oraz } |\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \geq \epsilon\}.$$

Ponadto, łatwo zauważyć, że rodzina zbiorów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępująca⁴ oraz $\mathbb{P}[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n] = 0$. Istnieje więc $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\mathbb{P}[A_{n_0}] \leq \epsilon. \quad (2.1)$$

Ponieważ \tilde{X} jest modyfikacją X oraz $\tilde{X}_t - \tilde{X}_s = (\tilde{X}_t - X_t) + (X_t - X_s) + (X_s - \tilde{X}_s)$ dostajemy

$$\mathbb{P}[|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \geq \epsilon] = \mathbb{P}[|X_t - X_s| \geq \epsilon]. \quad (2.2)$$

Łącząc (2.1) oraz (2.2) dostajemy, że dla każdego $\delta < \frac{1}{n_0}$ oraz $s \in \mathbb{T}$, które spełniają nierówność $|t - s| \leq \delta$, zachodzi

$$\mathbb{P}[|X_t - X_s| \geq \epsilon] = \mathbb{P}[|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \geq \epsilon] \leq \mathbb{P}[A_{n_0}] \leq \epsilon,$$

co kończy dowód wobec dowolności wyboru $t \in \mathbb{T}$ oraz $\epsilon > 0$. \square

Z Propozycji 2.7 wynika w szczególności, że każdy proces ciągły jest procesem ciągłym według prawdopodobieństwa; w istocie każda modyfikacja proces ciągłego jest ciągła według prawdopodobieństwa. Pokażmy teraz przykład procesu ciągłego według prawdopodobieństwa, dla którego nie istnieje ciągła modyfikacja.

Przykład 2.8. Niech $\mathbb{T} = [0, 1]$ oraz niech $Z \sim U[0, 1]$. Niech $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ będzie zadany przez

$$X_t(\omega) = \mathbb{1}_{[0, Z(\omega))}(t),$$

dla $t \in [0, 1]$ oraz $\omega \in \Omega$. Łatwo pokazać, że nie istnieje ciągła modyfikacja procesu X , choć jest on ciągły według prawdopodobieństwa (ćw. do domu).

Zanim sformułujemy (bez dowodu) dwie uproszczone wersje twierdzenia Kołmogorowa o ciągłości przypomnijmy tzw. warunek Höldera związany z ciągłością funkcji.

Definicja 2.9 (Warunek Höldera). Mówimy, że funkcja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia **warunek Höldera** na $I = [a, b]$ z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1)$, jeżeli istnieje dodatnia stała $C \in \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzi

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Oczywiście każda funkcją spełniająca warunek Höldera jest również ciągła. Dodatkowo, jeżeli f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1)$, to spełnia go również dla wykładnika γ , gdy $\gamma \leq \alpha$. Przedstawmy teraz pierwsze twierdzenie Kołmogorowa o ciągłości, które podamy bez dowodu, zob. [KS12, Twierdzenie 2.8]. Będziemy mówić, że proces X jest ciągły w sensie Höldera z danym wykładnikiem, gdy (prawie wszystkie) jego trajektorie spełniają warunek Höldera z tym wykładnikiem.

Twierdzenie 2.10 (Twierdzenie Kołmogorowa o ciągłości 1). Niech $\mathbb{T} = [a, b]$ oraz niech X będzie procesem stochastycznym. Wtedy, jeżeli istnieją stałe $p, K, \epsilon > 0$ takie, że dla każdego $t, s \in \mathbb{T}$ mamy

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \leq K|t - s|^{1+\epsilon}, \quad (2.3)$$

to X ma modyfikację, które jest ciągła w sensie Höldera dla każdego wykładnika $\alpha \in (0, \epsilon/p)$.

⁴i.e. $A_n \supseteq A_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$

O ile założenie o zwartości przedziału czasowego $\mathbb{T} = [a, b]$, może wyglądać restrykcyjnie, o tyle często się go używa (i potem rozszerza), żeby udowodnić istnienie ciągłych modyfikacji. W istocie Twierdzenie 2.11 jest niemal bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 2.10, zob. również [Oks13, Twierdzenie 2.2.3].

Twierdzenie 2.11 (Twierdzenie Kołmogorowa o ciągłości 2). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz niech X będzie procesem stochastycznym. Załóżmy, że dla każdego $T \in \mathbb{T}$ istnieją stałe $p, K, \epsilon > 0$ dla których spełniony jest warunek (2.3), $s, t \leq T$. Wtedy istnieje ciągła modyfikacja procesu X .

Jesteśmy gotowi aby zaprezentować drugi typ Twierdzenia Kołmogorowa (o rozszerzeniu). Mając dany rozkład skończenie wymiarowy dla każdego skończonego zbioru punktów (w czasie) chcielibyśmy sprawdzić, czy istnieje proces stochastyczny o takich rozkładach. Aby sformułować powiązane twierdzenie, musimy najpierw sformalizować pojęcie rozkładów skończenie wymiarowych.

Definicja 2.12 (Rozkłady skończenie wymiarowe). Niech X będzie procesem stochastycznym. Odwzorowanie $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \rightarrow [0, 1]$, które zadaje **rozkłady skończenie wymiarowe** dla X , dane jest przez

$$\mathbb{P}_X[A] := \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in \Gamma\}],$$

gdzie $A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in \Gamma\}$ jest zbiorem cylindrycznym^a, a $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ jest rodziną wszystkich zbiorów cylindrycznych na \mathbb{T} .

^azbiór $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ nazywamy **zbiorem cylindrycznym** jeżeli $A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in \Gamma\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $(t_i)_{i=1}^n$ jest rosnącym ciągiem (skończonych) punktów w czasie \mathbb{T} , a Γ jest zbiorem mierzalnym na \mathbb{R}^n .

Oczywiście jeżeli proces Y jest modyfikacją X to ich rozkłady skończenie wymiarowe są sobie równe (ćw. do domu). Zauważmy, ponadto że $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ jest zawsze algebrą, ale nie musi być σ -algebra.

Mając dane odwzorowanie \mathbb{P}_X zdefiniowane na zbiorach cylindrycznych $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$, chcielibyśmy (jednoznacznie) rozszerzyć je do miary probabilistycznej na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}})$, aby dostać rozkład powiązanego (kanonicznego) procesu stochastycznego. Innymi słowy, chcemy sprawdzić, czy generyczne odwzorowanie \mathbb{P}_X może być użyte do zdefiniowania jakiegoś procesu X . Okazuje się, że można to zrobić, jeżeli odwzorowanie \mathbb{P}_X spełnia tzw. własność zgodności. Zanim sformułujemy odpowiednie twierdzenie, musimy wprowadzić dodatkową notację.

Dla zadanego zbioru \mathbb{T} , niech \mathcal{T} oznacza zbiór wszystkich skończonych podzbiorów \mathbb{T} z częściowym porządkiem zadanym przez relację zawierania. Załóżmy, że mamy daną rodzinę $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{T}}$ miar probabilistycznych \mathbb{P}_I zadanych na $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}(\mathbb{R}^I))$. Dla $I_1 \subset I_2 \subset \mathbb{T}$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_1})$ definiujemy

$$\begin{aligned} C_{I_2, I_1}(A) &:= \{\omega \in \mathbb{R}^{I_2} : \{\omega(t); t \in I_1\} \in A\}, \\ C_{I_1}(A) &:= \{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : \{\omega(t); t \in I_1\} \in A\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $C_{I_2, I_1} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_1}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_2})$ oraz $C_{I_1} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_1}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}})$.⁵ Mówimy, że rodzina $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{T}}$ jest **zgodna**, jeżeli dla każdego zbiorów $I_1 \subset I_2 \subset \mathcal{T}$ zachodzi

$$\mathbb{P}_{I_1}[A] = \mathbb{P}_{I_2}[C_{I_2, I_1}(A)]$$

dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{I_1})$. Jesteśmy teraz gotowi na sformułowanie twierdzenia Kołmogorowa o rozkładach zgodnych, którego dowód pomijamy, zob. [KS12, Twierdzenie 2.2].

⁵W powyższych definicjach używamy skrótego (nieformalnego) zapisu $\{\omega(t); t \in I_1\} := (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n))$, gdy $I_1 = (t_1, \dots, t_n)$, dla $n \in \mathbb{N}$ i podobnie w przypadku nieprzeliczalnym. Zakładamy dodatkowo, że nie tracimy informacji o porządku, tj. współrzędne $\omega \in \mathbb{R}^{I_2}$ są wciąż związane z wartościami wektora I_2 .

Twierdzenie 2.13 (Twierdzenie Kołmogorowa o rozkładach zgodnych). Niech $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{T}}$ będzie zgodną rodziną miar probabilistycznych. Wtedy istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna \mathbb{P} na $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}))$ taka, że

$$\mathbb{P}[C_I(A)] = \mathbb{P}_I[A],$$

dla każdego $I \in \mathcal{T}$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^I)$.

Warto zauważyć, że własność zgodności założona w Twierdzeniu 2.13 jest naturalna. Chcemy zachować rozkład w przypadku, gdy usuniemy pewien zbiór punktów z wyjściowego zbioru I_2 , zawężając go do zbioru I_1 . Twierdzenie 2.13 mówi nam w szczególności, że mając dany proces stochastyczny X i powiązaną funkcję rozkładów skończenie wymiarowych \mathbb{P}_X , możemy ją jednoznacznie rozszerzyć do miary na $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ (zdefiniowanej na σ -algebrze zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$).

2.3 Filtracja i adaptowalność

Zacznijmy od podstawowych definicji.

Definicja 2.14 (Filtracja). **Filtracją** przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy niemalejącą rodzinę $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ pod σ -algebr \mathcal{F} indeksowaną czasem.^a

^atj. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, dla $s \leq t$, gdzie $t, s \in \mathbb{T}$.

Zazwyczaj \mathcal{F}_t można interpretować jako naszą wiedzę o danym systemie do chwili t . Przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ razem z filtracją \mathbb{F} czasami będziemy nazywać skrótowo *przestrzenią z filtracją* i oznaczać skrótowo przez $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. W czasie ciągłym, będziemy zazwyczaj wymagać of filtracji prawostronnej ciągłości

Definicja 2.15 (Prawostronna ciągłość filtracji). Filtrację \mathbb{F} nazywamy **prawostronnie ciągłą**, jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+},$$

gdzie $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t, s \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_s$.

W teorii procesów stochastycznych można często spotkać sformułowanie, które mówi, że przestrzeń z filtracją spełnia tzw. *zwykłe warunki* (ang *usual conditions*). Zazwyczaj odnosi się to do prawostronnej ciągłości i zupełności filtracji.⁶

Jak już wspomnieliśmy, filtracja reprezentuje naszą ogólną wiedzę o systemie, natomiast proces stochastyczny odpowiada realizacji pewnego zjawiska związanego z tym systemem. Aby sformalizować tę intuicję, wprowadźmy teraz pojęcie adaptowalności.

Definicja 2.16 (Proces adaptowany do filtracji). Mówimy, że proces stochastyczny X jest **adaptowany** do filtracji \mathbb{F} (albo **\mathbb{F} -adaptowany**), jeżeli X_t jest \mathcal{F}_t -mierzalny dla każdego $t \in \mathbb{T}$.

Oczywiście, nasza ogólna wiedza o systemie może być niejako wbudowana w sam proces, to daje nam następującą definicję.

⁶tzn. zarówno \mathcal{F} oraz \mathcal{F}_t , dla $t \in \mathbb{T}$, zawierają w sobie wszystkie podzbiory \mathcal{F} -mierzalnych zbiorów miary zero względem \mathbb{P} ; przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ nazywamy zupełną, gdy dla każdego $S \subset \Omega$ takiego, że $S \subseteq N$ oraz N jest mierzalnym zbiorem miary zero N ($N \in \Sigma$ oraz $\mathbb{P}[N] = 0$) zachodzi $S \in \Sigma$.

Definicja 2.17 (Filtracja generowana przez proces stochastyczny). Niech X będzie procesem stochastyczny. Filtrację $\mathbb{F}^X := (\mathcal{F}_t^X)_{t \in \mathbb{T}}$ zadaną przez

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t, s \in \mathbb{T})$$

nazywamy filtracją **generowaną** przez proces stochastyczny X .

Innymi słowy, filtracja jest generowana przez proces X , jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{T}$, σ -algebra \mathcal{F}_t^X jest najmniejszą σ -algebrą względem której X_s jest \mathcal{F}_t^X -mierzalny, dla każdego czasu $s \in \mathbb{T}$, spełniającego $s \leq t$.

Warto zauważyć, że filtracje generowane przez procesy prawostronnie ciągle w ogólności niekoniecznie są prawostronnie ciągle.⁷ Implikacja odwrotna również w ogólności nie jest prawdziwa, tj. filtracja generowana przez proces, który nie jest prawostronnie ciągły może być prawostronnie ciągła.⁸ Tak czy inaczej, przy pewnych dodatkowych warunkach nałożonych na proces (np. Fellera) definicje te są już ze sobą ściślej związane.

Znając pojęcie filtracji, możemy zdefiniować pojęcie progresywnej mierzalności.

Definicja 2.18 (Progresywna mierzalność). Proces stochastyczny X zdefiniowany na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ nazywamy **progresywnie mierzalnym** jeżeli jest on \mathbb{F} -adaptowany oraz dla każdego $t \in \mathbb{T}$ odwzorowanie $(\mathbb{T} \cap (-\infty, t]) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zadane przez $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ jest $\mathcal{B}(\mathbb{T} \cap (-\infty, t]) \times \mathcal{F}_t$ mierzalne.

Mówiąc intuicyjnie, chielibyśmy, aby proces okrojony do czasu $t \in \mathbb{T}$ był mierzalny względem informacji dostępnej do czasu t . Pokażmy teraz na prostym przykładzie, że pojęcia *mierzalności* oraz *progresywnej mierzalności* nie są tożsame.

Przykład 2.19. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie standardową przestrzenią probabilistyczną z $\Omega = [0, 1]$. Niech

$$\mathcal{A} := \sigma(N \subset [0, 1] : \#N < \infty)$$

zadaje σ -algebrę przeliczalnych zbiorów (i ich dopełnień). Dla $\mathbb{T} = [0, +\infty)$ zdefiniujmy filtrację $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jako

$$\mathcal{F}_t := \begin{cases} \mathcal{A} & \text{dla } t \in [0, 1); \\ \mathcal{F} & \text{dla } t \in [1, \infty). \end{cases}$$

Zadajmy następnie proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ poprzez

$$X_t(\omega) := \mathbb{1}_\Delta(t, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } t = \omega \text{ oraz } t \leq 1/2, \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega.$$

gdzie $\Delta := \{(t, t) : t \in [0, \frac{1}{2}]\}$ jest podzbiorem zbioru $\mathbb{T} \times \Omega$.

⁷Niech $X = (X_t)_{t \in [0, 1]}$ będzie zadany przez $X_t = tZ$, dla ustalonej zmiennej losowej $Z \sim U[0, 1]$.

⁸Niech Z będzie ściśle dodatnią zmienną losową i niech $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie taki, że $X_t = Z$ dla $t \in [0, 1] \cup (2, +\infty)$ oraz $X_t = 0$ dla $t \notin [0, 1] \cup (2, +\infty)$

Łatwo zauważyć, że X jest procesem mierzalnym, gdyż $\Delta \in \mathcal{B}([0, 1]) \times \mathcal{F}$. Jest on także \mathbb{F} -adaptowany, ponieważ dla każdego $t \geq 0$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy

$$X_t^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{jeżeli } t \in [0, +\infty), 0 \notin A, \text{ oraz } 1 \notin A, \\ \{t\} & \text{jeżeli } t \in [0, 1/2], 0 \notin A, \text{ oraz } 1 \in A, \\ [0, 1] \setminus \{t\} & \text{jeżeli } t \in [0, 1/2], 0 \in A, \text{ oraz } 1 \notin A, \\ [0, 1] & \text{jeżeli } t \in [0, 1/2], 0 \in A, \text{ oraz } 1 \in A, \\ [0, 1] & \text{jeżeli } t \in [1/2, +\infty), 0 \in A. \end{cases}$$

co daje nam $X_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t$. Pokażmy teraz, że X nie jest progresywnie mierzalny. Ustalmy $T = 1/2$ i pokażemy, że

$$\Delta \notin \mathcal{B}([0, 1/2]) \times \mathcal{F}_{1/2}, \quad (2.4)$$

tj. $\Delta \notin \mathcal{B}([0, 1/2]) \times \mathcal{A}$. Zakładając, że (2.4) nie zachodzi dostalibyśmy

$$\Delta \in \sigma(A_n : n \in \mathbb{N}) \times \sigma(D_n : n \in \mathbb{N}),$$

dla pewnych ciągów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$, będących podzbiórmi $\mathcal{B}([0, 1/2])$ oraz $\mathcal{A} \cap [0, 1/2]$. Z Twierdzenia Fubinięgo i definicji Δ dostajemy, że dla (prawie) każdego ustalonego $t \in [0, 1/2]$ musi zachodzić

$$\{t\} = \{\omega \in \Omega : (\omega, t) \in \Delta\} \in \sigma(D_n : n \in \mathbb{N}).^9$$

Definiując $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ oraz zauważając, że

$$\sigma(D_n : n \in \mathbb{N}) \subset \{A \in \Omega : A = \Gamma \text{ lub } A = \Gamma \cup (\Omega \setminus D), \text{ gdzie } \Gamma \subseteq D\},$$

dostajemy, że dla (prawie) każdego $t \in [0, 1/2]$ mamy $\{t\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, co w konsekwencji daje nam

$$[0, 1/2] \subset D.^{10}$$

Wniosek ten przeczy założeniu, że rodzina D_n jest przeliczalna, jako przeliczalna suma przeliczalnej liczby elementów.

Warto tutaj również zauważyć, że proces $Y \equiv 0$ jest progresywnie mierzalną modyfikacją procesu X ponieważ

$$\mathbb{P}[X_t = 0] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 0\}] = \mathbb{P}[\Omega \setminus \{t\}] = 1.$$

Jak wspomnieliśmy, w wielu przypadkach progresywna mierzalność i mierzalność można w pewnym sensie ze sobą utożsamić, na przykład poprzez zdefiniowanie odpowiedniej modyfikacji procesu. Przykładowo, jeżeli proces X jest mierzalny i adaptowany do filtracji, to ma on progresywnie mierzalną modyfikację, zob. [KS12, Propozycja 1.12]. Jeżeli proces X jest adaptowany do filtracji i prawostronnie (lub lewostronnie) ciągły, to jest on również progresywnie mierzalny, zob. [KS12, Propozycja 1.13].

Na końcu tego podrozdziału, zdefiniujemy własność *prognozowalności*.

⁹Łatwo to zrozumieć rysując zbiór Δ na kwadracie jednostkowym $[0, 1]^2$.

¹⁰z dokładnością do zbioru miary zero

Definicja 2.20 (Prognozowalność). Niech $P_{\mathbb{T}}$ określa σ -algebrę na $\mathbb{T} \times \Omega$, która jest generowana przez wszystkie lewostronnie ciągłe oraz adaptowane procesy stochastyczne, tj. najmniejszą σ -algebrę, która zawiera zbiory

$$A \times (s, t], \quad s, t \in \mathbb{T}, s < t, A \in \mathcal{F}_s.$$

Wtedy,

- $P_{\mathbb{T}}$ nazywamy **prognozowalną σ -algebrą**.
- proces stochastyczny X nazywamy **prognozowalnym**, jeżeli jest $P_{\mathbb{T}}$ -mierzalny.

Czasami wprowadza się też obiekt $O_{\mathbb{T}}$, tj. σ -algebrę na $\mathbb{T} \times \Omega$, która jest generowana przez prawostronnie ciągłe i adaptowane procesy (ang. *optional σ -algebra*). Można w łatwy sposób pokazać, że σ -algebra $P_{\mathbb{T}}$ jest w istocie generowana przez ciągłe i adaptowane procesy, co implikuje $O_{\mathbb{T}} \subseteq P_{\mathbb{T}}$. Na koniec podajmy (bez dowodu) twierdzenie Dellacherie–Meyera, zob. [PZ07, Propozycja 3.21].

Twierdzenie 2.21 (Twierdzenie Dellacherie–Meyera). Niech filtracja \mathbb{F} będzie prawostronnie ciągła. Wtedy dla każdego mierzalnego, adaptowanego oraz stochastycznie ciągłego procesu istnieje prognozowalna modyfikacja.

2.4 Momenty stopu

Zakładając, że proces stochastyczny odzwierciedla wartość w pewnej grze (albo cenę akcji, czy portfela na rynku finansowym), chcielibyśmy zdefiniować zmienną losową, która w pewien sposób zada nam moment zatrzymania. Może się to odnosić do sytuacji w której nasza stopa zwrotu inwestycji przekroczy jakiś próg lub wielkość poniesionych strat przekroczy pewien pułap (np. wartość portfela spadnie poniżej pewnej wartości). Podajmy teraz definicję momentu stopu, który może do tego służyć

Definicja 2.22 (Moment stopu). Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Zmienną losową τ o wartościach w zbiorze $\mathbb{T} \cup \{+\infty\}$, tj.

$$\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$$

nazywamy **momentem losowym**. Moment losowy τ nazywamy **momentem stopu** (lub *\mathbb{F} -momentem stopu, momentem zatrzymania, momentem Markowa*) jeżeli

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

dla każdego $t \in \mathbb{T}$.

