Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna.*
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna.*
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.*
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona.*
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

(1) Symbolika logiczna. Zbiory. Relacje. Odwzorowania.
(2) Zbiory przeliczalne.
(3) Grupy, ciała, ciała uporządkowane. Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych.
(4) Kresy.
(5) Nieprzeliczalność $\mathbb{R}$.
(6) Funkcje monotoniczne i okresowe.
(7) Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych.
(8) Liczby zespolone.
(9) Ciągi liczbowe.
(10) Pierwiastkowanie i potęgowanie.
(11) Liczba e.
(12) Granice górne i dolne.
(13) Przestrzenie metryczne. Przestrzenie zwarte. Metryka Czebyszewa. Przestrzenie spójne. Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych.
(14) Funkcje ciągłe. Granica w punkcie. Własności funkcji ciągłych. Krzywe. Przestrzenie unormowane.
(15) Szeregi liczbowe.
(16) Iloczyny szeregów.
(17) Iloczyny nieskończone.
(18) Ciągi i szeregi funkcyjne.
(19) Iloczyny funkcyjne.
(20) Szeregi potęgowe.
(21) Przeliczalne rodziny sumowalne.
(22) Funkcje analityczne I.

Kontynuacje

W semestrze letnim będzie wykład z Analizy Matematycznej 2 (60 godzin), zaś w przyszłym roku akademickim — wykłady z Analizy Matematycznej 3 (60 godzin) i 4 (60 godzin).

Zaliczanie ćwiczeń

W semestrze jest 60 godz. ćwiczeń. Limit nieobecności to 20 godzin, w tym limit nieobecności nieusprawiedliwionych to 8 godzin.

W przypadku przekroczenia któregokolwiek z tych limitów student otrzymuje ocenę NZAL i nie jest dopuszczony do egzaminów.

Egzaminy

Student, który uzyskał z zaliczenia ocenę $\geqslant 4,5$ otrzymuje automatycznie taką samą ocenę końcową z egzaminu, z tym że student, który ma 4,5 może z własnej woli pisać egzamin pisemny, aby poprawić sobie ocenę na 5,0.

Terminy egzaminów pisemnych:

- 29.01.2018, godz. 9:00–11:00, sale 0004 (grupy 1–4), 0089 (grupy 5–8); termin główny.
- 19.02.2018, godz. 9:00–11:00, sale 0004 (grupy 1–4), 0089 (grupy 5–8); termin poprawkowy.

Egzamin będzie się składać z 5 zadań i będzie oceniany w skali 0–50 punktów.

Egzamin 19.02.2018 jest dla osób dopuszczonych do zdawania, które bądź nie zdały egzaminu w głównym terminie, bądź z jakiegoś powodu do niego nie przystąpiły w głównym terminie.

— Studenci, którzy uzyskają $\geqslant 26$ pkt i mieli zaliczenie na ocenę $\geqslant 3,0$ otrzymują ocenę końcową według następującej tabeli:

Punkty	Ocena
26–32	3,0
33–37	3,5
38–42	4,0
43–46	4,5
47–50	5,0

— Studenci, którzy uzyskają $\geqslant 34$ pkt i mieli zaliczenie na ocenę 2,0 otrzymują ocenę końcową według następującej tabeli:

Punkty	Ocena
34–41	3,0
42–46	3,5
47–50	4,0

— Pozostali piszący egzamin otrzymują ocenę końcową 2,0.

— Studenci, którzy otrzymali z egzaminu 2,0 i mieli zaliczenie na 4,0 mogą się ubiegać o dodatkowy egzamin ustny.

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

1.1. Symbolika logiczna

Podstawy logiki i teorii zbiorów są przedmiotem wykładu *„Elementy logiki i teorii mnogości”*. Z tego też powodu ograniczamy się poniżej do podstawowych definicji i oznaczeń.

Będziemy rozważać zdania, o których możemy zawsze stwierdzić, czy są prawdziwe, czy fałszywe. Z punktu widzenia logiki istotne jest wyłącznie to, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Fakt, iż zdanie p jest prawdziwe zapisujemy $p = 1$, zaś, gdy jest fałszywe piszemy $p = 0$. Jeżeli $p = 1$, to mówimy, że p ma wartość logiczną 1, jeżeli $p = 0$, to p ma wartość logiczną 0.

Zaprzeczenie (negację) zdania p oznaczamy $\sim p$. Oczywiście, $p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sim p = 1$.

Parom zdań (p, q) możemy przy pomocy pewnych reguł (*funktorów*) przyporządkowywać nowe zdania. Podstawowe funktory to:

- *Alternatywa (suma logiczna)* $p \vee q$, inaczej oznaczana „lub”.
- *Koniunkcja (iloczyn logiczny)* $p \wedge q$, inaczej oznaczana „i”, lub samym przecinkiem.
- *Implikacja (wynikanie)* $p \Longrightarrow q$ (p nazywamy *poprzednikiem*, q nazywamy *następnikiem*).
- *Równoważność (wtedy i tylko wtedy)* $p \Longleftrightarrow q$.