Mówiąc intuicyjnie, moment losowy jest momentem stopu, jeżeli możemy zmierzyć, czy zdarzeniu $\{\tau \leq t\}$ zaszło (lub nie) bazując na informacji dostępnej do chwili $t \in \mathbb{T}$. Momenty stopu wyznacza nam regułę zatrzymania, która może wpływać na nasze strategie inwestycyjne (e.g. zadać moment wycofania kapitału z rynku, jeżeli osiągnięty przez nas zysk przekroczy pewien pułap). Dla uproszczenia od teraz będziemy zawsze zakładać (o ile nie będzie napisane wprost inaczej, że moment stopu jest *skończony*, tzn. spełniony jest warunek

$$\mathbb{P}[\{\tau = +\infty\}] = 0.$$

Założenie to jest przyjęte głównie w celach technicznych, np. aby skrócić wypowiedź niektórych twierdzeń. W odniesieniu do momentów stopu będziemy również używać konwencji

$$\inf \emptyset = +\infty,$$

tj. jeżeli nigdy nie będziemy w stanie spełnić warunków zatrzymania, to wartość odpowiedniego momentu stopu będzie równa $+\infty$, co odpowiada sytuacji, w której się nie zatrzymujemy.

Pokażmy teraz prosty przykład momentu stopu, który obrazuje użyteczność wprowadzonego pojęcia.

Przykład 2.23 (Pierwszy moment wejścia do zbioru). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oraz niech X będzie \mathbb{F} -adaptowanym procesem stochastycznym. Wtedy, dla każdego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zmienna losowa

$$\tau_B := \inf\{t \in \mathbb{T} : X_t \in B\},$$

określająca pierwszy moment wejścia procesu X do zbioru B , jest momentem stopu.

Dowód. Dla każdego $t \in \mathbb{T}$ mamy

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{T} : s \leq t} \{X_s \in B\}.$$

Ponieważ X jest \mathbb{F} -adaptowany, wiemy, że $\{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_s$ i w rezultacie $\{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_t$. Ponieważ \mathcal{F}_t jest σ -algebrą, więc suma przeliczalnej rodziny zbiorów $\{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_t$ należy do \mathcal{F}_t , co kończy dowód. \square

Można zadać sobie również pytanie, czy *ostatni* moment wejście do zbioru, tj. zmienna losowa $\rho = \sup\{t \in \mathbb{T} : X_t \in B\}$, jest momentem stopu. Niestety, **nie jest to prawda** (poza pewnymi zdegenerowanymi przypadkami). Mówiąc intuicyjnie, musielibyśmy mieć wiedzę o przyszłych wartościach X , aby wiedzieć, że proces ten nie wróci już do zbioru B (ćw. do domu). Zastanówmy się teraz przy jakich dodatkowych założeniach Przykład 2.23 można rozszerzyć do czasu ciągłego. Zanim je sformułujemy, przedstawmy kilka użytecznych faktów.

Propozycja 2.24. Niech \mathbb{F} będzie filtracją, a $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{T}$ określonym na niej momentem stopu. Wtedy, dla każdego $t \in \mathbb{T}$, zdarzenia $\{\tau > t\}$, $\{\tau < t\}$, oraz $\{\tau = t\}$ są \mathcal{F}_t -mieralne.

Dowód. Ponieważ \mathcal{F}_t jest σ -algebrą oraz dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, więc dopełnienie tego zbioru jest również \mathcal{F}_t mieralne, tj.

$$\{\tau > t\} = \{\tau \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t.$$

Wiemy również, że zachodzi

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{s < t, s \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}} \{\tau \leq s\},$$

gdzie \mathbb{Q} jest zbiorem liczb wymiernych, co daje nam $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$. Wynika stąd w szczególności, że

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

\square

W ogólności, w czasie ciągłym warunku $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$, nie da się zastąpić warunkiem $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ lub $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$. Można to jednak zrobić przy pewnych dodatkowych założeniach nałożonych na filtrację.

Propozycja 2.25. Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz niech filtracja \mathbb{F} będzie prawostronnie ciągła. Wtedy, zmienna losowa $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{T}$ jest momentem stopu wtedy i tylko wtedy, gdy dla $t \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (2.5)$$

Dowód. Pierwsza część dowodu (implikacja w lewą stronę) jest przedstawiona w Propozycji 2.24. Załóżmy teraz, że zmienna τ spełnia (2.5). Wtedy, dla każdego $t \in \mathbb{T}$ oraz $s_0 > t$ dostajemy

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{s>t, s \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}} \{\tau < s\} \in \mathcal{F}_{s_0}.$$

Wynika stąd, że $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$, co kończy dowód, gdyż z założeń wiemy, że $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$. \square

Warto również, przypomnieć, że dla czasu dyskretnego τ jest momentem stopu wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$ (ćw. do domu). Na koniec pokażemy, że dla dowolnego ciągu momentów stopu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ich supremum jest również momentem stopu. Przy dodatkowych warunkach nałożonych na filtrację \mathbb{F} momentem stopu jest również ich infimum, granica dolna oraz granica górna. Dla uproszczenia, zamiast pisać $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ będziemy używać skróconej notacji $\sup \tau_n$ (gdzie supremum jest zdefiniowane po ω -ch dla $n \rightarrow \infty$).

Propozycja 2.26. Niech \mathbb{F} będzie filtracją, a $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem \mathbb{F} -momentów stopu. Wtedy $\sup \tau_n$ jest \mathbb{F} -momentem stopu. Dodatkowo, jeżeli \mathbb{F} jest prawostronnie ciągła, to zmienne losowe $\inf \tau_n$, $\limsup \tau_n$, oraz $\liminf \tau_n$ są również momentami stopu.

Dowód. Łatwo zauważyć, że $\sup \tau_n$ jest zmienną losową (ćw. do domu) oraz dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\{\sup \tau_n \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Założmy teraz, że \mathbb{F} jest prawostronnie ciągła. Z Propozycji 2.25 wystarczy pokazać warunek momentu stopu dla silnych nierówności. Ustalając $t \in \mathbb{T}$ oraz biorąc dopełnienie zbioru $\{\inf \tau_n < t\}$ dostajemy

$$\{\inf \tau_n \geq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n \geq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n < t\}^c \in \mathcal{F}_t,$$

skąd wynika już $\{\inf \tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$. Zachodzi również

$$\begin{aligned} \{\limsup \tau_n < t\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{\tau_m < t - 1/k\} \in \mathcal{F}_t, \\ \{\liminf \tau_n > t\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\tau_m > t + 1/k\} \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

co kończy dowód. \square

Przedstawmy teraz przykład analogiczny do Przykładu 2.23, ale dla czasu ciągłego.

Przykład 2.27. Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz niech X będzie \mathbb{F} -adaptowanym procesem stochastycznym. Załóżmy, że X oraz \mathbb{F} są prawostronnie ciągłe. Wtedy dla każdego otwartego (lub domkniętego) zbioru $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zmienna losowa

$$\tau_B := \inf\{t \in \mathbb{T} : X_t \in B\}$$

określająca pierwszy moment wejścia procesu X do zbioru B , jest momentem stopu.

Dowód. Niech B będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R} . Z Propozycji 2.5 wiemy, że wystarczy pokazać, że dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi $\{\tau_B \geq t\} = \{\tau_B < t\} \in \mathcal{F}_t$. Ponieważ X jest prawostronnie ciągły, dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\{\tau_B \geq t\} = \{X_s \in B^c, s \in \mathbb{T}, s < t\} = \bigcap_{s < t, s \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}} \{X_s \in B^c\} \in \mathcal{F}_t.$$

co kończy dowód w przypadku, gdy B jest zbiorem otwartym. Załóżmy teraz, że B jest zbiorem domkniętym. Dla $\epsilon > 0$, niech B_ϵ oznacza ϵ -otoczkę zbioru B , tj. zbiór punktów takich, że ich odległość od zbioru B jest silnie mniejsza od ϵ . Ponieważ B_ϵ jest zbiorem otwartym, wiemy, że τ_{B_ϵ} jest momentem stopu. Korzystając z Propozycji 2.26 oraz zauważając, że

$$\tau_B = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \tau_{B_\epsilon},$$

dostajemy, że τ_B jest momentem stopu, co kończy dowód. \square

Podobnie jak w czasie dyskretnym, zmienna losowa powstała przez dokonanie pewnych operacji na momentach stopu, również jest momentem stopu.

Propozycja 2.28. Niech τ, ρ będą momentami stopu (dla pewnej filtracji \mathbb{F}). Wtedy,

- 1) $\tau + \rho$ jest momentem stopu;^a
- 2) $\tau \wedge \rho := \min\{\tau, \rho\}$ jest momentem stopu;
- 3) $\tau \vee \rho := \max\{\tau, \rho\}$ jest momentem stopu.

^aZakładając, że τ oraz ρ są nieujemne oraz $\rho + \tau$ przyjmuje wartości w \mathbb{T} .

Dowód. Aby dowieść 1) wystarczy zauważyć, że

$$\{\tau + \rho > t\} = \left[\{\tau = 0\} \cap \{\rho > t\} \right] \cup \left[\bigcup_{s \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)} \{\tau > s\} \cap \{\rho > t - s\} \right] \in \mathcal{F}_t.$$

Aby dowieść 2) oraz 3) wystarczy zauważyć, że

$$\{\tau \wedge \rho \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\rho \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{oraz} \quad \{\tau \vee \rho \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\rho \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

\square

Zdefiniujmy teraz pewne obiekty, które wiążą nam proces stochastyczny z momentem stopu. Dla uproszczenia, od teraz będziemy zakładać, że rozważane momenty stopu są progresywnie mierzalne względem zadanej filtracji. Jak wspomnieliśmy, momenty stopu mogą być wykorzystane, aby zastopować proces, albo zdefiniować wartość procesu dla losowego czasu. Można również zdefiniować σ -algebrę, która będzie w sobie zawierać informacje dostępne do losowej chwili odpowiadającej pewnemu momentowi stopu.

Definicja 2.29 (Losowa próba z procesu, proces zatrzymany). Niech τ będzie (skończonym) momentem stopu (dla pewnej filtracji \mathbb{F}) oraz niech X będzie progresywnie mierzalnym procesem stochastycznym.

- 1) **Losową próbę (względem czasu) z procesu X** w chwili τ oznaczamy przez X_τ i definiujemy jako

$$X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega), \quad \text{dla } \omega \in \Omega.$$

- 2) **Proces zatrzymany** w chwili τ oznaczamy przez $X^\tau = (X_t^\tau)_{t \in \mathbb{T}}$ i definiujemy jako

$$X_t^\tau := X_{t \wedge \tau}, \quad \text{dla } t \in \mathbb{T}.$$

- 3) σ -**algebrę generowaną przez moment zatrzymania τ** , oznaczamy przez \mathcal{F}_τ i definiujemy jako

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{ dla każdego } t \in \mathbb{T}\}.$$

Zauważmy, że w ogólnym przypadku funkcja $X_\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nie musi być mierzalna (czy \mathcal{F}_τ -mierzalna). W przypadku progresywnej mierzalności procesu X , funkcja X_τ jest jednak zmienną losową. Należy również pokazać, że \mathcal{F}_τ jest w istocie σ -algebrą.

Propozycja 2.30. Niech τ będzie (skończonym) momentem stopu (dla filtracji \mathbb{F}). Wtedy rodzina zbiorów \mathcal{F}_τ jest σ -algebrą oraz τ jest zmienną \mathcal{F}_τ -mierzalną. Dodatkowo, jeżeli X jest progresywnie mierzalnym procesem stochastycznym, to X_τ jest \mathcal{F}_τ -mierzalną zmienną losową, a X^τ jest procesem \mathbb{F} -adaptowanym.

Dowód. Pokażmy najpierw, że \mathcal{F}_τ jest σ -algebrą. Wprost z definicji dostajemy, że $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$, ponieważ $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in \mathbb{T}$. Jeżeli $A \in \mathcal{F}_\tau$, to dla każdego $t \in \mathbb{T}$, zachodzi

$$A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \setminus (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

a więc $A^c \in \mathcal{F}_\tau$. Dla zbioru zdarzeń $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, takiego, że $A_n \in \mathcal{F}_\tau$, $n \in \mathbb{N}$, dostajemy z kolei

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

dla każdego $t \in \mathbb{T}$, co daje nam $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_\tau$. Warunki te pokazują, że \mathcal{F}_τ jest w istocie σ -algebrą. Łatwo również zauważyć, że $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}$, jako podrodzina zbiorów \mathcal{F} .

Aby pokazać, że τ jest \mathcal{F}_τ -mierzalna (i jest zmienną losową) wystarczy pokazać, że dla każdego $s \in \mathbb{R}$ zdarzenie $\{\tau \leq s\}$ należy do \mathcal{F}_τ . Bez straty ogólności założmy, że $s \in \mathbb{T}$ (ponieważ τ przyjmuje wartości w \mathbb{T}). Wtedy, dla $A_s = \{\tau \leq s\}$ dostajemy

$$A_s \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t \wedge s} \subseteq \mathcal{F}_t,$$

dla każdego $t \in \mathbb{T}$, co kończy tę część dowodu.

Założmy teraz, że X jest procesem progresywnie \mathbb{F} -mierzalnym i pokażmy, że proces X^τ jest adaptowany, tzn. dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zmienna X_t^τ jest \mathcal{F}_t -mierzalna. Ustalmy $t \in \mathbb{T}$. Ponieważ $\tau \wedge t$ jest momentem stopu, dostajemy, że funkcja $Z : \Omega \rightarrow \Omega \times [0, t]$ zdefiniowana jako $Z(\omega) = (\omega, \tau(\omega) \wedge t)$, jest \mathcal{F} -mierzalna (gdyż jej brzegi są funkcjami mierzalnymi).¹¹ Z progresywnej mierzalności X

¹¹w istocie odwzorowanie jest zachowuje również \mathcal{F}_t -mierzalność.

wiemy również, że funkcja $W : \Omega \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jako $W(\omega, s) = X_s(\omega)$ jest funkcją $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mierzalną. Wynika stąd, że funkcja $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jako

$$V(\omega) = W(Z(\omega)) = X_{\tau(\omega) \wedge t}(\omega),$$

jest \mathcal{F}_t -mierzalna, co pokazuje, że X^τ jest adaptowany.

Pozostaje nam pokazać, że X_τ jest funkcją \mathcal{F}_τ mierzalną. W tym celu wystarczy pokazać, że dla każdego $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zachodzi $\{X_\tau \in \Gamma\} \in \mathcal{F}_\tau$, czyli, że dla każdego $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ oraz $t \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\{X_\tau \in \Gamma\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Korzystając z funkcji wcześniej zdefiniowanych, dla każdego $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ oraz $t \in \mathbb{T}$ dostajemy

$$\{X_\tau \in \Gamma\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau \wedge t} \in \Gamma\} \cap \{\tau \leq t\} = V^{-1}(\Gamma) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

co kończy dowód. □

Oczywiście w przypadku dyskretnym progresywna mierzalność jest równoważna mierzalności, więc Definicja 2.30 jest również dobrze postawiona, gdy założymy mierzalność procesu X (ćw. do domu).

2.5 Martyngały

Podrozdział ten zaczniemy od sformułowanie definicji własności martyngałowej w przypadku ciągłym.

Definicja 2.31 (Martyngał). Niech X będzie całkowalnym procesem stochastycznym adaptowanym dla filtracji \mathbb{F} . Mówimy, że:

- 1) X jest **martyngałem** dla filtracji \mathbb{F} , jeżeli dla każdych $s, t \in \mathbb{T}$, takich, że $s \leq t$, zachodzi

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s;$$

- 2) X jest **submartyngałem** (lub podmartyngałem) dla filtracji \mathbb{F} , jeżeli dla każdych $s, t \in \mathbb{T}$, takich, że $s \leq t$, zachodzi

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s;$$

- 3) X jest **supermartyngałem** (lub nadmartyngałem) dla filtracji \mathbb{F} , jeżeli dla każdych $s, t \in \mathbb{T}$, takich, że $s \leq t$, zachodzi

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s.$$

Czasami, dla uproszczenia, będziemy mówić, że X jest \mathbb{F} -martyngałem (odp. \mathbb{F} -submartyngałem, \mathbb{F} -supermartyngałem) albo, jeżeli filtracja jest określona z góry, po prostu martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem). Korzystając z prawa wieży, łatwo udowodnić poniższą propozycję (ćw. do domu).

Propozycja 2.32. Niech X będzie adaptowanym całkownym procesem stochastycznym dla pewnej filtracji \mathbb{F} . Wtedy

- 1) Jeżeli X jest martyngałem, to $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s]$ dla $t, s \in \mathbb{T}$;
- 2) Jeżeli X jest podmartyngałem, to $\mathbb{E}[X_t] \geq \mathbb{E}[X_s]$ dla $t, s \in \mathbb{T}$, takich, że $t \geq s$;
- 3) Jeżeli X is supermartyngałem, to $\mathbb{E}[X_t] \leq \mathbb{E}[X_s]$ dla $t, s \in \mathbb{T}$, takich, że $t \geq s$.

Dodatkowo, jeżeli X jest martyngałem względem \mathbb{F} (odp. podmartyngałem, supermartyngałem), to jest on również martyngałem względem swojej naturalnej filtracji.

W klasie martyngałów wyróżnia się też tzw. *regularne martyngały*.

Definicja 2.33 (Regularny martyngał). Niech X będzie martyngałem. Wtedy X nazywamy **regularnym martyngałem** jeżeli istnieje zmienna losowa η taka, że dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$X_t = \mathbb{E}[\eta | \mathcal{F}_t].$$

Jeżeli czas jest skończony, to łatwo pokazać, że każdy martyngał jest w istocie regularnym martyngałem (ćw. do domu).

Propozycja 2.34. Niech $\mathbb{T} = [0, T]$ dla pewnego $T \in \mathbb{R}_+$ ^a oraz niech X będzie martyngałem filtracji \mathbb{F} . Wtedy $X_t = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t]$ dla każdego $t \in \mathbb{T}$.

^alub $\mathbb{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ dla $T \in \mathbb{N}$.

W ogólnym przypadku istnieją oczywiście martyngały, które nie są regularne. Najprostszym przykładem jest spacer losowy (z naturalną filtracją). Podobnie jak w czasie dyskretnym, nierówność Jensena pozwala nam zachować własność podmartyngały przy obłożeniu procesu funkcją wypukłą.

Propozycja 2.35 (Twierdzenie o obłożeniu martyngału funkcją wypukłą). Niech X będzie martyngałem, a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja wypukła. Wtedy proces $(f(X_t))_{t \in \mathbb{T}}$ jest podmartyngałem (zakładając, że jest całkowny).

Dowód. Korzystając z warunkowej nierówności Jensena, dla każdego $t, s \in \mathbb{T}$, takiego, że $t > s$, dostajemy $f(X_s) = f(\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]) \geq \mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s]$, co kończy dowód. \square

Następne twierdzenie pokazuje nam, że zastopowany martyngał jest również martyngałem. Dla uproszczenia, twierdzenie (i dowód) formułujemy tylko dla czasu dyskretnego. W przypadku ciągłym własność ta jest również zachowana dla procesów prawostronnie ciągłych, zob. [KS12, Problem 3.24].

Twierdzenie 2.36 (Twierdzenie o zastopowanym martyngale dla czasu dyskretnego). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oraz niech X będzie martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem). Wtedy, dla każdego momentu stopu τ , zastopowany proces X^τ jest martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem).

Dowód. Pokażemy dowód dla submartyngału (pozostałe przypadki są analogiczne). Niech X będzie submartyngałem, a τ momentem stopu. Dla czasu dyskretnego wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^\tau | \mathcal{F}_n] \geq X_n^\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$X_{n \wedge \tau} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} X_k + \mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} X_n,$$

Wynika stąd, że zastopowany proces X^τ jest całkowalny. Ponieważ

$$X_{(n+1) \wedge \tau} - X_{n \wedge \tau} = \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} (X_{n+1} - X_n), \quad (2.6)$$

zachodzi również

$$X_{n \wedge \tau} = X_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (X_{(k+1) \wedge \tau} - X_{k \wedge \tau}) = X_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{\tau > k\}} (X_{k+1} - X_k).$$

Proces X^τ jest więc \mathbb{F} -adaptowany. Zauważając, że $\{\tau > n\} = \{\tau \leq n\}^c \in \mathbb{F}_n$ oraz korzystając z (2.6) dotajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(n+1) \wedge \tau} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n \wedge \tau} + X_{(n+1) \wedge \tau} - X_{n \wedge \tau} | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[X_{n \wedge \tau} + \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} (X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= X_{n \wedge \tau} + \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] \\ &\geq X_{n \wedge \tau}. \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Nierówności martyngałowe przedstawione w Propozycji 2.32 są również prawdziwe dla momentów stopu, co wynika z Twierdzenia Dooba o warunkowym stopowaniu, zob. [KS12, Twierdzenie 3.22]. Udowodnijmy teraz tę własność dla czasu dyskretnego.

Twierdzenie 2.37 (Twierdzenia Dooba o warunkowym stopowaniu dla czasu dyskretnego). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oraz niech X będzie martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem). Niech $\tau_1 \leq \tau_2$ będą dwoma ograniczonymi momentami stopu.^a Wtedy zachodzi

$$\mathbb{E}[X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = X_{\tau_1} \quad (\text{odp. } \geq \text{ lub } \leq).$$

^amoment stopu nazywamy ograniczonym, jeżeli istnieje taka stała $N \in \mathbb{R}$, że $\tau \leq N$.

Dowód. Pokażemy dowód dla submartyngału (pozostałe przypadki są analogiczne). Z Propozycji 2.30 wiemy, że dla $i = 1, 2$, zmienne losowe X_{τ_i} są \mathcal{F}_{τ_i} -mieralne, oraz \mathcal{F}_{τ_i} jest σ -algebrą. Niech $N \in \mathbb{N}$ będzie stałą dla której $\tau_2 \leq N$ (moment stopu τ_2 jest ograniczony). Wiemy, że X_{τ_1} oraz X_{τ_2} są całkowalne, gdyż dla $i = 1, 2$ zachodzi

$$\mathbb{E}|X_{\tau_i}| \leq \sum_{n=1}^N \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

Należy pokazać, że dla każdego $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ zachodzi

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{\tau_1}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{\tau_2}].$$

Zauważając, że $A = \bigcup_{k=1}^N A_k$, gdzie $A_k := \{\tau_1 = k\} \cap A$ oraz, że zbiory A_k są \mathcal{F}_{τ_1} -mierzalne, wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} X_{\tau_1}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} X_{\tau_2}].$$

dla każdego $k = 1, 2, \dots, N$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ ($k \leq N$) oraz zdefiniujmy

$$L(n) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} X_{n \wedge \tau_2}], \quad \text{for } n = k, k+1, \dots, N.$$

Pokażmy teraz, że funkcja L jest niemalejąca. Zakończy to dowód, gdyż, korzystając z faktu, że $\tau_1 \leq \tau_2$, dostaniemy

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} X_{\tau_1}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} X_{\tau_1 \wedge \tau_2}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} X_{k \wedge \tau_2}] = L(k) \leq L(N) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} X_{N \wedge \tau_2}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} X_{\tau_2}].$$

Dla każdego $n = k+1, \dots, N$ mamy

$$L(n+1) - L(n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} (X_{(n+1) \wedge \tau_2} - X_{n \wedge \tau_2})] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k \cap \{\tau_2 > n\}} (X_{n+1} - X_n)].$$

Ponieważ X jest submartyngałem, wystarczy pokazać, że dla każdego n zachodzi

$$A_k \cap \{\tau_2 > n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Ponieważ τ_1 oraz τ_2 są momentami stopu, wiemy, że zachodzi $\{\tau_2 > n\} \in \mathcal{F}_n$ oraz

$$A_k = A \cap \{\tau_1 = k\} = A \cap \{\tau_1 \leq k\} \setminus A \cap \{\tau_1 \leq k-1\}.$$

Ponieważ $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, wiemy, że $A \cap \{\tau_1 \leq k\} \in \mathcal{F}_k$ oraz $A \cap \{\tau_1 \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}$, co daje nam łącznie $A_k \cap \{\tau_2 > n\} \in \mathcal{F}_n$, gdyż dla $k-1 < k \leq n$ zachodzi $\mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$. \square

Warto wspomnieć, że w literaturze istnieje w istocie wiele wersji Twierdzenia Dooba o warunkowym stopowaniu przy różnych założeniach. Ponadto często przedstawia się je w bezwarunkowej postaci, tzn. rozważając po obu stronach bezwarunkowe wartości oczekiwane, oraz zakładając, że interesuje nas wartość startowa procesu, tzn. kładąc $\tau_1 \equiv 1$. Przykładowe alternatywne sformułowanie dla czasu dyskretnego podajemy w Twierdzeniu 2.38.

Twierdzenie 2.38 (Twierdzenia Dooba o warunkowym stopowaniu dla czasu dyskretnego – alternatywna wersja). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oraz niech X będzie martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem). Niech τ będzie skończonym momentem stopu takim, że zmienna X_τ jest całkowalna oraz $\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}] \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Wtedy zachodzi

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_1] \quad (\text{odp. } \geq \text{ lub } \leq).$$

Dowód. Korzystając z tego, że X_τ jest zmienną całkowalną oraz zauważając, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $X_\tau = X_{\tau \wedge n} + (X_\tau - X_n) \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}$ dostajemy

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_{\tau \wedge n}] + \mathbb{E}[X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}] - \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}].$$

Z Twierdzenia 2.36 mówiącego, że zastopowany martyngał jest martyngałem, dostajemy $\mathbb{E}[X_{\tau \wedge n}] = \mathbb{E}[X_1]$. Korzystając z założeń, dla $n \rightarrow \infty$, zachodzi więc

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_1] + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}].$$

Pozostaje pokazać, że $\mathbb{E}[X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}] \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$\mathbb{E}[X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}] = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{\tau=i\}}].$$

Korzystając z założeń wiemy, że suma ta jest w istocie (ogonową) sumą częściową zbieżnego szeregu $\mathbb{E}[X_\tau] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{\tau=i\}}]$, a więc musi zmierzać do zera, gdy $n \rightarrow \infty$, co kończy dowód. \square

Na koniec sformułujmy jeszcze rezultaty dla czasu dyskretnego, który zwany jest *tożsamością Walda*.

Propozycja 2.39 (Tożsamość Walda). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oraz niech X będzie całkowalnym procesem stochastycznym adaptowanym dla filtracji \mathbb{F} . Załóżmy, że dla $n \in \mathbb{N}$, zmienne X_n mają taki sam rozkład, są całkowalne, oraz zmienna X_{n+1} jest niezależna od \mathcal{F}_n . Wtedy dla dowolnego momentu stopu τ , takiego, że $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, zachodzi

$$\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_\tau] = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[X_1].^a$$

^aZmienną $X_1 + \dots + X_\tau$ formalnie definiujemy jako $S_\tau := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}(X_1 + \dots + X_i)$.

Dowód. Niech $S_\tau := X_1 + \dots + X_\tau$. Korzystając z tego, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zmienne X_i oraz $\mathbb{1}_{\{\tau > i-1\}}$ są niezależne dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|S_\tau|] &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{\tau > i-1\}}] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_i|] \mathbb{P}(\tau > i-1) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_1|] \mathbb{P}(\tau > i-1) = \mathbb{E}[|X_1|] \mathbb{E}[\tau] < \infty, \end{aligned}$$

Wiedząc, że zmienna S_τ oraz moment stopu τ są całkowalne i postępując podobnie jak powyżej dostajemy

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\tau} X_i] = \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_1] \mathbb{P}(\tau > i-1) = \mathbb{E}[\tau] \mathbb{E}[X_1],$$

co kończy dowód; wyjaśnienie dlaczego możemy zmieniać kolejność sumowania w szeregu, itd., pozostawione jest jako ćwiczenie do domu. Warto zauważyć, że można przeprowadzić alternatywny dowód i skorzystać z Twierdzenia 2.38 dla procesu $S_t = \sum_{i=1}^t X_i - t\mathbb{E}[X_1]$, który to proces jest martyngałem. \square

Na koniec tego podrozdziału wypowiemy (bez dowodów) wersje Twierdzenia 2.36 oraz Twierdzenia 2.37 dla czasu ciągłego, w przypadku procesów cádląg, zob. [KS12, Problem 3.24] oraz [KS12, Twierdzenie 3.22].

Twierdzenie 2.40 (Twierdzenie o zastopowanym martyngale dla czasu ciągłego). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz niech proces X będzie procesem cádląg, który jest martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem). Wtedy, zastopowany proces X^τ jest martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem).

Twierdzenie 2.41 (Twierdzenia Dooba o warunkowym stopowaniu dla czasu ciągłego). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz niech proces X będzie procesem cádląg, który jest martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem). Niech $\tau_1 \leq \tau_2$ będą dwoma ograniczonymi momentami stopu. Wtedy zachodzi

$$\mathbb{E}[X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = X_{\tau_1} \quad (\text{odp. } \geq \text{ lub } \leq).$$

Warto również wspomnieć, że dla stochastycznie ciągłych martyngałów istnieje ich modyfikacja cádląg, co pozwala osłabić powyższe założenia, zob [Kal02].

Twierdzenie 2.42. Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz niech X będzie stochastycznie ciągłym martyngałem (odp. submartyngałem, supermartyngałem). Wtedy istnieje modyfikacja cádląg procesu X .

2.6 Dekompozycja Dooba-Meyera

Zacznijmy od sformułowania i dowodu twierdzenia dekompozycyjnego w czasie dyskretnym.

Twierdzenie 2.43 (Dekompozycja Dooba dla czasu dyskretnego). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oraz niech X będzie submartyngałem (odp. supermartyngałem). Wtedy istnieje jednoznaczna dekompozycja

$$X_t = M_t + A_t,$$

dla $t \geq 0$, gdzie $M = (M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ oraz $A = (A_t)_{t \in \mathbb{T}}$ są procesami stochastycznymi takimi, że M jest martyngałem, a A jest niemalejącym (odp. nierosnącym) procesem prognozowalnym oraz $A_0 = 0$.^a

^aW czasie dyskretnym *prognozowalność* odpowiada założeniu, że X_t jest \mathcal{F}_{t-1} mierzalny.

Dowód. Niech X będzie submartyngałem. Wtedy A oraz M możemy zdefiniować bezpośrednio, zadając $A_0 := 0$, $M_0 := X_0$, oraz dla $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_t &:= \sum_{k=1}^t (\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}), \\ M_t &:= X_0 + \sum_{k=1}^t (X_k - \mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}]), \end{aligned}$$

Łatwo pokazać, że dla $t \in \mathbb{N}$ zachodzi $X_t = M_t + A_t$. Dodatkowo, ponieważ X jest submartyngałem, dostajemy, że A jest niemalejący. Dla każdego $t \in \mathbb{N}$ zachodzi również

$$\mathbb{E}[M_t - M_{t-1} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_t - \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = 0,$$

co pokazuje, że M jest martyngałem. Jednoznaczność tej dekompozycji pozostawiamy jako proste ćwiczenie. \square

Usuając założenie o monotoniczności nałożonej na proces A , można dokonać (prawie na pewno jednoznacznej) dekompozycji Dooba dla każdego adaptowanego i całkowalnego procesu stochastycznego dyskretnego.

Zanim sformułujemy odpowiednik Twierdzenia 2.43 w przypadku ciągłym potrzebujemy zdefiniować kilka powiązanych pojęć. Zacznijmy od pojęcia jednostajnej ciągłości.

Definicja 2.44 (Jednostajna ciągłość). Niech $\mathbf{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ będzie rodziną zmiennych losowych indeksowaną zbiorem I . Mówimy, że rodzina \mathbf{X} jest **jednostajnie całkowalna** jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : \sup_{\alpha \in I} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{|X_\alpha| > M\}} |X_\alpha|] < \epsilon.$$

Wprowadźmy teraz dwie klasy procesów stochastycznych, tzw. klasę (D) oraz (DL). Dla uproszczenia notacji, dla każdego $s \in \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ będziemy oznaczać przez Σ_s rodzinę wszystkich momentów stopu (względem zadanej z góry filtracji \mathbb{F}) o wartościach mniejszych lub równych s , tj

$$\Sigma_s := \{\tau : \tau \leq s\}.$$

Definicja 2.45 (Klasy procesów stochastycznych). Niech X będzie prawostronnym submartyngałem. Wtedy, mówimy, że

- X należy do **klasy (D)** jeżeli rodzina zmiennych losowych $\{X_\tau : \tau \in \Sigma_\infty\}$ jest jednostajnie całkowalna,
- X należy do **klasy (DL)** jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{T}$ rodzina $\{X_\tau : \tau \in \Sigma_t\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Można patrzeć na klasy (D) oraz (DL) jako na uogólnienia pojęcia jednostajnej całkowalności dla procesów stochastycznych. O ile na pierwszy rzut oka Definicja 2.45 może wyglądać na zawoalowaną, o tyle jest one w istocie uogólnieniem prostej i intuicyjnej własności: z Twierdzenia 2.41 widać, że dla procesu X będącego martyngałem i procesem cądląg, $t \in \mathbb{T}$, oraz ograniczonego momentu stopu $\tau \leq t$, dostajemy

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_\tau] = X_\tau. \quad (2.7)$$

Ponieważ rodziną warunkowych wartości oczekiwanych dla zadanej zmiennej losowej (względem różnych sub σ -algebr) jest jednostajnie całkowalna, warunek klasy (DL) jest wtedy spełniony. Sformułujmy teraz formalnie i udowodnijmy ten fakt.

Propozycja 2.46. Niech X będzie procesem stochastycznym typu cądląg oraz martyngałem. Wtedy X należy do klasy (DL).

Dowód. Ustalmy $t \in \mathbb{T}$. Ponieważ dla każdego momentu stopu τ spełniającego warunek $\tau \leq t$ zachodzi (2.7), wystarczy pokazać, że rodzina zmiennych losowych

$$\mathbf{Y} := \{Y : Y = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{B}] \text{ dla pewnego } \mathcal{B}, \text{ gdzie } \mathcal{B} \text{ jest pod } \sigma\text{-algebrą } \mathcal{F}\}$$

jest jednostajnie całkowalna. Z warunkowej nierówności Jensena, dla $Y \in \mathbf{Y}$ i powiązanej σ -algebry \mathcal{B} dostajemy

$$\mathbb{E}[|Y|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_t | \mathcal{B}]|] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_t| | \mathcal{B}]] = \mathbb{E}[|X_t|], \quad (2.8)$$

do daje nam całkowalność zmiennej Y . Z całkowalności $|X_t|$ wiemy również, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje stała $\delta > 0$, taka, że dla każdego $A \in \mathcal{F}$ spełniającego $\mathbb{P}[A] \leq \delta$ zachodzi $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A | X_t|] < \epsilon$. Ustalmy $\epsilon > 0$ i oznaczmy przez $\delta > 0$ powiązaną stałą (niezależną od Y). Dla $a := \frac{\mathbb{E}[|X_t|]}{\delta}$ oraz zbioru $A := \{|Y| > a\}$, korzystając z nierówności Markowa oraz (2.8), dostajemy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[|Y| > a] \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[|Y|] \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[|X_t|] = \delta.$$

Zauważając, że $A \in \mathcal{B}$, dostajemy więc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \cdot |Y|] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \cdot |\mathbb{E}[X_t | \mathcal{B}]|] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{E}[|X_t| | \mathcal{B}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \cdot |X_t| | \mathcal{B}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | X_t|] \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Kończy to dowód, gdyż dla ustalonego $t \in \mathbb{T}$ wybór a nie zależał od Y . □

Możemy teraz sformułować (bez dowodu) jedną z uproszczonych wersji dekompozycji Doob-Meyera dla czasu ciągłego, zob. [KS12, Twierdzenie 4.10]

Twierdzenie 2.47 (Dekompozycja Dooba-Meyera w czasie ciągłym). Niech X będzie procesem stochastycznym typu cádlág oraz submartyngałem należącym do klasy (DL). Wtedy istnieje jednoznaczna dekompozycja

$$X_t = M_t + A_t,$$

dla $t \geq 0$, gdzie $M = (M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ oraz $A = (A_t)_{t \in \mathbb{T}}$ są procesami stochastycznymi takimi, że M jest martyngałem, a A jest niemalejącym (odp. nierosnącym) procesem prognozowalnym oraz $A_0 = 0$.

Dekompozycja Dooba-Meyer jest pomocna do charakteryzacji tzw. *wariacji kwadratowej* (lub *wahania kwadratowego*) procesu X , która, jeżeli istnieje, jest określona jako

$$\langle X, X \rangle_t := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2, \quad (2.9)$$

gdzie P jest rozbiem (partycją) zbioru $[0, t]$, $\|P\|$ odpowiada długości najdłuższego z odcinków ($\|\cdot\|$ to tzw. *mesh norm*), a granicę w (2.9) należy rozumieć, jako granicę w sensie zbieżności według prawdopodobieństwa. Istotnie, można pokazać, że jeżeli X jest całkowalnym z kwadratem procesm cádlág oraz martyngałem, wtedy X^2 jest submartyngałem klasy (DL). Dowód tego faktu pozostawiamy jako proste ćwiczenie (wystarczy użyć nierówności Jensena). Wariacja kwadratowa jest wtedy prognozowalną częścią dekompozycji.¹²

Propozycja 2.48. Niech X będzie całkowalnym z kwadratem procesem stochastycznym typu cádlág oraz martyngałem. Wtedy wariacja kwadratowa procesu X zadana jest przez

$$\langle X, X \rangle_t = X_t^2 - M_t,$$

gdzie $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest martyngałem z Twierdzenia 2.47 (dla procesu $(X_t^2)_{t \in \mathbb{T}}$).

3 Ważne klasy procesów stochastycznych w czasie ciągłym

W rozdziale tym przedstawimy ważne przykłady procesów stochastycznych. Jeżeli nie napisano inaczej, będziemy zawsze zakładać czas ciągły z punktem startowym, tj. $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. W Definicji 2.6 wprowadziliśmy własność procesu stochastycznego związaną ze stacjonarnością i niezależnością jego przyrostów. Wychodząc od tej własności można zdefiniować ważną klasę procesów stochastycznych.

Definicja 3.1 (Proces Lévy'ego). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Mówimy, że proces stochastyczny X jest **procesem Lévy'ego** jeżeli

- 1) $X_0 = 0$;
- 2) X jest stochastycznie ciągły;
- 3) X ma niezależne i stacjonarne przyrosty.

¹²Dlaczego rozważamy pojęcie *wariacji kwadratowej* i dlaczego jest ono interesujące? Wyjaśni się to potem, gdy będziemy jej potrzebować do całkowania przez części i zamiany zmiennych w *lemacie Itô*.

Klasa procesów Lévy’ego jest ważna zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia. Na procesy te można patrzeć, jak na uogólnienie spaceru losowego w czasie ciągłym. Istotnie, dla procesu Lévy’ego X , określonego kroku czasowego $h > 0$ oraz $k \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$X_{kh} = \sum_{i=1}^k (X_{ih} - X_{(i-1)h}),$$

gdzie $(X_{ih} - X_{(i-1)h})_{i=1}^k$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie.

Klasa procesów Lévy’ego spełnia również wiele innych przydatnych własności, takich ja własność Markowa (którą formalnie zdefiniujemy później), która razem ze stochastyczną ciągłością implikuje istnienie modyfikacji cádląg. Uproszczone sformułowanie tego wniosku podajemy bez dowodu w Propozycji 3.2, zob. [PZ07, Twierdzenie 3.23].

Propozycja 3.2. Każdy proces Lévy’ego posiada modyfikację cádląg.

Zazwyczaj będziemy wymagać, aby przyrosty procesu miały określony rozkład, np. rozkład normalny, czy rozkład Poissona wraz z zadaną strukturą zależności. Dowód istnienia procesu o zadanych własnościach często wykorzystuje Twierdzenie Kołmogorowa o rozkładach zgodnych, zob. Twierdzenie 2.13. Aby udowodnić istnienie modyfikacji cádląg często korzysta się z kolei z Twierdzenie Kołmogorowa o ciągłości, zob. Twierdzenie 2.11. Inną ważną klasą procesów stochastycznych są tzw. procesy gaussowskie.

Definicja 3.3 (Proces Gaussowski). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **procesem gaussowskim** jeżeli jego rozkłady skończenie wymiarowy są gaussowskie, tj. dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq t_1 < \dots < t_n < \infty$ wektor losowy $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ ma wielowymiarowy rozkład Gaussa.

Najbardziej znanymi przykładami procesów gaussowskich jest *ruch Browna* oraz *most Browna*, zob [PZ07]. W następnym rozdziale zdefiniujemy formalnie *ruch Browna*, który jest zarówno procesem gaussowskim, jak i proces Lévy’ego.

3.1 Ruch Browna

W tym podrozdziale zdefiniujemy ruch Browna, często nazywany też procesem Wienera oraz omówimy jego podstawowe własności i różne charakteryzacje. Proces ten jest kluczowym pojęciem w analizie stochastycznej i jest używany w wielu dziedzinach matematyki finansowej, ekonomii, czy fizyki.

Definicja 3.4 (Ruch Browna). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Proces stochastyczny $W = (W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy standardowym **ruchem Browna** (lub **procesem Wienera**), jeżeli spełnia on następujące warunki:

1. $W_0 = 0$;
2. W jest procesem ciągłym (p.n.);
3. W ma niezależne przyrosty;^a
4. $W_t - W_s \sim N(0, \sqrt{t-s})$ dla każdych $0 \leq s \leq t$.

^atj. dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq t_1 < \dots < t_n < \infty$ zmienne losowe $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$, są niezależne.

Z Definicji 3.4 łatwo wywnioskować, że ruch Browna jest procesem Lévy’ego, w którym przyrosty zadane są przez zmienne o rozkładzie Gaussa ze stałą (zerową) średnią oraz wariancją zależną od przyrostu czasu. Warto tutaj zauważyć, że o ile przyrosty procesu są stacjonarne, o tyle sam proces nie jest stacjonarny. Zanim udowodnimy, że ruch Browna jest dobrze określony (na razie nie udowodniliśmy, że proces taki istnieje!) przedstawmy kilka jego podstawowych własności.

Propozycja 3.5 (Charakterystyki ruchu Browna). Niech W będzie ruchem Browna. Wtedy

1. W jest procesem gaussowskim;
2. $\mathbb{E}[W_t] = 0$, dla $t \in \mathbb{T}$;
3. $C_W(t, s) = \text{Cov}(W_t, W_s) = t \wedge s$, dla $t, s \in \mathbb{T}$.

Ponadto zachodzi też charakteryzacja odwrotna, tj. każdy ciągły proces, który spełnia wyżej wymienione warunki, jest ruchem Browna.

Dowód Propozycji 3.5 pozostawiamy jako ćwiczenie do domu; warto tutaj przypomnieć że wektory gaussowskie są jednoznacznie określone przez swoje pierwsze dwa momenty, wektor złożony z niezależnych zmiennych o rozkładzie Gaussa ma wielowymiarowy rozkład Gaussa, oraz kombinacje liniowe wektorów gaussowskich są również wektorami gaussowskimi.

Zakładając, że nasza przestrzeń probabilistyczna (przestrzeń mierzalna) ma odpowiednio bogatą strukturę pokażemy, że możemy na niej zdefiniować ruch Browna.

W5
-
W6

Twierdzenie 3.6 (Istnienie ruchu Browna). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}))$. Wtedy istnieje taka miara probabilistyczna \mathbb{P} określona na (Ω, \mathcal{F}) oraz proces stochastyczny W taki, że W jest ruchem Browna.

Dowód. Pokażemy tylko szkic dowodu; pełny dowód można znaleźć w [KS12, Rozdział 2.2]. Będziemy używać $I = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \in \mathcal{T}$ do oznaczenia (dowolnego) skończonego zbioru punktów z \mathbb{T} takich, że $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, dla $n \in \mathbb{N}$. Dodatkowo, niech μ_I oznacza gaussowską miarę probabilistyczną na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ o wektorze średnich równym zero oraz macierzy wariancji-kowariancji $(n \times n)$ zadanej przez

$$M_I := [t_i \wedge t_j]_{i,j \in I}.^{13}$$

Używając notacji z Rozdziału 2.2, dla każdego $I = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ oraz $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definiujemy

$$C(I, \Gamma) := \{\omega \in \Omega : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in \Gamma\}.$$

Niech $\mathcal{F}_I := \{C(I, \Gamma) : \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ oznacza σ -algebrę wszystkich zbiorów cylindrycznych dla ustalonego $I \in \mathcal{T}$ oraz niech \mathbb{P}_I oznacza powiązaną miarę probabilistyczną na (Ω, \mathcal{F}_I) zadaną przez

$$\mathbb{P}_I[C(I, \Gamma)] = \mu_I(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Można pokazać, że tak zadana rodzina miar $(\mathbb{P}_I)_{I \in \mathcal{T}}$ jest zgodna; dowód tego faktu pozostawiamy, jako ćwiczenie do domu. Możemy więc skorzystać z Twierdzenia Kołmogorowa o rozkładach

¹³Dowód, że M_I zadaje poprawnie określoną macierz wariancji-kowariancji dla każdego $I \in \mathcal{T}$ zostawiamy jako ćwiczenie domowe.

zgodnych, tj. Twierdzenia 2.13. Mówiąc ściślej, wiemy, że istnieje miara probabilistyczna na (Ω, \mathcal{F}) , oznaczmy ją przez \mathbb{P} , taka, że dla każdego $I = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{T}$ oraz $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$\mathbb{P}[C(I, \Gamma)] = \mathbb{P}_I[C(I, \Gamma)].$$

Na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}), \mathbb{P})$ zdefiniujmy proces $W = (W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ zadany przez

$$W_t(\omega) := \omega(t), \quad \text{dla } t \in \mathbb{T} \text{ oraz } \omega \in \Omega.$$

Łatwo pokazać, że W jest procesem Gaussowskim, $W_0 = 0$, oraz jego funkcja autokowariancji pokrywa się z tą zadaną w Propozycji 3.5. Łatwo z tego wywnioskować, że przyrosty procesu W są niezależne oraz zachodzi $W_t - W_s \sim N(0, \sqrt{t-s})$, dla każdych $0 \leq s \leq t$. Oczywiście własności te są też spełnione dla dowolnej modyfikacji procesu W .

Aby zakończyć dowód pozostaje więc pokazać, że istnieje ciągła modyfikacja procesu W . Zauważając, że dla dowolnych $t, s \in \mathbb{T}$ oraz $p \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{|W_t - W_s|}{\sqrt{|t-s|}} \right)^{2p} \right] = \mathbb{E} [|X|^{2p}],$$

gdzie $X \sim N(0, 1)$ oraz definiując stałą $K_p := \mathbb{E}[|X|^{2p}]^{1/2}$ ¹⁴, dostajemy własność

$$\mathbb{E}|W_t - W_s|^{2p} = K_p |t-s|^p, \quad t, s \in \mathbb{T}. \quad (3.1)$$

Wynika stąd, że proces W spełnia założenia Twierdzenia Kołmogorowa o ciągłości, tj. Twierdzenia 2.11, dla stałej określonej przez $\epsilon = p-1$. Z twierdzenia tego wynika istnienie modyfikacji procesu W , która jest ciągła. Modyfikacja ta spełnia wszystkie własności przedstawione w Definicji 3.4 a więc jest ruchem Browna. \square

O ile Twierdzenie 3.6 gwarantuje nam istnienie ruchu Browna, o tyle przedstawione przez nas dowód nie jest konstruktywny, tzn. pokazaliśmy, że na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}))$ istnieje jakaś miara \mathbb{P} oraz jakaś modyfikacja procesu kanonicznego, która jest ruchem Browna. Istnienie ruchu Browna można również pokazać w sposób bardziej konstruktywny korzystając np. z *konstrukcji Lévy-Ciesielskiego*. W konstrukcji tej korzysta się z funkcji Haara określonych na $[0, 1]$ oraz pokazuje zbieżność odpowiedniego ciągu niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Gaussa. Konstrukcja ta wymaga tylko, aby na danej przestrzeni probabilistycznej istniał ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Gaussa, zob. [KS12, Rozdział 2.3].

Przedstawmy teraz kilka własności ruchu Browna. Na początek podsumujemy, jakie transformacje ruchu Browna są wciąż ruchami Browna.

Propozycja 3.7 (Transformacje ruchu Browna). Niech W będzie ruchem Browna. Wtedy, następujące transformacje procesu W są również ruchami Browna:

- **Przesunięcie względem czasu**, tzn. dla każdego $s > 0$, proces $\tilde{W}_t = W_{t+s} - W_s$ jest ruchem Browna;
- **Dodatnie skalowanie**, tzn. dla $c > 0$, proces $\tilde{W}_t = cW_{t/c^2}$ jest ruchem Browna;
- **Odwroćenie czasu**, tzn. proces $\tilde{W}_0 = 0$ oraz $\tilde{W}_t = tW_{1/t}$ (dla $t > 0$) jest ruchem Browna;
- **Odbicie ścieżek**, tzn. proces $\tilde{W}_t = -W_t$ jest ruchem Browna.

¹⁴Warto sobie przypomnieć, że wszystkie momenty dla standardowego rozkładu Gaussa istnieją i są skończone, więc stała K_p jest skończona dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$

Dowód Propozycji 3.7 pozostawiamy jako ćwiczenie do domu. Przedstawmy teraz własności ruchu Browna związane z ciągłością.

Propozycja 3.8 (Własności związane z ciągłością ruchu Browna). Niech W będzie ruchem Browna. Wtedy

1. W jest ciągły w sensie Höldera z wykładnikiem $\alpha < 1/2$;^a
2. W nie jest ciągły w sensie Höldera z wykładnikiem $\alpha = 1/2$ na dowolnym przedziale czasu;
3. Trajektorie W są wszędzie nieróżniczkowalne;
4. Trajektorie W mają nieskończone wahanie na dowolnym przedziale czasu.

^atj. istnieje modyfikacja, która spełnia tę własność

Dowód. Niech W będzie ruchem Browna.

1) Przypominając własność (3.1) z dowodu Twierdzenia 3.6 wiemy, że zachodzi

$$\mathbb{E}|W_t - W_s|^{2p} = K_p |t - s|^p, \quad t, s \in \mathbb{T},$$

dla każdego $p \in \mathbb{N}$. Zauważając, że dla $\epsilon = p - 1$ zachodzi

$$\frac{\epsilon}{2p} = \frac{p-1}{2p} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{przy } p \rightarrow \infty,$$

oraz używając Twierdzenia 2.10 wiemy, że możemy znaleźć modyfikację W , która jest ciągła w sensie Höldera dla dowolnego wykładnika $\alpha < 1/2$.

2) Niech $B_{[a,b]}^C$ będzie zbiorem wszystkich trajektorii, które spełniają warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha = 1/2$ na przedziale $[a, b]$ ze stałą $C \in \mathbb{R}_+$, tzn.

$$B_{[a,b]}^C := \{\omega \in \Omega \mid \forall_{s,t \in [a,b]} : |W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq C|t - s|^{1/2}\}.$$

Pokażmy najpierw, że dla każdego $C \in \mathbb{N}$ oraz $a, b \in \mathbb{Q}$ ($a < b$) dostajemy $\mathbb{P}[B_{[a,b]}^C] = 0$. Ponieważ W ma stacjonarne i niezależne przyrosty, zamiast przedziału $[a, b]$ możemy rozważać przedział $[0, b-a]$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i powiązanego rozbicia $0 < \frac{1}{n}(b-a) < \dots < \frac{n-1}{n}(b-a) < b-a$ dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B_{[a,b]}^C] &\leq \mathbb{P}\left[\left\{\left|W_{\frac{i}{n}(b-a)} - W_{\frac{i-1}{n}(b-a)}\right| \leq C\sqrt{\frac{b-a}{n}}, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n\right\}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left[\left\{\left|W_{\frac{i}{n}(b-a)} - W_{\frac{i-1}{n}(b-a)}\right| \leq C\sqrt{\frac{b-a}{n}}\right\}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\left\{\left|W_{\frac{b-a}{n}}\right| \leq C\sqrt{\frac{b-a}{n}}\right\}\right]^n \\ &= \mathbb{P}\{ |W_1| \leq C \}^n \end{aligned}$$

Niech $a_n := \mathbb{P}\{|W_1| \leq C\}^n$. Z faktu, że $a_n \searrow 0$ (gdy $n \rightarrow \infty$) dostajemy $\mathbb{P}\left[B_{[a,b]}^C\right] = 0$. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{C \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{a < b \\ a, b \in \mathbb{Q}}} B_{[a,b]}^C\right] \leq \sum_{C \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{a < b \\ a, b \in \mathbb{Q}}} \mathbb{P}\left[B_{[a,b]}^C\right] = 0.$$

3) Przedstawimy tylko szkic dowodu, zob. [KS12, Twierdzenie 9.18]. Ustalmy $\omega \in \Omega$ i załóżmy, że trajektoria $W(\omega)$ jest różniczkowalna w punkcie $s \in \mathbb{T}$. Wtedy musi istnieć $\epsilon > 0$ oraz $K \in \mathbb{N}$ taki, że dla $t \in [s, s + \epsilon)$ zachodzi

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq K(t - s). \quad (3.2)$$

Można łatwo pokazać, że z (3.2) wynika, że dla każdego odpowiednio dużego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $i \in \mathbb{N}$, takie, że $i \leq ns$ oraz dla $k = 0, 1, 2$ zachodzi

$$|W_{(i+k+1)/n}(\omega) - W_{(i+k)/n}(\omega)| \leq 7\frac{K}{n}. \quad (3.3)$$

Dla $M \in \mathbb{N}$ niech A_M oznacza zbiór trajektorii, dla których istnieje co najmniej jeden punkt w $[0, M)$ taki, że W jest w tym punkcie różniczkowalny. Z własności (3.3) wiemy, że

$$A_M \subset \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{Mn} \bigcap_{k=0}^2 \left\{ |W_{(i+k+1)/n} - W_{(i+k)/n}| \leq 7\frac{K}{n} \right\}.$$

Korzystając z własności $\sqrt{n}W_{1/n} \sim N(0, 1)$ oraz stacjonarności i niezależności przyrostów, dla każdego ustalonego $n_0 \in \mathbb{N}$ oraz $K \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{Mn} \bigcap_{k=0}^2 \left\{ |W_{(i+k+1)/n} - W_{(i+k)/n}| \leq 7\frac{K}{n} \right\}\right] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (Mn + 1) \mathbb{P}\left[|W_{1/n}| < 7\frac{K}{n}\right]^3 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} Mn \mathbb{P}\left[|W_1| < 7\frac{K}{\sqrt{n}}\right]^3 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} Mn \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{7K/\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right)^3 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} Mn \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{7K/\sqrt{n}} 1 dx\right)^3 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} Mn \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{7K}{\sqrt{n}}\right)^3 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

gdzie $C := M \left(\frac{14K}{\sqrt{2\pi}}\right)^3$ jest stałą zależną tylko od M oraz K . Zauważając, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{\sqrt{n}} = 0$, oraz korzystając z (przeliczalnej) addytywności miary dostajemy, że $\mathbb{P}[A_M] = 0$.

4) Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$, jeżeli

$$\sup_{\mathbf{t} \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{i=1}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)| < \infty,$$

gdzie $\mathcal{P}[a, b]$ jest zbiorem wszystkich rozbić $[a, b]$, tj. $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i ściśle rosnącego ciągu liczb spełniającego $t_1 = a$ oraz $t_n = b$. Rozumując podobnie jak poprzednio, wystarczy pokazać, że dla $a, b \in \mathbb{Q}_+$ ($a < b$) oraz $C \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left\{ \sum_{i=1}^n \left| W_{\frac{i}{n}(b-a)} - W_{\frac{i-1}{n}(b-a)} \right| \leq C \right\} \right] = 0.$$

Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy $X_n := \sum_{i=1}^n \left| W_{\frac{i}{n}(b-a)} - W_{\frac{i-1}{n}(b-a)} \right|$. Przypominając, że dla zmiennej $Z \sim N(0, 1)$ zachodzi $\mathbb{E}[|Z|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ oraz $\text{Var}(|Z|) = 1 - \frac{2}{\pi}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{b-a}{n}} \mathbb{E}[|W_1|] = \sqrt{\frac{2(b-a)}{\pi}} n, \\ \text{Var}[X_n] &= \sum_{i=1}^n \text{Var} \left[\left| W_{\frac{i}{n}(b-a)} - W_{\frac{i-1}{n}(b-a)} \right| \right] = n \text{Var} \left[\left| W_{\frac{b-a}{n}} \right| \right] = (b-a) \left(1 - \frac{2}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Z nierówność Czebyszewa-Bienaimé wiemy, że dla każdego $r > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}[X_n - \mathbb{E}[X_n] \leq -r] \leq \mathbb{P}[|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geq r] \leq \frac{\text{Var}[X_n]}{r^2}.$$

Zauważając, że $\mathbb{E}[X_n] > 0$ i ustalając $r = \frac{\mathbb{E}[X_n]}{2}$, dostajemy

$$\mathbb{P} \left[X_n \leq \frac{\mathbb{E}[X_n]}{2} \right] \leq \frac{\text{Var}[X_n]}{E[X_n]^2} = \frac{4(b-a) \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)}{2(b-a) \frac{1}{\pi} n} = \frac{2\pi \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)}{n}.$$

Ponieważ $E[X_n] \rightarrow \infty$ (dla $n \rightarrow \infty$), a więc dla każdego $C \in \mathbb{N}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$ zachodzi

$$\mathbb{P}[X_n \leq C] \leq \mathbb{P} \left[X_n \leq \frac{\mathbb{E}[X_n]}{2} \right] \leq \frac{2\pi \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)}{n}.$$

Stąd wynika już, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \leq C] = 0$ dla każdego $C \in \mathbb{N}$. \square

Na koniec przedstawmy też charakterystyki związane z własnościami martyngałowymi ruchu Browna.

Propozycja 3.9 (Charakterystyki martyngałowe ruchu Browna). Niech W będzie ruchem Browna. Wtedy

1. $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest martyngałem (względem swojej naturalnej filtracji).
2. $(W_t^2 - t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest martyngałem (względem filtracji generowanej przez W).

Ponadto zachodzi też charakteryzacja odwrotna, tj. każdy ciągły i startujący z zera proces, który spełnia powyższe własności, jest ruchem Browna.

Dowód własności martyngałowych pozostawiamy jako ćwiczenie do domu. Dowód charakteryzacji odwrotnej można znaleźć w [KS12, Twierdzenie 3.16].

Na koniec tego rozdziału warto wspomnieć, że ruch Browna wraz z dryfem jest w pewnym sensie jedynym porządnym ciągłym odpowiednikiem spaceru losowego, co wynika np. z dekompozycji Lévy'ego-Itô, zob. [App09, Theorem 2.4.16].

3.2 Proces Poissona

Przedstawmy teraz drugi ważny przykład procesu Lévy'ego, jakim jest proces Poissona. Zanim przedstawimy definicję, warto przypomnieć, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem intensywności $\lambda > 0$, co zapisujemy jako $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, jeżeli jej rozkład jest zadany przez

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Zdefiniujmy teraz formalnie proces Poissona.

Definicja 3.10 (Proces Poissona). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Proces stochastyczny $N = (N_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **procesem Poissona** z intensywnością $\lambda > 0$, jeżeli spełnia on następujące warunki:

- 1) $N_0 = 0$;
- 2) N jest procesem cádląg;
- 3) N ma niezależne przyrosty;
- 4) $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t - s))$, dla każdego $t > s \geq 0$.

Warto zauważyć, że rozkład przyrostów zadany w Definicji 3.10 wraz z prawostronną ciągłością trajektorii implikuje stochastyczną ciągłość. Dodatkowo, przyrosty procesu Poissona są stacjonarne z czego wynika, że proces Poissona jest istotnie procesem Lévy'ego. Podajmy teraz podstawowe charakterystyki Procesu Poissona; dowód pozostawiamy jako ćwiczenie domowe.

Propozycja 3.11 (Charakterystyki Procesu Poissona). Niech N będzie procesem Poissona. Wtedy

1. $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$, dla $t \in \mathbb{T}$;
2. $C_N(t, s) = \text{Cov}(N_t, N_s) = \lambda(t \wedge s)$, dla $t, s \in \mathbb{T}$.

Używając twierdzeń Kołmogorowa o rozszerzeniu oraz przypominając, że dla procesów Lévy'ego zawsze istnieje modyfikacja cádląg możemy pokazać, że istnieje proces spełniający własności zadane w Definicji 3.10. Zamiast tego podajmy jednak inną definicję (reprezentację) procesu Poissona bazującą na teorii odnowy, która jest bardziej konstruktywna. Zaczniemy od definicji procesu odnowy.

Definicja 3.12 (Proces odnowy). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Proces stochastyczny $N = (N_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **procesem odnowy** (lub **strumieniem odnowy**), jeżeli możemy go przedstawić jako

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

gdzie $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ dla $n \geq 1$, oraz $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych i nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie.

Zazwyczaj zmienną S_n w Definicji 3.12 utożsamia się z czasem (losowym) n -tego zajścia określonego zdarzenia (np. pojawienie się cząstki, czy uszkodzenie maszyny), podczas gdy X_n wyznacza czas pomiędzy kolejnymi zdarzeniami. Korzystając z tej interpretacji, dla każdego $t \in \mathbb{T}$, zmienna losowa

N_t informuje nas jak wiele razy zaszło zdarzenie na przedziale czasu $[0, t]$. Mamy tutaj do czynienia ze powracającymi zdarzeniami dla których czasy pomiędzy ich zajściami są opisane ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie.

Kluczową cechą danego procesu odnowy jest rozkład czasu pomiędzy zajściami kolejnych zdarzeń. Naturalnym rozkładem przyrostów jest tutaj rozkład wykładniczy który, jako jedyny w klasie rozkładów ciągłych, spełnia własność Markowa. Innymi słowy, aby proces odnowy był procesem Markowa, czas pomiędzy kolejnymi zdarzeniami powinien być opisany przez rozkład wykładniczy. To nam jednoznacznie identyfikuje proces Poissona, co pokaże następane twierdzenie.

Twierdzenie 3.13 (Proces Poissona jako proces odnowy). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Proces stochastyczny $N = (N_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on procesem odnowy dla którego czas pomiędzy zajściami kolejnych zdarzeń ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$.^a

^atj. w Definicji 3.12 ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że N jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech $S_n := X_1 + \dots + X_n$, gdzie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to ciąg zmiennych losowych zadany przez

$$\begin{aligned} X_1 &:= \inf\{t \in \mathbb{T} : N_t = 1\} \\ X_n &:= \inf\{t \in \mathbb{T} : N_t = n\} - \inf\{t \in \mathbb{T} : N_t = n-1\}. \end{aligned}$$

Dla $k \in \mathbb{N}$, zauważając, że $S_k = \inf\{t \in \mathbb{T} : N_t = k\}$, oraz przypominając, że zmienna N_t jest nieujemna dla każdego $t \in \mathbb{T}$, dostajemy

$$\{N_t = k\} = \{S_1 \leq t\} \cap \dots \cap \{S_k \leq t\} \cap \{S_{k+1} > t\} = \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} \{S_n \leq t\} = k \right\},$$

co daje nam

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}.$$

Chcemy teraz pokazać, że ciąg (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Dowód tego faktu oparty jest o indukcję; przedstawmy jego szkic. Dla każdego $t_1 \geq 0$ mamy

$$\mathbb{P}[X_1 > t_1] = \mathbb{P}[N_{t_1} = 0] = e^{-\lambda t_1},$$

a więc X_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$. Następnie, dla $t_1, t_2 \geq 0$, rozważając warunkowe prawdopodobieństwo, dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_2 > t_2 \mid X_1 = t_1] &= \mathbb{P}[S_2 > t_2 + t_1 \mid X_1 = t_1] \\ &= \mathbb{P}[N_{t_1+t_2} = 1 \mid X_1 = t_1] \\ &= \mathbb{P}[N_{t_2+t_1} - N_{t_1} = 0 \mid X_1 = t_1] \end{aligned}$$

Zauważając, że przyrost $N_{t_2+t_1} - N_{t_1}$ jest niezależny od $\sigma(N_s, s \leq t_1)$ a zdarzenie $\{X_1 = t_1\}$ jest $\sigma(N_s, s \leq t_1)$ mierzalne, dostajemy

$$\mathbb{P}[X_2 > t_2 \mid X_1 = t_1] = \mathbb{P}[N_{t_2+t_1} - N_{t_1} = 0] = e^{-\lambda t_2}.$$

To pokazuje, że zmienna losowa X_2 jest w istocie niezależna od X_1 oraz ma rozkład wykładniczy z parametrem λ . Podobne rozumowanie może być zastosowane, aby pokazać, że X_n jest niezależne

od X_{n-1}, X_{n-2}, \dots , oraz X_1 , co kończy tę część dowodu. Dokładnie omówiony dowód tego faktu można znaleźć w [Bil12, Twierdzenie 23.1].

Założmy teraz, że N jest procesem odnowy z wykładniczym ciągiem $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tj.

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\},$$

gdzie $S_n := X_1 + \dots + X_n$ oraz $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Będziemy używać $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ na oznaczenie naturalnej filtracji procesu $(N_t)_{t \in \mathbb{T}}$. Łatwo pokazać, że proces przez nas zdefiniowany (p.n.) startuje z zera oraz ma trajektorie cádlág. Dla uproszczenia przedstawmy tylko szkic dowodu pozostałych własności; pełny dowód można znaleźć w [Bil12, Twierdzenie 23.1].

1) Dla każdego $s \in \mathbb{T}$ zdefiniujmy

$$\tau_s := \inf\{t \geq 0 : N_{s+t} - N_s > 0\}.$$

Zauważając, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $s \in \mathbb{T}$ zachodzi $\{N_s = n\} = \{S_n \leq s\} \cap \{S_n + X_{n+1} > s\} \in \mathcal{F}_s$ oraz $\{S_n + X_{n+1} > s\} = \{N_s \geq n\} \in \mathcal{F}_s$, dla każdego $t \in \mathbb{T}$, korzystając z własności braku pamięci, dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_s > t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_s > t\} \cap \{N_s = n\} \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{N_{s+t} = n\} \cap \{N_s = n\} \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{N_s = n\}} \mathbb{P}[S_n + X_{n+1} > t + s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{N_s = n\}} \mathbb{P}[X_{n+1} > (s - S_n) + t \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{N_s = n\}} \frac{\mathbb{P}[X_{n+1} > (s - S_n) + t \mid \mathcal{F}_s]}{\mathbb{P}[X_{n+1} > (s - S_n) \mid \mathcal{F}_s]} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{N_s = n\}} \mathbb{P}[X_{n+1} > t] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{N_s = n\}} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

Wynika stąd w szczególności, że dla $t, s \in \mathbb{T}$ zmienna losowa zadana przez $\min\{N_t - N_s, 1\}$ jest niezależna od \mathcal{F}_s , oraz to zmienna o standardowym rozkładzie Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu równym $1 - e^{-\lambda(t-s)}$.

2) Następnie, dla każdego ustalonego $t, s \in \mathbb{T}$, oraz $n \in \mathbb{N}$, rozważamy podział (partycje) odcinka $[t, s]$ na n równych kawałków o krańcach t_1^n, \dots, t_{n+1}^n oraz dla $i = 1, 2, \dots, n$ definiujemy

$$\xi_i^n := \min\{N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n}, 1\}.$$

3) Dla określonego $n \in \mathbb{N}$ i powiązanego podziału definiujemy zmienną Z_n daną przez

$$Z_n := \sum_{i=1}^n \xi_i^n.$$

Łatwo zauważyć, że $Z_n \sim B(n, 1 - e^{-\lambda(t-s)/n})$, tj. Z_n ma rozkład dwumianowy dla n prób i prawdopodobieństwie sukcesu równego $1 - e^{-\lambda(t-s)/n}$.

4) Można pokazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = N_t - N_s, \quad (\text{p.n.})$$

ponieważ na skończonym przedziale czasu nie może wystąpić nieskończenie wiele skoków, a wartość każdego skoku w naszym przypadku wynosi 1. Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienna losowa Z_n jest niezależna od \mathcal{F}_s , więc zmienna $N_t - N_s$ jest również niezależna od \mathcal{F}_s . To daje nam już niezależność przyrostów N .

5) Dla $n \rightarrow \infty$ dostajemy $n(1 - e^{-\lambda(t-s)/n}) \rightarrow \lambda(t-s)$, tj. liczba prób w pomnożona przez prawdopodobieństwo sukcesu dla zmiennej Z_n dąży do stałej. Z rachunku prawdopodobieństwa wiemy, że ciąg $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dąży (wdg. rozkładu) do zmiennej losowej o rozkładzie Poissona o intensywności $\lambda(t-s)$, zob [Bil12, Twierdzenie 23.2]. To pokazuje, że przyrosty są stacjonarne i mają rozkład Poisson o zadanych parametrach.

Rozkład N_t można też obliczyć bardziej bezpośrednio zauważając, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, zmienna losowa S_k ma rozkład Γ o gęstości $g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ danej przez

$$g_k(r) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda r)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda r}, & \text{jeżeli } r > 0. \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Dowód tego faktu pozostawiamy jako ćwiczenie do domu; gęstość tę można wyliczyć bezpośrednio korzystając z funkcji splotu zastosowanej do kolejnych przyrostów. Wynika stąd, że dla $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_t = k] &= \mathbb{P}[\max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\} = k] = \mathbb{P}[S_k \leq t < S_k + X_{k+1}] \\ &= \int \int_{\{r \leq t \leq r+z\}} g_k(r) g_1(z) dr dz = \int_0^t \left[\int_{t-r}^{\infty} g_1(z) dz \right] g_k(r) dr \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} g_k(r) dr = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t r^{k-1} dr \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

co daje nam $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. □

Jak wspomnieliśmy w dowodzie Twierdzenia 3.13, ilość *skoków* dla procesu Poissona na skończonym przedziale jest prawie na pewno skończona a pojedyncze skoki są jednostkowe (p.n.).

w7
-
w8

Propozycja 3.14 (Intensywność i wielkość skoków procesu Poissona). Niech $N = (N_t)_{t \in \mathbb{T}}$ będzie procesem Poissona. Wtedy

1. $\mathbb{P}[\{N_t - N_{t-} = 0\} \cup \{N_t - N_{t-} = 1\}] = 1$, dla każdego $t \in \mathbb{T}$;
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ (p.n.).

Dowód Propozycji 3.14 pozostawiamy jako ćwiczenie domowe. Warto zaznaczyć, że proces Poissona (podobnie jak każdy proces odnowy) jest przykładem **procesu zliczającego**, tzn. można go przedstawić w postaci

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

gdzie $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ściśle rosnącym ciągiem zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.¹⁵ Podobnie, jak dla ruchu Browna, przedstawmy teraz charakterystyki martyngałowe procesu Poissona.

Propozycja 3.15 (Charakterystyki martyngałowe procesu Poissona). Niech N będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Wtedy

1. $(N_t - \lambda t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest martyngałem (względem swojej naturalnej filtracji).
2. $(N_t^2 - \lambda t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest martyngałem (względem filtracji generowanej przez N).

Ponadto zachodzi też charakteryzacja odwrotna, tj. każdy startujący z zera proces zliczający spełniający pierwszy warunek powyżej jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$.

Dowód własności przedstawionych w Propozycji 3.15 pozostawiamy jako ćwiczenia domowe. Dowód odwrotnej charakteryzacji nosi czasami w literaturze nazwę *charakteryzacji Watanabe*, dowód można znaleźć np. w [Bré75]. Podobnie jak Ruch Browna, proces Poissona w pewnym sensie jest unikalny, tzn. jest on jedynym procesem zliczającym, którego przyrosty są stacjonarne, niezależne i mają jednostkowe skoki), zob. [App09, Twierdzenie 2.2.13].

Na koniec tego rozdziału przedstawmy inny przykład procesu, związanego z procesem Poissona, tzw. złożonego procesu Poissona.

Definicja 3.16 (Złożony proces Poissona). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Proces stochastyczny $L = (L_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **złożonym procesem Poissona** z intensywnością $\lambda > 0$, jeżeli można go przedstawić jako

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

gdzie $N = (N_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$, a $X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie takim, że N oraz X są niezależne.

Łatwo pokazać, że złożony proces Poissona jest również procesem Lévy'ego. Ponadto, jeżeli proces Lévy'ego jest przedziałami stały, jest on złożonym procesem Poissona, a więc klasa ta w pewnym sensie opisuje procesy Lévy'ego, w których występują skoki. Nie charakteryzuje to jednak wszystkich nieciągłych procesów Lévy'ego, np. takich dla który miara Lévy'ego jest nieskończona, co opiszemy w następnym podrozdziale.

3.3 Procesy Lévy'ego – miara skoków i dekompozycja

Dla procesu Poissona rozważaliśmy wielkość i częstość jego skoków. Spróbujmy teraz sformalizować pojęcie *skoku* dla ogólnego procesu cádląg.

¹⁵tzn. ciąg jest ściśle rosnący, jeżeli jego wartości są skończone

Definicja 3.17 (Skoki procesu cádląg). Niech $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ będzie procesem cádląg. Wtedy **skok** procesu X w chwili $t \in \mathbb{T}$ oznaczamy przez

$$\Delta X_t := X_t - X_{t-},$$

gdzie X_{t-} to lewostronna granica procesu w chwili t .

Mając dany ogólny proces Lévy’ego i rozważając jego modyfikację cádląg, możemy chcieć badać, jak wyglądają jego skoki. W następnej definicji będziemy używać \mathcal{B}_0 do oznaczenia wszystkich zbiorów Borelowskich na \mathbb{R} , których domknięcia nie zawierają zera.

Definicja 3.18 (Losowa miara Poissona i miara skoków Lévy’ego). Niech X będzie procesm Lévy’ego typu cádląg. Wtedy

- 1) **Losową miarą Poissona** (lub **miarą skoków**) procesu X nazywamy odwzorowanie $\Pi_X : \mathbb{T} \times \mathcal{B}_0 \times \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ dane przez

$$\Pi_X(t, U)(\omega) := \sum_{s:0 < s \leq t} \mathbb{1}_{\{\Delta X_s \in U\}}(\omega); \quad (3.4)$$

- 2) **Miarą Lévy’ego** procesu X nazywamy odwzorowanie $\nu_X : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dane przez

$$\nu_X(U) := \mathbb{E}[\Pi_X(1, U)]. \quad (3.5)$$

Odwzorowanie $\Pi_X(U, t)$ mierzy ile skoków o wielkości ze zbioru U wystąpiło na przedziale czasowym $[0, t]$, podczas gdy $\nu_X(U)$ mierzy średnią intensywność skoków o wielkości ze zbioru U , które nastąpiły w unormowanym przedziale $[0, 1]$. Warto podkreślić, że wartość Π_X jest (p.n.) skończona dla każdego $U \in \mathcal{B}_0$ oraz $t \in \mathbb{T}$ co wynika z własności cádląg.

Propozycja 3.19. Niech X będzie procesem Lévy’ego typu cádląg. Wtedy odwzorowanie Π_X jest skończone.

Dowód. Ustalmy $U \in \mathcal{B}_0$. Niech $T_1 := \inf\{t > 0 : \Delta X_t \in U\}$. Ponieważ U jest oddzielone od zera, więc istnieje $\epsilon > 0$ taki, że dla każdego $u \in U$ zachodzi $u > \epsilon$. Wykorzystując prawostronną ciągłość X wiemy też, że $\lim_{t \rightarrow 0^+} X_t = X_0 = 0$, z czego wynika, że $T_1 > 0$ (p.n.). Dla $n \in \mathbb{N}$, możemy teraz zdefiniować rekurencyjnie zadany ciąg

$$T_{n+1} = \inf\{t > 0 : \Delta X_t \in U \text{ oraz } t > T_n\}.$$

Rozumując podobnie jak poprzednio dostajemy, że $T_{n+1} > T_n$. Aby zakończyć dowód, wystarczy więc pokazać, że dla $n \rightarrow \infty$ zachodzi $T_n \rightarrow \infty$ (p.n.), tj. czas dąży do nieskończoności, gdy zwiększamy liczbę skoków. Załóżmy, że tak nie jest. Istnieje wtedy zbiór dodatniej miary D taki, że dla każdego $\omega \in D$ zachodzi $T_n(\omega) \rightarrow T_\omega$ ($n \rightarrow \infty$), gdzie $T_\omega < \infty$ jest jakąś stałą. Wynika stąd, że dla ustalonego $\omega \in D$ oraz $T_\omega < \infty$ granica $\lim_{t \rightarrow T_\omega^-} X_t(\omega)$ nie może istnieć, co przeczy własności cádląg. \square

Pokażmy teraz związek między losową miarą Poissona i miarą Lévy’ego oraz procesem Poissona; dowód Propozycji 3.20 można znaleźć w [App09, Twierdzenie Theorem 2.3.5].

Propozycja 3.20. Niech X będzie procesm Lévy’ego typu cádlág. Wtedy, dla ustalonego $U \in B_0$, proces $N^{X,U} = (N_t^{X,U})_{t \in \mathbb{T}}$ dany przez

$$N_t^{X,U}(\omega) := \Pi_X(t, U)(\omega),$$

jest procesem Poissona o intensywności $\lambda = \nu_X(U)$.

W szczególności, jeżeli X jest procesm Poissona z intensywnością $\lambda > 0$, oraz $1 \in U$, wtedy dostajemy $\Pi_X(t, U) = X$ oraz $\nu_X(U) = \lambda$.

Okazuje się, że można dokonać dekompozycji procesu Lévy’ego na część ciągłą, oraz odpowiednie części skokowe. Przedstawmy teraz ten fakt bez dowodu, zob. [App09, Twierdzenie 2.4.16].

Twierdzenie 3.21 (Dekompozycja Lévy’ego–Itô). Niech X będzie procesm Lévy’ego typu cádlág. Wtedy

$$X_t = bt + \sigma W_t + \int_{\{|u| < 1\}} u \tilde{\Pi}(t, du) + \int_{\{|u| \geq 1\}} u \Pi(t, du),$$

gdzie $b \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $W = (W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest ruchem Browna, Π jest pewną losową miarą Poissona, niezależną od W , a $\tilde{\Pi}(dt, du) = \Pi(dt, du) - \nu(dz)dt$ jest tzw. skompensowaną losową miarą Poissona, gdzie ν jest miarą Lévy’ego zdefiniowaną jak w (3.5).

Twierdzenie 3.21 mówi nam, że każdy proces Lévy’ego można zdekomponować na: (1) deterministyczny dryf; (2) przeskalowany ruch Browna modelujący ciągłą część procesu; (3) skompensowany uogólniony Proces Poissona, tj. proces o przeliczalnej ilości skoków, których wielkość jest góry ograniczone, który to proces jest jednocześnie martyngałem (dzięki kompensacji); (4) złożony proces Poissona modelujący duże skoki (przekraczające 1). Po więcej informacji na ten temat odsyłamy do [App09, Rozdział 2.4]. Warto przy okazji wspomnieć, że charakterystyki procesu Lévy’ego są określone jednoznacznie przez parametr dryfu (b), zmienność części ciągłej (σ) oraz miarę Lévy’ego (ν_X), zob. [App09, Wniosek 2.4.21].

3.4 Procesy Markowa

W poprzednich podrozdziałach rozważaliśmy równe przykłady procesów Lévy’ego, których konstrukcja była oparta o niezależność i stacjonarność przyrostów. Procesy te były konstruowane w ten sposób, że w każdym punkcie czasu wystarczyło dysponować informacją o bieżącej wartości procesu, aby móc konstruować przyszłe realizacje, czy prognozować przyszłą wartość procesu. Własność ta w literaturze często nosi nazwę *własności Markowa*. Skupimy się na omówieniu tej własności w czasie ciągłym. Definicję podane w tym rozdziale można w łatwy sposób przenieść na czas dyskretny. Dyskretne procesy (łańcuchy) Markowa i ich własności powinny zostać omówione na innym kursie.

Definicja 3.22 (Własność Markowa). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz niech $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ będzie procesem \mathbb{F} -adaptowalnym. Mówimy, że X spełnia **własność Markowa** (względem \mathbb{F}) jeżeli dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ oraz $s, t \in \mathbb{T}$, takich, że $t > s$, zachodzi

$$\mathbb{P}[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[X_t \in A \mid X_s].^a$$

^aJeżeli filtracja nie jest wcześniej zadana, to przyjmuje się naturalną filtrację procesu X .

Czasami w literaturze można spotkać stwierdzenie, że proces X , który spełnia własność Markowa jest **procesem Markowa**. W tym wykładzie proces markowa będziemy jednak definiować się w oparciu o tzw. funkcję przejścia (w czasie dyskretnym była to tzw. *macierz przejścia*); związek między tymi definicjami wyjaśni się wkrótce. Zanim podamy formalną definicję procesu Markowa, zdefiniujemy kilka przydatnych pojęć. Dla uproszczenia, rozważamy jednowymiarowy przypadek oraz proces przyjmujący wartości w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; większość pojęć można stosunkowo łatwo przenieść na przypadek wielowymiarowy i inne przestrzenie.

Definicja 3.23 (Prawdopodobieństwo przejścia). Ustalmy $t, s \in \mathbb{T}$ takie, że $t > s$. Wtedy **prawdopodobieństwem przejścia** (z chwili s do chwili t) nazywamy odwzorowanie

$$P_{s,t}: \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

takie, że

- dla każdego $x \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $A \mapsto P_{s,t}(x, A)$ jest miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
- dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ odwzorowanie $x \mapsto P_{s,t}(x, A)$ jest mierzalne.

Dla $s = 0$, prawdopodobieństwo przejścia (do chwili t) będziemy oznaczać jako $P_t := P_{0,t}$.

Idea stojąca za definicją prawdopodobieństwa przejścia jest intuicyjna: dla każdego dwóch punktów s i t chcielibyśmy znać prawdopodobieństwo znalezienia się w chwili t w zbiorze A przy założeniu, że w chwili s byliśmy w stanie pewnym stanie x . Innymi słowy chcemy znać zachowanie procesu w chwili t przy założeniu, że wystartował on z punktu x (w czasie s). W celu ujednoczenia notacji dla każdego $t \in \mathbb{T}$ definiujemy również prawdopodobieństwo przejścia $P_{t,t}$, które jest zadane jako

$$P_{t,t}(x, A) := \mathbb{1}_{\{x\}}(A). \quad (3.6)$$

Aby w pełni opisać ewolucję procesu potrzebowalibyśmy całą rodzinę prawdopodobieństw przejścia dla wszystkich czasów $t, s \in \mathbb{T}$. Dla uproszczenia, skupimy się na przypadku **jednorodnymi**, czyli takim w który prawdopodobieństwa przejścia (z chwil s do chwil t) zależały tylko od powiązanych przyrostów $t - s$. Innymi słowy, chcemy, aby dla każdego $t > 0$ oraz $h \geq 0$ zachodziła równość $P_{0,t} = P_{h,t+h}$. W takim przypadku, aby opisać ewolucję procesu, wystarczy rozważyć rodzinę prawdopodobieństw przejścia $(P_t)_{t \in \mathbb{T}}$, gdzie $P_t = P_{0,t}$. Od teraz ograniczymy się do przypadku **jednorodnego** i będziemy używać uproszczonej notacji.¹⁶

Zanim zdefiniujemy tzw. funkcję przejścia, która będzie zbiorem prawdopodobieństw przejścia, wprowadźmy podstawową notację używaną w teorii procesów Markowa, która pozwala nam patrzeć na zadane prawdopodobieństwo przejścia jak na operator. Niech $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich ograniczonych i mierzalnych funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Traktując prawdopodobieństwo przejścia P_t jako operator, dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ oraz $x \in \mathbb{R}$ definiujemy

$$P_t f(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) P_t(x, dy).^{17}$$

Mając dane P_t oraz P_s możemy rozważyć także ich złożenia. Dla każdego $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ oraz $x \in \mathbb{R}$ definiujemy złożenie P_t oraz P_s jako

$$P_t P_s f(x) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z) P_s(y, dz) P_t(x, dy),$$

¹⁶Założenie to w istocie nie jest zbyt restrykcyjne – mając dany niejednorodny w czasie proces Markowa, można zdefiniować nowy dwuwymiarowy proces stochastyczny $((t, X_t))_{t \in \mathbb{T}}$, który będzie jednorodny.

¹⁷Założyliśmy, że $P_t(x, \cdot)$ jest miarą, więc definicja jest dobrze postawiona

i używamy $P_t P_s$ do oznaczenia uzyskanego w ten sposób prawdopodobieństwa przejścia. Warto tutaj zauważyć, że $P_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ dla $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, więc operator ten przekształca funkcje mierzalne i ograniczone w funkcje mierzalne i ograniczone. Możemy teraz zdefiniować jednorodną w czasie funkcję przejścia

Definicja 3.24 (Funkcja przejścia). Jednorodną w czasie **funkcją przejścia** będziemy nazywać rodzinę prawdopodobieństw przejścia $P := (P_t)_{t \in \mathbb{T}}$ takich, że dla każdego $t, s \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$P_t P_s = P_{t+s}. \quad (3.7)$$

Własność (3.7) w literaturze zazwyczaj nazywa się równaniem *Chapmana-Kołmogorowa*. Równanie to zapewnia zgodność w czasie ewolucji procesu, co można wyrazić w języku warunkowych wartości oczekiwanych i powiązanego prawa więzy. Aby mówić więc o funkcji przejścia, rodzina prawdopodobieństwa przejścia $(P_t)_{t \in \mathbb{T}}$ musi spełniać warunki z Definicji 3.23, Warunek (3.6) oraz Warunek (3.7). Zanim przejdziemy to wytłumaczenia związku między funkcją przejścia, a ogólną definicją procesu markowa, zdefiniujmy co rozumiemy przez Proces Markowa z funkcją przejścia.

Definicja 3.25 (Proces Markowa z funkcją przejścia). Niech X będzie \mathbb{F} -adaptowanym procesem stochastycznym. Mówimy, że proces X **jest procesem Markowa z funkcją przejścia** P (względem filtracji \mathbb{F}) jeżeli dla każdego $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ oraz $t, s \in \mathbb{T}$, takich, że $t > s$, zachodzi

$$\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = P_{t-s} f(X_s). \quad (3.8)$$

Z Definicji 3.25 widać w szczególności dlaczego spełnianie równania Chapmana-Kołmogorowa jest wymagane dla zgodności w czasie. Dla procesu z Definicji 3.25, z prawa więzy, dla dowolnych $t, s, u \in \mathbb{T}$, dostajemy

$$\begin{aligned} P_{t+s} f(X_u) &= \mathbb{E}[f(X_{t+s+u}) | \mathcal{F}_u] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{t+s+u}) | \mathcal{F}_{t+u}] | \mathcal{F}_u] \\ &= \mathbb{E}[P_s f(X_{t+u}) | \mathcal{F}_u] \\ &= P_t P_s f(X_u). \end{aligned}$$

Proces X będziemy nazywać też skrótowo **procesem Markowa**, jeżeli jest on procesem Markowa dla pewnej funkcji przejścia i swojej naturalnej filtracji. W istocie klasa tych procesów sprowadza się do klasy procesów spełniających własność Markowa (Definicja 3.22).

Propozycja 3.26 (Proces Markowa a własność Markowa). Niech X będzie procesem Markowa z funkcją przejścia P . Wtedy X spełnia własność Markowa.

Dowód. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$. Ustalmy $t, s \in \mathbb{T}$ takie, że $t > s$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Niech $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ będzie dana przez $f(x) := \mathbb{1}_{\{x \in A\}}$. Korzystając z (3.8) dostajemy dwie równości

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_t \in A | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_t \in A\}} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = P_{t-s} f(X_s) = P_{t-s}(X_s, A) \\ \mathbb{P}[X_t \in A | X_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_t \in A\}} | \mathcal{F}_s] | X_s] = \mathbb{E}[P_{t-s}(X_s, A) | X_s] = P_{t-s}(X_s, A), \end{aligned}$$

które kończą dowód. □

Dla przestrzeni Borelowskich implikacja w drugą stronę jest również prawdziwa, tj. jeżeli proces X spełnia własność Markowa, to istnieje funkcja przejścia taka, że X jest procesem Markowa dla tej funkcji przejścia. Dokładne wyjaśnienie tego faktu wykracza jednak poza materiał tego wykładu, zob. [App09, Rozdział 3.1]. W związku z tym w literaturze pojęcie *własności Markowa* oraz *procesu Markowa* są często ze sobą utożsamiane, co będziemy również robić w dalszej części tego wykładu.

Można pokazać również, że procesy Lévy'ego są procesami Markowa.

Propozycja 3.27 (Proces Lévy'ego jest procesem Markowa). Niech X będzie procesem Lévy'ego typu cádlág. Wtedy X jest procesem Markowa.

Dowód Propozycji 3.27 można znaleźć w [App09, Rozdział 3.1]. Przypominając, że przyrosty procesu Lévy'ego są stacjonarne i niezależne, funkcję przejścia dla procesu Lévy'ego można w istocie zadać poprzez

$$P_t(x, A) := \mathbb{P}[X_{t+s} \in A | X_s = x],$$

dla $t \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ oraz pewnego (dowolnego) $s > 0$. W praktyce jednak bardzo trudno jest uzyskać jawny wzór na funkcję przejścia P_t . Zazwyczaj definiuje się ją w oparciu o rozwiązanie równania różniczkowego w którym zamiast prawdopodobieństwa przejścia podaje się tzw. *generator infinitesimalny*. Dokładne omówienie tego tematu wykracza jednak poza materiał tego wykładu, zob. [App09, Rozdział 3.2]. Z Propozycji 3.27 wynika w szczególności, że zarówno ruch Browna, jak i proces Poissona są procesami Markowa.

Na koniec tego rozdziału pokażemy, że mając zadaną funkcję przejścia, jesteśmy w stanie skonstruować powiązany proces Markowa. Dla uproszczenia, załóżmy, że początkowy stan procesu (w chwili 0) jest ustalony; punkt startowy można w łatwy sposób zamienić na rozkład początkowy.

Twierdzenie 3.28 (O istnieniu procesu Markowa). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oraz niech $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}))$. Niech $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ będzie kanonicznym procesem stochastycznym, tj. niech $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadany przez $X_t(\omega) = \omega(t)$, oraz niech $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$. Wtedy, dla każdej funkcji przejści P oraz punktu startowego $x \in \mathbb{R}$ istnieje miara probabilistyczna \mathbb{P} na (Ω, \mathcal{F}) taka, że X jest procesem Markowa z funkcją przejścia P o początkowym stanie x .

Dowód Twierdzenie 3.28 wykorzystuje znane nam już Twierdzenie Kołmogorowa o rozkładach zgodnych, zob. Twierdzenie 2.13. Pełny dowód Twierdzenia 3.28 można znaleźć w [App09, Twierdzenie 3.1.7]. Warto też zauważyć, że jeżeli mamy dwa procesy o tym samym stanie początkowym oraz tych samych funkcjach przejścia, to ich rozkłady skończenie wymiarowe są sobie równe; dowód tego faktu pozostawiamy jako ćwiczenie domowe.

4 Ważne klasy procesów stochastycznych w czasie dyskretnym

W rozdziale tym przedstawimy pewne klasy procesów stochastycznych, które przydają się do modelowania wielu zjawisk w czasie dyskretnym. Ponieważ wykład ten skupiony jest w głównej mierze na czasie ciągłym, więc przedstawimy tylko ogólne idee.

4.1 Łańcuchy Markowa

W Rozdziale 3.4 wprowadziliśmy ogólną klasę procesów Markowa. W przypadku, gdy czas jest dyskretny, np. $\mathbb{T} := \mathbb{N}$ procesy Markowa często nazywa się *łańcuchami Markowa*. W dodatku tym omówimy podstawowe własności *łańcuchów Markowa* oraz wprowadzimy różne charakterystyki stanów,

skupiając się na sytuacji, gdy liczba stanów procesu jest skończona lub przeliczalna. Dla uproszczenia zakładamy, że $\mathbb{T} := \mathbb{N}$ i będziemy używać $n \in \mathbb{N}$ do używania n -tej wartości procesu. Będziemy również zakładać, że nasz proces przyjmuje wartości na skończonej (lub przeliczalnej) przestrzeni E , nazywanej często *przestrzenią stanów*, tj. dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $X_n : \Omega \rightarrow E$. Przez $p_{ij}(k)$ będziemy rozumieć prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $i \in E$ do stanu $j \in E$ w $k \in \mathbb{N}$ krokach. Często będziemy też używać uproszczonego zapisu $p_{ij} := p_{ij}(1)$.

W przypadku (jednorodnego) łańcucha Markowa zamiast rozważać funkcję przejścia dla różnych długości kroków wystarczy zdefiniować ewolucję systemu w jednym kroku, por. Definicja 3.24. W przypadku, gdy mamy do czynienia z dyskretną przestrzenią stanów, można to zrobić przy pomocy tzw. macierzy stochastycznej.

4.1.1 Definicja i podstawowe własności

Zacznijmy od formalnej definicji macierzy stochastycznej.

Definicja 4.1 (Macierz stochastyczna). Macierz $P = [p_{ij}]_{(i,j) \in E \times E}$ nazywamy **macierzą stochastyczną**, jeżeli dla $i, j \in E$ zachodzi $p_{ij} \in [0, 1]$ oraz $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$.

Mając daną macierz stochastyczną w której p_{ij} zadane nam prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $i \in E$ do stanu $j \in E$ w jednym kroku jesteśmy gotowi na formalną definicję *łańcucha Markowa*.

Definicja 4.2 (Łańcuch Markowa). Niech $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie pr. stochastycznym o wartościach w E . Mówimy, że proces X **jest łańcuchem Markowa z macierzą przejścia P** jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $i, j \in E$ zachodzi $\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{ij}$ oraz X spełnia własność Markowa.^a

^atj. $\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = a_{n-1}, \dots, X_0 = a_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i]$ dla dowolnego ciągu $(a_0, \dots, a_{n-1}, i) \in E^{n+1}$ takiego, że $\mathbb{P}[X_n = i, X_{n-1} = a_{n-1}, \dots, X_0 = a_0] > 0$.

W łańcuchu Markowa X wyróżniamy zmienną X_0 , która odpowiada wartości początkowej (lub rozkładowi początkowemu). Oczywiście dla łańcuchów Markowa własność Markowa można równoważnie sformułować jako

$$\mathbb{P}[X_{n+1} | X_n, \dots, X_0] = p_{X_n j},$$

gdzie $p_{X_n j} := \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n]$. Łatwo też zauważyć, że Definicja 4.2 jest w istocie analogiczna do Definicji 3.25, lecz w przypadku dyskretnym nie ma potrzeby operowania na funkcjach testowych.

Propozycja 4.3 (Łańcuch Markowa a funkcje testowe). Niech X będzie łańcuchem Markowa z macierzą przejścia P . Wtedy dla każdej $f \in \mathcal{C}(E)$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_0, \dots, X_n] = \sum_{j \in E} f(j) p_{X_n, j}.$$

Dowód. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Dostajemy

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \sum_{j \in E} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=j\}} f(j) | \mathcal{F}_n] = \sum_{j \in E} f(j) \mathbb{P}[X_{n+1} = j | \mathcal{F}_n] = \sum_{j \in E} f(j) p_{X_n, j}.$$

□

Oczywiście mnożąc ze sobą macierz P dostajemy macierze stochastyczne odpowiadające więcej niż jednemu krokowi w czasie, dla których automatycznie spełniony jest dyskretny odpowiednik równań Chapmana-Kołmogorowa, zob. Definicja 3.24. Dla $k \in \mathbb{N}$ elementy macierzy P^k będziemy oznaczać przez $[p_{ij}(k)]_{(i,j) \in E \times E}$, a samą macierz nazywać *macierzą przejścia w k krokach*.

Propozycja 4.4 (Macierz przejścia w k krokach i równania Chapmana-Kołmogorowa). Niech X będzie łańcuchem Markowa z macierzą przejścia P . Wtedy dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi $p_{ij}(k) = \mathbb{P}[X_{n+k} = j | X_n = i]$ oraz $p_{ij}(k+n) = \sum_{l \in E} p_{il}(k)p_{lj}(n)$.

Dowód Propozycji 4.4 pozostawiamy jako proste ćwiczenie do domu. Oczywiście, podobnie jak w Twierdzeniu 3.28 można pokazać istnienie łańcucha Markowa. Sformułujmy teraz bez dowodu odpowiednie twierdzenie dla (co najwyżej) przeliczalnej przestrzeni stanów E .

Twierdzenie 4.5 (O istnieniu łańcucha Markowa). Niech E będzie dyskretnym zbiorem stanów, P powiązaną macierzą stochastyczną, a π pewnym rozkładem probabilistycznym na E . Wtedy istnieje przestrzeń probabilistyczna i określony na niej proces stochastyczny X , taki, że X jest łańcuchem Markowa o macierzy przejścia P i rozkładzie początkowym π .

Pełny dowód Twierdzenia 4.5 można znaleźć w [Bil12, Twierdzenie 8.1]

4.1.2 Klasyfikacja stanów

W przypadku łańcuchów Markowa często dokonuje się tzw. klasyfikacji stanów, aby lepiej zrozumieć dynamikę procesu stochastycznego. Będziemy używać oznaczeń

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= P[X_n = j | X_0 = i] \\ f_{ij}(n) &= P[X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i]. \\ m_i &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n). \\ d_i &:= \text{NWD}\{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\} \end{aligned}$$

Oczywiście $p_{ij}(n)$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $i \in E$ do stanu $j \in E$ w $n \in \mathbb{N}$ krokach $f_{ij}(n)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia w którym startując ze stanu $i \in E$ osiągamy stan $j \in E$ po raz pierwszy w $n \in \mathbb{N}$ krokach, m_i to średni czas powrotu do stanu $i \in E$, a d_i odpowiada za tzw. okresowość stanu. Dla stanów $i, j \in E$ będziemy mówić, że: stan j jest *osiągalny* ze stanu i jeżeli $p_{ij}(n) > 0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$; stany i, j się *komunikują* jeżeli są wzajemnie osiągalne. Zbiór Stanów $S \subseteq E$ nazywamy zamkniętym jeżeli dla $i \in S$ oraz $j \notin S$, stan j nie jest osiągalny ze stanu i . Łańcuch nazywamy *nieredukowalnym* (lub *nieprzywiedlnym*), jeśli wszystkie stany komunikują się ze sobą. Używając powyższych oznaczeń zdefiniujemy pewne klasy stanów.

Definicja 4.6 (Klasyfikacja stanów). Niech X będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą przejścia P . Wtedy, stan $i \in E$ nazywamy

- 1) *powracającym*, gdy $P[X_n = i \text{ dla pewnego } n \geq 1 | X_0 = i] = 1$;
- 2) *przechodnim*, gdy $P[X_n = i \text{ dla pewnego } n \geq 1 | X_0 = i] < 1$;
- 3) *pochłaniającym*, jeżeli zbiór $\{i\}$ jest zamknięty.
- 4) *niezerowym*, gdy jest powracający oraz $m_i < \infty$;
- 5) *zerowym*, gdy nie jest niezerowy;
- 6) *okresowym*, gdy $d(i) > 1$ ();
- 7) *nieokresowym*, gdy $d(i) = 1$;
- 8) *ergodycznym*, gdy jest powracający, niezerowy i nieokresowy.

W nieredukowalnym łańcuchu Markowa albo wszystkie stany są okresowe i mają wspólny okres, albo żaden ze stanów nie jest okresowy. W pierwszym z tych przypadków mówimy, że *łańcuch Markowa jest okresowy*, a jego okresem jest okres każdego jego stanu. W drugim przypadku mówimy, że *łańcuch jest nieokresowy*.

4.1.3 Rozkład stacjonarny i twierdzenie ergodyczne

Rozkład stacjonarny, to taki rozkład, który się nie zmienia, gdy zadziałamy na niego operatorem przejścia, przedstawmy teraz jego formalną definicję.

Definicja 4.7 (Rozkład stacjonarny). Niech E będzie zbiorem stanów, a P powiązaną macierzą stochastyczną. Rozkład (miarę) π na E nazywamy *stacjonarnym* (lub *niezmiennicznym*), jeżeli zachodzi równość

$$\pi P = \pi.^a$$

^aInnymi słowy, startując z rozkładu π po jednym kroku rozkład się nie zmienia; dla wszystkich $j \in E$ zachodzi $\sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} = \pi_j$.

Jednym z ważniejszych twierdzeń związanych z łańcuchami Markowa (dla skończonej liczby stanów) jest tzw. Twierdzenie ergodyczne.

Twierdzenie 4.8 (Twierdzenie ergodyczne). Niech X będzie łańcuchem Markowa określonym na skończonej przestrzeni stanów. Załóżmy, że łańcuch ten jest nieredukowalny oraz nieokresowy. Wtedy istnieje (dokładnie jeden) rozkład stacjonarny π na E . Dodatkowo, rozkład ten jest ergodyczny, tzn. dla $i, j \in E$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j.$$

Dowód Twierdzenia 4.8 można znaleźć w [Bil12, Twierdzenie 8.9]

4.2 Procesy typu ARMA

Wiele procesów stochastycznych można konstruować wychodząc od tzw. *białego szumu*, a następnie komplikując jego dynamikę poprzez określenie struktury zależności w czasie. Dla uproszczenia, w rozdziale tym będziemy zakładać, że $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ i nie podawać wartości startowej procesu.

Definicja 4.9 (Biały szum). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Proces stochastyczny $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **białym szumem**, jeżeli jest on słabo stacjonarnym, liniowo nieskorelowanym procesem o zerowej średniej, tj. dla $t \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ oraz pewnego parametru $\sigma > 0$ zachodzi $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$ oraz

$$\text{Cov}[\epsilon_t, \epsilon_{t-j}] = \begin{cases} \sigma^2 & j = 0, \\ 0 & j \neq 0. \end{cases}$$

Najprostszym przykładem białego szumu jest ciąg niezależnych od siebie zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, zerowej średniej i skończonej (ściśle dodatniej) wariancji. Wychodząc od procesu będącego białym szumem można budować wiele różnych typów procesów. Przedstawmy teraz kilka popularnych przykładów tzw. procesów liniowych.

Pierwszą klasę procesów konstruuje się poprzez uwzględnienie poprzednich wartości procesu w jego bieżącej wartości.

Definicja 4.10 (Proces typu AR). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ oraz $p \in \mathbb{N}$. Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **procesem autoregresyjnym rzędu p** lub **procesem typu AR(p)** jeżeli można go przedstawić w postaci

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest białym szumem, $(\phi_1, \dots, \phi_p) \in \mathbb{R}^p$, oraz $\phi_p \neq 0$.

Zazwyczaj (dodatkowo) wymaga się aby współczynniki proces AR(p) spełniały warunki implikujące stacjonarność (oraz skończoną średnią i odchylenie procesu). Warunek konieczny i wystarczający związany jest z pierwiastkami równania (tzw. funkcji charakterystycznej) zadanego przez

$$x^p - \phi_1 x^{p-1} - \dots - \phi_{p-1} x - \phi_p = 0. \quad (4.1)$$

Mówiąc ściślej wymagamy, aby pierwiastki (potencjalnie zespolone) powyższego równania leżały wewnątrz okręgu jednostkowego, zob. [Hay00, Propozycja 6.4].

Drugą klasę procesów można skonstruować poprzez uwzględnienie poprzednich wartości szumu.

Definicja 4.11 (Proces typu MA). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N}$. Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **procesem średniej ruchomej rzędu q** lub **procesem typu MA(q)** jeżeli można go przedstawić w postaci

$$X_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest białym szumem $(\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$, oraz $\theta_q \neq 0$.

Procesy typu MA(q) są zawsze procesami stacjonarnymi.

Poprzednie dwie klasy często łączy się jedną klasę procesów i nazywa procesami ARMA.

Definicja 4.12 (Proces typu ARMA). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ oraz $p, q \in \mathbb{N}$. Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **procesem typu ARMA(p,q)** jeżeli można go przedstawić w postaci

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \epsilon_t + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest białym szumem, $(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$, $\phi_p \neq 0$ oraz $\theta_q \neq 0$.

Więcej na temat procesów typu ARMA i ich ekonometrycznych zastosowań można znaleźć np. w książce [Hay00].

4.3 Procesy typu ARCH i GARCH

Rozważmy teraz klasę procesów stochastycznych w której zmienność procesu w danej chwili zależy od przeszłych realizacji procesu i jest wyrażona równaniem rekurencyjnym

Definicja 4.13 (Proces typu ARCH). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ oraz $p \in \mathbb{N}$. Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **procesem autoregresji z heteroskedastycznością warunkową rzędu p** lub **procesem typu ARCH(p)** jeżeli można go przedstawić w postaci

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, \\ \sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \epsilon_{t-p}^2} \end{cases}$$

gdzie $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest białym szumem $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p$, oraz $\omega > 0$.

Warto zauważyć, że w definicji procesu ARCH(p) dla dowolnej chwili $t \in \mathbb{T}$ zmienna losowa σ_t jest \mathcal{F}_{t-1} , gdzie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ oznacza naturalną filtrację procesu X . Proces X można więc traktować jako modyfikację białego szumu, w której warunkowa wariancja procesu jest zmienna w czasie. Podobnie jak wcześniej, możemy też dopuścić sytuacje, w której warunkowa wariancja zależy od poprzednich wartości procesu, tj. poprzednich warunkowych wariancji.

Definicja 4.14 (Proces typu GARCH). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ oraz $p, q \in \mathbb{N}$. Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **uogólnionym procesem autoregresji z heteroskedastycznością warunkową rzędu (p,q)** lub **procesem typu GARCH(p,q)** jeżeli można go przedstawić w postaci

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \epsilon_t, \\ \sigma_t = \sqrt{\omega + (\alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \epsilon_{t-p}^2) + (\beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2)} \end{cases}$$

gdzie $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest białym szumem $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$, oraz $\omega > 0$.

Podobnie jak wcześniej zazwyczaj wymaga się, aby współczynniki procesu spełniały własności powodujące, że będziemy mieli kontrole nad procesem (np. będzie istniała długookresowa bezwarunkowa wariancja procesu). Zazwyczaj wymagamy aby współczynniki sumowały się do liczby mniejszej od 1. Więcej na temat procesów typu GARCH i ich praktycznych zastosowań można znaleźć np. w książce [Ale09].

5 Całka stochastyczna Itô

W rozdziale pokażemy, jak zdefiniować całkę stochastyczną z procesu stochastycznego względem zadanego ruchu Browna W , tj. nadać sens wyrażeniu

$$\int_0^t X_s dW_s, \quad t \geq 0. \quad (5.1)$$

Na pierwszy rzut oka można by spróbować zdefiniować całkę (5.1) korzystając z klasycznych method, np. dla każdego $\omega \in \Omega$ zdefiniować (5.1) jako całkę Lebesgue'a-Stieltjesa. Niestety z Propozycji 3.8 wynika, że ruch Browna ma nieskończone wahanie na dowolnym przedziale czasu, co uniemożliwia tego typu konstrukcję.

O ile konstrukcja całki stochastycznej Itô w wielu miejscach przypomina klasyczną konstrukcję całki, o tyle w kilku miejscach istotnie się od niej różni. Główną różnicą w konstrukcji jest fakt, że nie możemy wybrać dowolnego punktu z wcześniej ustalonej partycji i później przejść do granicy po podziałach (zmniejszając ich długość). Okazuje się jednak, że gdy weźmiemy jakiś ustalony punkt, w tym wypadku lewy koniec przedziały, to definicja taka będzie dobrze postawiona co pokażemy w dalszej części tego rozdziału.¹⁸

Podobnie jak w przypadku klasycznym zaczniemy od definicji całki stochastycznej po procesach prostych, które są naturalnym odpowiednikiem funkcji prostych dla procesów. Następnie będziemy rozszerzać definicję na inne procesy.

W rozdziale tym będziemy zakładać, że czas jest ciągły, tj. $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, a zadana filtracja \mathbb{F} jest filtracją generowaną przez ustalony z góry ruch Browna $W = (W_t)_{t \in \mathbb{T}}$, tj. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$. Dla uproszczenia skupimy się definicji całki na przedziale $[0, t)$. Definicję tą łatwo rozszerzyć do dowolnego innego przedziału biorąc na przykład różnicę między całkami.

5.1 Całka Itô z procesu prostego

Procesy proste są naturalnym rozszerzeniem funkcji prostych.

Definicja 5.1 (Proces prosty). Proces stochastyczny $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy (**prognozowalnym**) **procesem prostym** jeżeli możemy go przedstawić jako

$$\xi_t = Z \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} Z_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t), \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

gdzie Z jest \mathcal{F}_0 -mierzalną zmienną losową, ciąg punktów $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ jest ściśle rosnący, $n \in \mathbb{N}$, a Z_k , dla $k = 0, 1, \dots, n$, jest całkowną z kwadratem \mathcal{F}_{t_k} -mierzalną zmienną losową. Klasę wszystkich procesów prostych będziemy oznaczać przez \mathcal{P} .^a

^aCzasami w literaturze można spotkać ogólniejszą definicję procesu prostego nie zakładającą jego całkowności z kwadratem. W tym wykładzie będziemy to jednak dla uproszczenia robić, gdyż dla takich procesów łatwiej jest zdefiniować całkę stochastyczną.

Klasa procesów prostych (niekoniecznie całkownych z kwadratem) odpowiada klasie procesów lewostronnie ciągłych, adaptowanych, stałych na przedziałach $(t_k, t_{k+1}]$, dla $k = 1, \dots, n$ oraz równych zero na przedziale (t_n, ∞) . Procesy te są prognozowalne oraz generują $P_{\mathbb{T}}$, tzn prognozowalną

¹⁸W teorii moglibyśmy też wziąć inny ustalony punkt np. środek przedziału. Wtedy jednak dostalibyśmy inny typ całki stochastycznej, który w literaturze nazywa się całką stochastyczną Stratonowicza (ang. *Stratonovich integral*). Dokładna analiza tej całki wykracza jednak poza materiał tego wykładu; w zastosowaniach finansowych używa się głównie całki Itô.

σ -algebrę. Łatwo również zauważyć, że klasa \mathcal{P} jest domknięta względem liniowych kombinacji i mnożenia oraz, że dla każdej mierzalnej funkcji f proces $f(\xi)$ jest również procesem prostym. Zdefiniujmy teraz całkę Itô z procesu prostego.

Definicja 5.2 (Całka Itô z procesu prostego). Niech $\xi \in \mathcal{P}$. Wtedy **całkę Itô z procesu prostego** ξ oznaczamy przez $I(\xi)$ i definiujemy jako

$$I(\xi) := \int_0^\infty \xi_s dW_s := \sum_{k=0}^{n-1} Z_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), \quad (5.3)$$

gdzie ciąg punktów $(t_k)_{k=1}^n$ oraz ciąg zmiennych losowych $(Z_k)_{k=0}^{n-1}$ jest zadany w Definicji 5.1. Dodatkowo, **całkę Itô z procesu prostego** ξ od chwili $s \in \mathbb{T}$ do chwili $t \in \mathbb{T}$, gdzie $t > s$, oznaczmy przez $I_{s,t}(\xi)$ i definiujemy jako

$$I_{s,t}(\xi) := \int_s^t \xi_s dW_s := I(\mathbb{1}_{[s,t]}\xi).^a$$

Dla $s = 0$ całkę tę będziemy oznaczać skrótowo przez $I_t(\xi) := I_{0,t}(\xi)$.

^agdzie $(\mathbb{1}_{[0,t]}\xi)_s = \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\xi_s$ dla $s \in \mathbb{T}$

Zauważmy, że $(I_t(\xi))_{t \in \mathbb{T}}$ jest procesem stochastycznym dla każdego $\xi \in \mathcal{P}$, a całka Itô (do chwili $t \in \mathbb{T}$) jest zmienną losową. Można w stosunkowo łatwy sposób pokazać, że Definicja 5.2 jest poprawnie postawiona, tzn. nie zależy od konkretnej reprezentacji (5.2) procesu $\xi \in \mathcal{P}$; dowód tego faktu pozostawiamy jako ćwiczenie do domu – wystarczy zauważyć, że dla każdych dwóch różnych podziałów istnieje pod-podział, który jest gęstszy od każdego z wyjściowych podziałów. Przedstawmy teraz podstawowe własności całki Itô dla procesów prostych.

Twierdzenie 5.3 (Podstawowe własności całki Itô z procesów prostych). Niech $\xi, \varphi \in \mathcal{P}$. Wtedy

1. Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $t \geq 0$ zachodzi $I_t(\alpha\xi + \beta\varphi) = \alpha I_t(\xi) + \beta I_t(\varphi)$.
2. Dla $t > s \geq 0$ zachodzi $I_t(\xi) = I_s(\xi) + I_{s,t}(\xi)$, gdzie $I_{s,t}(\xi) = I(\mathbb{1}_{[s,t]}\xi)$.
3. Proces $(I_t(\xi))_{t \in \mathbb{T}}$ ma ciągłe trajektorie.
4. Proces $(I_t(\xi))_{t \in \mathbb{T}}$ jest całkownym z kwadratem martyngałem (względem \mathbb{F}^B) takim że

$$\mathbb{E}[I_t(\xi)] = 0, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (5.4)$$

5. Proces $(I_t(\xi))_{t \in \mathbb{T}}$ spełnia warunek *izometrii Itô*, tj. zachodzi równość

$$\mathbb{E}[I_t(\xi)^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \xi_s^2 ds \right], \quad t \in \mathbb{T}. \quad (5.5)$$

Dowód. Dowód własności 1) oraz 2) pozostawiamy jako ćwiczenie do domu; warto tutaj zauważyć, że jeżeli $\xi, \varphi \in \mathcal{P}$, to dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy $\alpha\xi + \beta\varphi \in \mathcal{P}$.

3) Zauważmy, że (skończona) suma procesów o ciągłych trajektoriach jest procesem o ciągłych trajektoriach. Wystarczy więc pokazać, że każdy składnik sumy w (5.3) jest ciągły. Bez straty ogólności wystarczy ograniczyć się do $k = 1$, tzn. pokazać, że dla procesu $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ danego przez

$$\xi_t = Z_1 \mathbb{1}_{(t_1, t_2]}(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (5.6)$$

gdzie Z_1 jest \mathcal{F}_{t_1} -mierzalną zmienną losową (całkowalną z kwadratem) oraz $t_2 > t_1 \geq 0$, wyrażenie $(I_t(\xi))_{t \in \mathbb{T}}$ ma ciągłe trajektorie. Ciągłość ta wynika bezpośrednio z ciągłości trajektorii ruchu Browna. Istotnie, wprost z definicji, dla dowolnego $t \in \mathbb{T}$ dostajemy proces o ciągłych trajektoriach dany przez

$$I_t(\xi) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_1], \\ Z_1(W_t - W_{t_1}) & t \in (t_1, t_2), \\ Z_1(W_{t_2} - W_{t_1}) & t \in [t_2, \infty). \end{cases} \quad (5.7)$$

4) Ponieważ suma martyngałów całkowalnych z kwadratem jest martyngałem całkowalnym z kwadratem, możemy bez straty ogólności założyć, że proces $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbb{T}}$ jest postaci (5.6) i ograniczyć się do pokazania własności dla $(I_t(\xi))_{t \in \mathbb{T}}$. Po pierwsze, zauważmy, że proces $(I_t(\xi))_{t \in \mathbb{T}}$ jest adaptowany do filtracji generowanej przez ruch Browna, gdyż zmienna Z_1 jest \mathcal{F}_{t_1} -mierzalna. Po drugie, proces ten jest całkowalny, gdyż dla każdego $t \in \mathbb{T}$, zmienne $I_t(\xi)$ jest iloczynem dwóch zmiennych całkowalnych z kwadratem. Pozostaje nam więc pokazać warunek martyngału tzn. warunek

$$\mathbb{E}[I_t(\xi) \mid \mathcal{F}_s] = I_s(\xi), \quad t > s \geq 0. \quad (5.8)$$

Ustalmy $s \in \mathbb{T}$ i rozważmy trzy przypadki: (a) $0 \leq s \leq t_1$; (b) $t_1 < s \leq t_2$; (c) $s > t_2$.

(a) Przypadek 1: $0 \leq s \leq t_1$. W przypadku tym dostajemy $I_s(\xi) = 0$. Jeżeli $t \leq t_1$, to równość w (5.8) jest spełniona, gdyż $I_t(\xi) = 0$. Dla $t \in (t_1, t_2)$, korzystając z (5.7) oraz zauważając, że $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t_1}$, dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_t(\xi) \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[Z_1(W_t - W_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_1(W_t - W_{t_1}) \mid \mathcal{F}_{t_1}] \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[Z_1 \mathbb{E}[W_t - W_{t_1} \mid \mathcal{F}_{t_1}] \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[Z_1 \cdot 0 \mid \mathcal{F}_s] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dla $t \in [t_2, \infty)$ dowód jest analogiczny, jak w przypadku $t \in (t_1, t_2)$.

(b) Przypadek 2: $t_1 < s \leq t_2$. Niech $t \in (s, t_2]$. Korzystając z (5.7), niezależności przyrostów W oraz tego, że Z_1 jest zmienną \mathcal{F}_s -mierzalną, dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_t(\xi) \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[Z_1(W_t - W_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= Z_1 \mathbb{E}[W_t - W_{t_1} \mid \mathcal{F}_s] \\ &= Z_1 \mathbb{E}[(W_t - W_s) + (W_s - W_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= Z_1(W_s - W_{t_1}) \\ &= I_s(\xi) \end{aligned}$$

Dla $t \in [t_2, \infty)$ dowód jest analogiczny, jak w przypadku $t \in (s, t_2)$.

(c) Przypadek 3: $s > t_2$. W przypadku tym zachodzi $I_t(\xi) = I_s(\xi)$, a więc równość (5.8) jest spełniona.

Łącząc (a), (b) i (c) dostajemy dowód własności martyngału. Pozostaje nam pokazać (5.4), tj. że dla $t \geq 0$ zachodzi $\mathbb{E}[I_t(\xi)] = 0$. Będziemy ponownie korzystać (bez straty ogólności) z uproszczonej wersji procesu (5.6). Dla $t \leq t_1$ dostajemy $I_t(\xi) = 0$, co daje nam natychmiast (5.4). Dla $t > t_1$ dostajemy natomiast

$$\mathbb{E}[I_t(\xi)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[I_t(\xi) \mid \mathcal{F}_{t_1}]] = \mathbb{E}[Z_1 \mathbb{E}[W_{t \wedge t_2} - W_{t_1} \mid \mathcal{F}_{t_1}]] = 0.$$

co kończy dowód (5.4).

5) Chcemy pokazać warunek (5.5), tj. własność

$$\mathbb{E}[I_t(\xi)^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \xi_s^2 ds \right].$$

Niestety w tym przypadku nie wystarczy rozważyć uproszczonego procesu zadanego w (5.4), gdyż przekształcenie $(\cdot)^2$ jest nieliniowe. Skorzystamy z pełnej reprezentacji procesu $\xi \in \mathcal{P}$ przedstawionej w (5.2), tj. założmy, że

$$\xi_t = Z \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} Z_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t),$$

Niech $t \geq 0$ oraz $\mathbf{M} := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Rozważmy trzy przypadki: (1) $t = 0$; (2) $t \geq t_n$; (3) $t \in (0, t_n)$.

(a) Przypadek 1: $t = 0$. W przypadku tym mamy $I_t(\xi) = 0$, więc równość w (5.5) jest spełniona.

(b) Przypadek 2: $t \geq t_n$. W przypadku tym zachodzi $I_t(\xi) = I(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$, co daje nam

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_t(\xi)^2] &= \sum_{j,k \in \mathbf{M}} \mathbb{E} [Z_j Z_k (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] \\ &= \sum_{k \in \mathbf{M}} \mathbb{E} [Z_k^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2] + 2 \sum_{\substack{j>k \\ j,k \in \mathbf{M}}} \mathbb{E} [Z_j Z_k (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dla ustalonych $j, k \in \mathbf{M}$, $j > k$, z niezależności przyrostów procesu W dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z_j Z_k (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [Z_j Z_k (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \mathbb{E} [Z_j Z_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \mathbb{E} [W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= \mathbb{E} [Z_j Z_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \mathbb{E} [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}]] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Z Propozycji 3.9 wiemy również, że dla dowolnego $k \in \mathbf{M}$ zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}] &= \mathbb{E}[W_{t_{k+1}}^2 - 2W_{t_{k+1}}W_{t_k} + W_{t_k}^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \mathbb{E}[W_{t_{k+1}}^2 - W_{t_k}^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \mathbb{E}[W_{t_{k+1}}^2 - t_{k+1} \mid \mathcal{F}_{t_k}] + t_{k+1} - W_{t_k}^2 \\ &= W_{t_k}^2 - t_k + t_{k+1} - W_{t_k}^2 \\ &= t_{k+1} - t_k, \end{aligned}$$

co daje nam

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbf{M}} \mathbb{E} [Z_k^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2] &= \sum_{k \in \mathbf{M}} \mathbb{E} [\mathbb{E} [Z_k^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}]] \\
&= \sum_{k \in \mathbf{M}} \mathbb{E} [Z_k^2 \mathbb{E} [(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}]] \\
&= \sum_{k \in \mathbf{M}} \mathbb{E} [Z_k^2 (t_{k+1} - t_k)]
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Łącząc (5.9), (5.10) oraz (5.11) dostajemy

$$\mathbb{E}[I_t(\xi)^2] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [Z_k^2 (t_{k+1} - t_k)].$$

Zauważając następnie, że dla $t \geq t_n$ zachodzi

$$\int_0^t \xi_s^2 ds = \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{n-1} Z_k^2 \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(s) \right] ds = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k^2 \int_0^t \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(s) ds = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k^2 (t_{k+1} - t_k),$$

dostajemy ostatecznie $\mathbb{E}[I_t(\xi)^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \xi_s^2 ds \right]$, co kończy dowód tego przypadku.

(c) Przypadek 3: $t \in (0, t_n)$. Wiemy, że istnieje $j \in \mathbf{M}$ takie, że $t \in (t_j, t_{j+1}]$, oraz zachodzi równość

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_t(\xi)^2] &= \mathbb{E} \left[(I_{t_j}(\xi) + I_{t_j, t}(\xi))^2 \right] \\
&= \mathbb{E} [I_{t_j}(\xi)^2] + 2 \mathbb{E} [I_{t_j}(\xi) I_{t_j, t}(\xi)] + \mathbb{E} [I_{t_j, t}(\xi)^2].
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Zastanówmy się teraz, ile wynosi każdy składnik tej sumy. Postępując podobnie, jak w poprzednim przypadku, dla pierwszego składnika sumy dostajemy

$$\mathbb{E} [I_{t_j}(\xi)^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^{t_j} \xi_s^2 ds \right]. \tag{5.13}$$

Ponieważ $(I_t(\xi))_{t \in \mathbb{T}}$ jest martyngałem, łatwo obliczyć wartość drugiego składnika, tj.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [I_{t_j}(\xi) I_{t_j, t}(\xi)] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [I_{t_j}(\xi) I_{t_j, t}(\xi) \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\
&= \mathbb{E} [I_{t_j}(\xi) \mathbb{E} [I_{t_j, t}(\xi) \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\
&= \mathbb{E} [I_{t_j}(\xi) \mathbb{E} [I_t(\xi) - I_{t_j}(\xi) \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\
&= \mathbb{E} [I_{t_j}(\xi) \mathbb{E} [I_t(\xi) - I_{t_j}(\xi) \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Aby obliczyć trzeci składnik postępujemy podobnie jak w poprzednim przypadku, tj. zauważając, że $t \in (t_j, t_{j+1}]$, dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [I_{t_j, t}^2(\xi)] &= \mathbb{E} [Z_j^2 (W_t - W_{t_j})^2] \\
&= \mathbb{E} [\mathbb{E} [Z_j^2 (W_t - W_{t_j})^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\
&= \mathbb{E} [Z_j^2 \mathbb{E} [(W_t - W_{t_j})^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \\
&= \mathbb{E} [Z_j^2 (t - t_j)] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_{t_j}^t \xi_s^2 ds \right].
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Wstawienie (5.13), (5.14) i (5.15) do (5.12) kończy dowód tego przypadku.

Łącząc (a), (b) i (c) kończymy dowód (5.5). \square

5.2 Całka Itô z procesu klasy \mathcal{L}^2

Naszukujemy teraz, jak rozszerzyć definicję całki Itô na klasę procesów całkowalnych z kwadratem, tj. klasę \mathcal{L}^2 . Ponieważ dokładne omówienie tego tematu wykracza poza zakres tego wykładu, skupimy się na ogólnej intuicji, bez przedstawiania pełnych dowodów, itd.

Definicja 5.4 (Proces klasy \mathcal{L}^2). Mówimy, że proces stochastyczny X jest klasy \mathcal{L}^2 ($X \in \mathcal{L}^2$), jeżeli X jest procesem adaptowanym, (progresywnie) mierzalnym oraz dla każdego $t > 0$ zachodzi

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right] < \infty.$$

Na przestrzeni \mathcal{L}^2 , dla każdego $t \in \mathbb{T}$ definiujemy semi-normę

$$\|X\|_{\mathcal{L}^2, t} := \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right]$$

oraz powiązaną metrykę

$$\rho_{\mathcal{L}^2}(X, Y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|X - Y\|_{\mathcal{L}^2, n} \wedge 1), \quad X, Y \in \mathcal{L}^2.$$

Łatwo wykazać, że $\rho_{\mathcal{L}^2}$ jest w istocie metryką oraz $(\mathcal{L}^2, \rho_{\mathcal{L}^2})$ jest przestrzenią polską (tzn. zupełną i ośrodkową przestrzenią metryczną), dowód tego faktu pozostawiamy jako ćwiczenie do domu.

Pokażemy teraz, że każdy proces z \mathcal{L}^2 możemy aproksymować za pomocą procesów z \mathcal{P} , tzn. procesów prostych.

Propozycja 5.5 (Aproksymacja procesu klasy \mathcal{L}^2 za pomocą procesów prostych z klasy \mathcal{P}). Klasa procesów \mathcal{P} jest gęsta w \mathcal{L}^2 , tzn. dla każdego $X \in \mathcal{L}^2$ istnieje ciąg $(\xi^n)_{n=1}^{\infty}$ procesów prostych (z \mathcal{P}) taki, że $\xi^n \xrightarrow{\rho_{\mathcal{L}^2}} X$ dla $n \rightarrow \infty$.

Dowód Propozycji 5.5 zazwyczaj odbywa się w kilku krokach: (1) pokazanie, że klasa \mathcal{P} jest gęsta w podprzestrzeni \mathcal{L}^2 procesów ograniczonych o zerowej wartościach poza skończonym przedziałem czasowym; (2) pokazanie, że klasa \mathcal{P} jest gęsta na podprzestrzeni \mathcal{L}^2 procesów ciągłych, a następnie podprzestrzeni procesów progresywnie mierzalnych; (3) pokazanie, że klasa \mathcal{P} jest gęsta w \mathcal{L}^2 . Warto zauważyć, że mając własność (2), w ostatnim kroku wystarczy skorzystać z Twierdzenia 2.21 i rozważyć progresywnie mierzalną modyfikację wyjściowego procesu. Pełny dowód Propozycji 5.5 wykracza poza materiał tego kursu, zob. [KS12, Propozycja 2.8].

Następnie należy zbadać, czy dla każdego ciągu z \mathcal{P} aproksymującego $X \in \mathcal{L}^2$, powiązane całki Itô z procesów prostych mają granicę i czy zbiegają do tej samej granicy (dla różnych ciągów) w normie średnio-kwadratowej.

Propozycja 5.6 (Granica całek Itô dla procesów prostych). Niech $X \in \mathcal{L}^2$ oraz niech $(\xi^n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem procesów prostych (z \mathcal{P}) takim, że $\xi^n \xrightarrow{\rho_{\mathcal{L}^2}} X$ dla $n \rightarrow \infty$. Wtedy

- 1) Dla każdego $t \in \mathbb{T}$, ciąg zmiennych losowych $(I_t(\xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ ma granicę w $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.
- 2) Dla każdego $t \in \mathbb{T}$ oraz ciągu $(\nu^n)_{n=1}^\infty$ procesów prostych (z \mathcal{P}) spełniającego $\nu^n \xrightarrow{\rho_{\mathcal{L}^2}} X$, gdy $n \rightarrow \infty$, zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\xi^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\nu^n), \quad \text{w } L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}).$$

Dowód Propozycji (5.6) jest w istocie wnioskiem wynikającym z izometrii Itô oraz tego, że $(\mathcal{L}^2, \rho_{\mathcal{L}^2})$ jest przestrzenią polską; pozostawiamy go jako ćwiczenie domowe. Jesteśmy teraz gotowi, aby formalnie zdefiniować całkę Itô dla procesów klasy \mathcal{L}^2 ; dla uproszczenia skupmy się tylko na przypadku całki do określonej chwili $t \in \mathbb{T}$.

Definicja 5.7 (Całka Itô z procesu klasy \mathcal{L}^2). Niech $X \in \mathcal{L}^2$. Wtedy **całkę Itô z procesu** X do chwili $t \in \mathbb{T}$ oznaczamy przez $I_t(X)$ lub $\int_0^t X_s dW_s$ i definiujemy jako granicę w normie L^2 ciągu zmiennych losowych $(I_t(\xi^n))_{n=1}^\infty$, gdzie $(\xi^n)_{n=1}^\infty$ jest (dowolnym) ciągiem procesów prostych z \mathcal{P} takim, że $\xi^n \xrightarrow{\rho_{\mathcal{L}^2}} X$.^a

^aOczywiście w podobny sposób można zdefiniować całkę na dowolnym przedziale.

Podajmy teraz kilka podstawowych własności całki Itô z procesu klasy \mathcal{L}^2 . Warto zauważyć, że są one w istocie odzwierciedleniem własności podanych już w Twierdzeniu 5.3.

Twierdzenie 5.8 (Podstawowe własności całki Itô z procesów klasy \mathcal{L}^2). Niech $X, Y \in \mathcal{L}^2$. Wtedy

1. Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $t \geq 0$ zachodzi $I_t(\alpha X + \beta Y) = \alpha I_t(X) + \beta I_t(Y)$.
2. Proces $(I_t(X))_{t \in \mathbb{T}}$ ma ciągle trajektorie startujące z zera, tzn. $I_0(X) = 0$.
3. Proces $(I_t(X))_{t \in \mathbb{T}}$ jest całkowalnym z kwadratem martyngałem (względem \mathbb{F}^B) takim że

$$\mathbb{E}[I_t(X)] = 0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

4. Proces $(I_t(X))_{t \in \mathbb{T}}$ spełnia warunek *izometrii Itô*, tj. zachodzi równość

$$\mathbb{E}[I_t(X)^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right], \quad t \in \mathbb{T}. \quad (5.16)$$

5. Dla dowolnych $t, k \in \mathbb{T}$ takich, że $t > k$, zachodzi

$$\mathbb{E}[I_t(X)I_t(Y)] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s Y_s ds \right] \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E} \left[(I_t(X) - I_k(X))^2 \mid \mathcal{F}_k \right] = \int_k^t X_s^2 ds.$$

Dowód Twierdzenia 5.8 można znaleźć w [KS12, Propozycja 2.10].

Uwaga 5.9 (Własności całki Itô w zapisie całkowym). Własności z Twierdzenia 5.8 podane w 3., 4. i 5. w zapisie całkowym przyjmują postać

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s dW_s \right] &= 0, \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dW_s - \int_0^k X_s dW_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_s \right] = \int_k^t X_s^2 ds, \\ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dW_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 ds \right], \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dW_s \right) \left(\int_0^t Y_s dW_s \right) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s Y_s ds \right],\end{aligned}$$

Uwaga 5.10 (Dalsze rozszerzenia całki Itô). Typowym kolejnym krokiem jest rozszerzenie całki Itô z klasy do klasy \mathcal{P}^2 , tj. klasy procesów mierzalnych i adaptowanych spełniających warunek

$$\mathbb{P} \left[\int_0^t X_s^2 ds < \infty, \text{ dla każdego } t \in \mathbb{T} \right] = 1.$$

Całkę stochastyczną można też zdefiniować w bardziej ogólnym przypadku, a nie tylko dla ruchu Browna, zob. [KS12]. Nie będziemy się jednak tym zajmować na tym kursie.

Na koniec tego rozdziału pokażemy dwa przykłady pokazujące, jak liczyć całki stochastyczne wprost z definicji. W praktyce należy znaleźć ciąg aproksymujący procesów prostych i zbadać jego granicę.

W10
-
W11

Przykład 5.11 (Całka stochastyczna z funkcji stałej). Niech $X \equiv c$ oraz $t \in \mathbb{T}$. Rozważając proces prosty $c \cdot \mathbb{1}_{(0,t]}$ dostajemy wprost definicji

$$\int_0^t c dW_s = c(W_t - W_0) = cW_t.$$

Przykład 5.12 (Całka stochastyczna z ruchu Browna). Niech $X \equiv W$ oraz $t \in \mathbb{T}$. Rozważmy zagęszczający się ciąg podziałów odcinka $[0, t]$ oznaczony przez $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\|\pi_n\| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$, gdzie $\|\cdot\|$ wyznacza długość najdłuższego odcinka w podziale. Niech $(t_1^n, \dots, t_{m_n}^n)$ odpowiada podziałowi zadanemu przez π_n dla pewnego $m_n \in \mathbb{N}$. Wtedy, rozważając granicę w normie L^2 , dostajemy

$$\begin{aligned}\int_0^t W_s dW_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{m_n-1} W_{t_k^n} (W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{m_n-1} \left(\frac{1}{2} (W_{t_{k+1}^n}^2 - W_{t_k^n}^2) - \frac{1}{2} (W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n})^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{m_n-1} (W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{t}{2}\end{aligned}$$

5.3 Procesy Itô oraz wzór Itô

W rozdziale tym omówimy pokrótce klasę procesów zwaną *procesami Itô* oraz sformułujemy twierdzenie zwane *wzorem Itô*.

Definicja 5.13 (Proces Itô). Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ nazywamy **procesem Itô**, gdy można go przedstawić w postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (5.17)$$

gdzie X_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalną zmienną losową oraz $b = (b_t)_{t \in \mathbb{T}}$ i $\sigma = (\sigma_t)_{t \in \mathbb{T}}$ są mierzalnymi adaptowanymi procesami stochastycznymi takimi, że dla każdego $t \in \mathbb{T}$ zachodzi

$$\mathbb{P} \left(\int_0^t |b_s| ds < \infty \right) = 1, \quad \mathbb{P} \left(\int_0^t \sigma^2 ds < \infty \right) = 1.$$

Równość (5.17) często zapisuje się w tzw. w stochastycznej postaci różniczkowej pisząc skrótowo

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Okazuje się, że dla dostatecznie gładkiej funkcji, możemy nią obłożyć proces Itô i dostać inny proces Itô. Kolejne twierdzenie, zwane *wzorem Itô* mówi nam, jak odzyskać bezpośrednią postać (5.17) dla procesu obłożonego funkcją, mając daną funkcję oraz wyjściowy proces.

Twierdzenie 5.14 (Wzór Itô). Niech X będzie procesem Itô oraz niech $F : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. Wtedy proces $F(X) := (F(X_t, t))_{t \in \mathbb{T}}$ jest procesem Itô takim, że

$$dF(X_t, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(X_t, t) + b_t \frac{\partial F}{\partial x}(X_t, t) + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_t, t) \right) dt + \sigma_t \frac{\partial F}{\partial x}(X_t, t) dW_t, \quad (5.18)$$

gdzie $b = (b_t)_{t \in \mathbb{T}}$ oraz $\sigma = (\sigma_t)_{t \in \mathbb{T}}$ to parametry dla procesu X .

Dowód ten opiera się na rozwinięciu procesu w szereg Taylora. Pełny dowód Twierdzenia 5.14 można znaleźć w [KS12, Twierdzenie 3.3]. Łatwo zauważyć, że w przypadku, gdy funkcja F nie zależy od czasu, tzn. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $F \in C^2(\mathbb{R})$, dostajemy uproszczony wzór

$$dF(X_t) = \left(b_t F'(X_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 F''(X_t) \right) dt + \sigma_t F'(X_t) dW_t. \quad (5.19)$$

Pokażmy teraz na kilku przykładach, jak wykorzystać wzór Itô do obliczeniu

Przykład 5.15 (Wzór Itô dla funkcji kwadratowej). Niech $X = W$ oraz niech $F(x) = x^2$. Łatwo zauważyć, że X jest procesem Itô, zob. Przykład 5.11. Stosując wzór Itô, dostajemy więc

$$dW_t^2 = (0 \cdot 2W_t + \frac{1}{2} 1^2 \cdot 2) dt + 1 \cdot 2W_t dW_t = dt + 2W_t dW_t,$$

W jawnej postaci wzór ten przyjmuje postać $W_t^2 = \int_0^t 1 ds + 2 \int_0^t W_s dW_s$ skąd od razu dostajemy

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{t}{2}.$$

Zauważmy, że dostaliśmy równość pokazaną bezpośrednio w Przykładzie 5.12.

Przykład 5.16 (Wzór Itô dla geometrycznego ruchu Browna). Rozważmy proces X dany przez

$$dX_t = X_t \mu dt + X_t \sigma dW_t,$$

dla $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\sigma > 0$. Zakładając, że $X_t > 0$ (można to w istocie pokazać), obłóżmy proces X funkcją $F(\cdot) = \ln(\cdot)$. Stosując wzór Itô dostajemy

$$dF(X_t) = \left((X_t \mu) \cdot \frac{1}{X_t} + \frac{1}{2} (X_t \sigma)^2 \cdot \frac{-1}{X_t^2} \right) dt + X_t \sigma \frac{1}{X_t} dW_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

W jawnej postaci wzór ten przyjmuje postać $\log(X_t) = \log(X_0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t$. Obłożenie obu stron równości eksponentą daje nam

$$X_t = X_0 \exp \left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right).$$

Więcej na temat procesów Itô, ich zastosowaniach (np. w finansach), itd., można uzyskać idąc na kurs związane *analizą stochastyczną*.

A Dodatek: Różne rodzaje zbieżności zmiennych losowych

W dodatku tym przypomnijmy podstawowe typy zbieżności i ogólne związki między nimi. Po więcej informacji odsyłamy do [Pit22].

Ciąg zmiennych losowych X_n , jako ciąg funkcji, może dążyć do pewnej zmiennej losowej X . Spróbujmy teraz scharakteryzować różne typy zbieżności i zastanowić się, czy, się one od siebie różnią.

Definicja A.1 (Różne typy zbieżności zmiennych losowych). Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych określonych na $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ oraz niech X będzie zmienną losową określoną na tej samej przestrzeni. Mówimy, że ciąg zmiennych (X_n) dąży do X :

1) **prawie na pewno**, ozn. $X_n \xrightarrow{p.n.} X$ lub $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, gdy

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right) = 1$$

2) **stochastycznie** (według prawdopodobieństwa), ozn. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ lub $X_n \xrightarrow{s} X$, gdy

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0;$$

3) **według momentu rzędu p** (dla $p > 0$), ozn. $X_n \xrightarrow{L^p} X$, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0;^a$$

4) **według rozkładu** (według dystrybuanty, słaba zbieżność), ozn. $X_n \xrightarrow{d} X$, gdy

$$\forall t \in \mathbb{R} : (F \text{ jest ciągła w } t) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t),$$

gdzie $F(t) := \mathbb{P}(X \leq t)$ oraz $F_n(t) := \mathbb{P}(X_n \leq t)$, $n \in \mathbb{N}$.

^aw przypadku $p = 1$ i $p = 2$ zbieżność tę nazywamy się czasami odpowiednio **zbieżnością według średnich** oraz **zbieżnością średniokwadratową**.

Łatwo zauważyć, że zbieżności 1), 2) oraz 3) są bezpośrednim odpowiednikiem nierówności rozważanych na kursie teorii miary i całki (odp. *zbieżność prawie wszędzie*, *zbieżność według miary*, oraz *zbieżność w normie L^p*). Zbieżność 1) rozważaliśmy przy okazji mocnego prawa wielkich liczb, zbieżność według prawdopodobieństwa przy okazji słabego prawa wielkich liczb, a zbieżność według rozkładu przy okazji CTG. Spróbujmy teraz pokrótce opisać każdy z tych typów zbieżności uwypuklając różnice między nimi, po bardziej szczegółowy opis odsyłamy do Rozdziału 7.1 w [GS01].

Zbieżność prawie na pewno można traktować jako odpowiednik zbieżności punktowej dostosowanej do rachunku prawdopodobieństwa. Chcielibyśmy, aby poza pewnym zbiorem A o mierze zero (tj. takim, że $\mathbb{P}(A) = 0$), ciąg liczb $X_n(\omega)$ dążył do liczby $X(\omega)$ dla każdego elementu $\omega \in \Omega \setminus A$. Warto tutaj zaznaczyć, że wymaganie zbieżności dla wszystkich elementów zbioru kłóciłoby się z tym, że chcielibyśmy identyfikować ze sobą zmienne losowe, które są sobie równe poza zbiorem miary zero – zbieżność prawie na pewno jest naturalnym następstwem tej konwencji. Warto zauważyć, że w definicji nie odnosimy się bezpośrednio do rozkładów zmiennych losowych, a zbieżność ta jest ściśle związana z przestrzenią probabilistyczną Ω .

Zbieżność stochastyczna odpowiada zbieżności według miary. Mając zmienne X_n i X zbiór punktów odległych od siebie o co najmniej ϵ można zdefiniować jako $A = \{\omega \in \Omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}$, co daje nam naturalne oszacowanie z użyciem miary \mathbb{P} , tj. $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \int_A 1 \, d\mathbb{P}$. Chcielibyśmy, aby odległość da dążyła do zera niezależnie od wyboru $\epsilon > 0$, co definiuje już zbieżność stochastyczną.

Zbieżność według momentu rzędu p odpowiada klasycznej zbieżności w normie L^p znanej z analizy matematycznej. Istotnie, norma w przestrzeni L^p zadana przez $\|X\|_p := (\int_{\Omega} |X|^p \, d\mathbb{P})^{1/p}$ jest związana bezpośrednio ze zbieżnością według momentu rzędu p . Jest to typowa zbieżność oparta o warunek całkowity. Więcej informacji o przestrzeniach L^p można znaleźć w Dodatku C w [JS04].

Zbieżność według rozkładu jest ważnym typem zbieżności w rachunku prawdopodobieństwa i pozwala na formułowanie wniosków podobnych do tych przedstawionych w CTG. Warto zauważyć, że zbieżność ta jest związana tylko z rozkładami zmiennych losowych, a nie ich samymi wartościami – w pewnym sensie zbieżność ta nie zależy od wyboru przestrzeni Ω , itd.. W związku z tym zazwyczaj będzie istniało nieskończenie wiele granic X dla ciągu $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$; w literaturze zbieżność ta jest czasami przedstawiana osobno i definiowana jako zbieżność według rozkładów, a nie zbieżność ciągów zmiennych losowych.

Podstawowe zależności między różnymi typami zbieżności losowych można znaleźć w Twierdzeniu A.2. Dokładniejszy opis zależności, wraz z omówieniem innych implikacji (w szczególnych przypadkach) można znaleźć w [Pit22].

Twierdzenie A.2 (Ogólna zależność między różnymi typami zbieżności zmiennych losowych). Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych określonych na $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ oraz niech X będzie zmienną losową określoną na tej samej przestrzeni. Wtedy zachodzą następujące implikacje

$$\begin{aligned} (X_n \xrightarrow{p.n.} X) &\implies (X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X) \implies (X_n \xrightarrow{d} X). \\ (X_n \xrightarrow{L^p} X) &\implies (X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X) \implies (X_n \xrightarrow{d} X). \end{aligned}$$

Dodatkowo, dla $p > q \geq 1$ zachodzi $(X_n \xrightarrow{L^p} X) \implies (X_n \xrightarrow{L^q} X)$.

B Notacja

Ω	Ustalony (z góry) zbiór. Elementy Ω nazywamy <i>zdarzeniami elementarnymi</i> .
\mathcal{F}	σ -algebra określona na Ω
\mathcal{G}	Pod σ -algebra \mathcal{F}
\mathbb{P}	Miara probabilistyczna (prawdopodobieństwo) określone na (Ω, \mathcal{F})
\mathbb{F}	Filtracja przestrzeni probabilistycznej, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$
\mathbb{F}^X	Naturalna filtracja procesu X , $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in \mathbb{T}}$
ω	Zdarzenie elementarne, element zbioru Ω , $\omega \in \Omega$.
A	Zdarzenie (mierzalne), $A \in \mathcal{F}$. Używamy też innych dużych liter.
A', A^c	Zdarzenie <i>przeciwne</i> do A , dla $A \in \Sigma$, tzn. $A' := \Omega \setminus A$.
\emptyset	Zbiór pusty, domyślenie określający zdarzenie puste (niemożliwe), $\emptyset \in \Sigma$.
$\mathcal{B}(X)$	Rodzina zbiorów Borelowskich na przestrzeni X
\mathcal{B}_0	Rodzina zbiorów Borelowskich na przestrzeni \mathbb{R} , których domknięcia nie zawierają zera.
\mathcal{L}_n	n -wymiarowa miara Lebesgue'a
$\sigma(\mathcal{F})$	najmniejsza σ -algebra zawierająca w sobie rodzinę zbiorów \mathcal{F} (podzbiorów Ω)
$\sigma(X)$	najmniejsza σ -algebra generowana przez zmienną X
$\mathbb{1}_A$	funkcja charakterystyczna zbioru A
$X^{-1}(A)$	przeciwobraz funkcji na zbiorze, tzn. $X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$
F_X	dystrybuanta zmiennej X
$\mathbb{E}(X)$	wartość oczekiwana zmiennej losowej X
$D(X)$	odchylenie standardowe zmiennej losowej X
δ_c	rozkład jednopunktowy w punkcie $c \in \mathbb{R}$
$B(n, p)$	rozkład dwumianowy z parametrami $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0, 1)$
$\text{Pois}(\lambda)$	rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$
$U([a, b])$	rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	rozkład normalny z parametrami $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$
$\phi(x)$	gęstość standardowego rozkładu normalnego w punkcji $x \in \mathbb{R}$
$\Phi(x)$	dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego w punkcji $x \in \mathbb{R}$
S_n	zazwyczaj suma zadanych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n
$X_n \xrightarrow{p.n.} X$	zbieżność prawie na pewno
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$	zbieżność stochastyczna
$X_n \xrightarrow{L^p} X$	zbieżność według p -tego momentu
$X_n \xrightarrow{d} X$	zbieżność według rozkładu, słaba zbieżność
\mathbb{T}	Zbiór określający czas, dyskretny lub ciągły, np. $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{T} = \mathbb{N}$
\mathbb{P}_X	Odwzorowanie zadające rozkłady skończenie wymiarowe procesu X
$\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$	Rodzina wszystkich zbiorów cylindrycznych na \mathbb{T}
τ	Moment zatrzymania, moment stopu
$\tau \wedge \rho$	minimum momentów stopu, tj. $\tau \wedge \rho = \min\{\tau, \rho\}$
$\tau \vee \rho$	maksimum momentów stopu, tj. $\tau \vee \rho = \max\{\tau, \rho\}$
Σ_s	zbiór ograniczonych momentów stopu, tj. $\Sigma_s = \{\tau : \tau \leq s\}$
X_τ	losowa próba (względem czasu) z procesu X w chwili τ
X^τ	proces zatrzymany w chwili τ
\mathcal{F}_τ	σ -algebrę generowaną przez moment zatrzymania τ
Σ_t	rodzina wszystkich momentów stopu ograniczonych przez t , $\Sigma_t := \{\tau : \tau \leq t\}$
Σ_∞	Rodzina wszystkich ograniczonych momentów stopu, $\Sigma_\infty := \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \Sigma_t$
$\langle X, X \rangle_t$	wariacja (wahanie) kwadratowe procesu X , $\langle X, X \rangle := \langle X, X \rangle_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$
W_t	standardowy ruch Browna (proces Wienera), $W := (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$
N_t	Proces Poissona, $N := (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$
ΔX_t	Skok procesu (typu cádlág) w chwili $t \in \mathbb{T}$, $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$,
Π_X	Miara Poissona (miara skoków) procesu X .
ν_X	Miara Lévy'ego procesu X
$P_{t,s}$	Prawdopodobieństwo przejścia z chwili s to chwili t
P_t	Prawdopodobieństwo przejścia do chwili t
P	Funkcja przejścia, rodzina prawdopodobieństw przejścia $P = (P_t)_{t \in \mathbb{T}}$
$\mathcal{C}(\mathbb{R})$	Przestrzeń ograniczonych i mierzalnych funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
$I(\xi)$	Całka Itô (od 0 do ∞) dla procesu ξ
$I_{s,t}(\xi)$	Całka Itô (od s do t) dla procesu ξ
$I_t(\xi)$	Całka Itô (od 0 do t) dla procesu ξ

Literatura

- [Ale09] C. Alexander. *Market Risk Analysis: Practical Financial Econometrics*, volume 2. John Wiley & Sons, 2009.
- [App09] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge university press, 2009.
- [Bal17] P. Baldi. *Stochastic Calculus: An Introduction Through Theory and Exercises*. Universitext. Springer Cham, 2017.
- [Bil12] P. Billingsley. *Probability and Measure: Anniversary Edition*. John Wiley & Sons, 2012.
- [Bré75] P. Brémaud. An extension of watanabe’s theorem of characterization of poisson processes over the positive real half line. *Journal of Applied Probability*, 12(2):396–399, 1975.
- [BZ00] Z. Brzeźniak and T. Zastawniak. *Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [GKK⁺10] D. Gusak, A. Kukush, A. Kulik, Y. Mishura, and A. Pilipenko. Theory of stochastic processes. *Problem Books in Math*. Springer, New York, 2010.
- [GS01] G. Grimmett and D. Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford university press, 3 edition, 2001.
- [Hay00] F. Hayashi. *Econometrics*. Princeton University Press, 2000.
- [JS04] J. Jakubowski and R. Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. Script, Warszawa, 2004.
- [Kal02] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 2002.
- [KS12] I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Oks13] B. Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Pes17] S. Peszat. Wstęp do teorii procesów stochastycznych. Notatki do wykładu, Luty 2017.
- [Pit22] M. Pitera. Rachunek prawdopodobieństwa 1. Notatki do wykładu, Luty 2022.
- [PP02] A. Papoulis and S. U. Pillai. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Tata McGraw-Hill, 4th edition, 2002.
- [PZ07] S. Peszat and J. Zabczyk. *Stochastic partial differential equations with Lévy noise: An evolution equation approach*, volume 113. Cambridge University Press, 2007.