Kwantyfikatory:

- *Kwantyfikator (duży) „dla każdego”* $\forall$, np. $\forall_{x\in\mathbb{R}} : x^2 \geqslant 0$.
- *Kwantyfikator (mały) „istnieje”* $\exists$, np. $\exists_{x\in\mathbb{R}} : x^2 = 2$.
- *Istnieje dokładnie jeden* $\exists!$, np. $\exists!_{x\in\mathbb{R}} : x \geqslant 0,\ x^2 = 2$.

Przy pomocy funktorów i kwantyfikatorów możemy tworzyć bardziej skomplikowane zdania.

Przy definiowaniu nowych obiektów stosujemy następujące oznaczenia:

„$:=$” oznacza *równość z definicji*; *obiekt definiowany* $:=$ *obiekt definiujący*, np. $f(x) := x^2$, ale też $x^2 =: f(x)$;

„$:\Longleftrightarrow$” oznacza *równoważny z definicji,* np. $A \subset B :\Longleftrightarrow \forall_{x\in A} : x \in B$.

1.2. Zbiory

Analiza matematyczna korzysta z aksjomatyki *ZFC* (tzn. aksjomatyki **Z**ermelo (1)–**F**raenkla (2) + pewnik wyboru **C**).

Pojęcia zbioru oraz należenia do zbioru są pierwotne i nie są definiowane. Zbiór pusty, tzn. zbiór, do którego nie należy żaden element, oznaczamy przez $\varnothing$.

- *Zawieranie (inkluzja) zbiorów:* $A \subset B :\Longleftrightarrow \forall_{x\in A} : x \in B$. Będziemy też pisać $A \supset B$, jeżeli $B \subset A$.
- *Równość zbiorów:* $A = B :\Longleftrightarrow A \subset B,\ B \subset A$. Będziemy pisać $A \subsetneq B$, jeżeli $A \subset B$ i $A \neq B$.
- *Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru (potęga zbioru) X:* $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$.
  Jeżeli $X = \{1, 2\}$, to $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
  $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots$.
  Jeżeli zbiór X ma N elementów, $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, to zbiór $\mathcal{P}(X)$ ma 2^N elementów.
- *Suma zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $\bigcup\mathcal{A} := \{x \in X : \exists_{A\in\mathcal{A}} : x \in A\}$.

(1) Ernst Zermelo (1871–1953).
(2) Abraham Fraenkel (1891–1965).

- *Iloczyn (przecięcie) zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \cap B := \{x \in X : x \in A,\ x \in B\}$. Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $\bigcap \mathcal{A} := \{x \in X : \forall_{A \in \mathcal{A}} : x \in A\}$.
- *Różnica zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$;
- *Dopełnienie zbioru A:* Jeżeli $A \subset X$, to $A^c := X \setminus A$.

  Prawa de Morgana (3) *dla zbiorów:*

  Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $(\bigcup \mathcal{A})^c = \bigcap \mathcal{A}^c$, gdzie $\mathcal{A}^c := \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$.

  Analogicznie, $(\bigcap \mathcal{A})^c = \bigcup \mathcal{A}^c$.
- *Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów:* $A \times B := \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$, gdzie $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

  Ćwiczenie: Udowodnić, że $(x', y') = (x'', y'') \iff x' = x'',\ y' = y''$.

  Jeżeli $A = B$, to zamiast $A \times A$, piszemy często A^2.
- *Iloczyn kartezjański skończonej liczby zbiorów:* $A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$, gdzie $(x_1, \dots, x_n) := \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, \dots, x_n\}\}$.

  Ćwiczenie: Udowodnić, że $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

  Jeżeli $A_1 = \dots = A_k = A$, to zamiast $\underbrace{A \times \dots \times A}_{k \times}$ piszemy A^k.
- *Zbiory liczbowe:*

  $\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych $1, 2, \dots$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant k\}$ $(k \in \mathbb{N})$,

  $\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych,

  $\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych,

  $\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych,

  $\mathbb{C}$ — zbiór liczb zespolonych.

  Oczywiście $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $A_* := A \setminus \{0\}$, np. $\mathbb{Q}_*$;

  $A_+ := \{x \in A : x \geqslant 0\}$, np. $\mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N}_0)$;

  $A_{>0} := \{x \in A : x > 0\}$, np. $\mathbb{R}_{>0}$.

  Podobnie definiujemy A_-, $A_{<0}$.

1.3. Relacje

Definicja 1.3.1. *Relacją (dwuargumentową) w zbiorze* X nazywamy dowolny zbiór $R \subset X \times X$. Zamiast pisać $(x, y) \in R$ piszemy zwykle xRy. Relację R nazywamy *równoważnościową*, jeżeli:

(i) (*zwrotność*) $\forall_{x \in X} : xRx$,

(ii) (*symetryczność*) $\forall_{x,y \in X} : (xRy \Longrightarrow yRx)$,

(iii) (*przechodniość*) $\forall_{x,y,z \in X} : ((xRy,\ yRz) \Longrightarrow xRz)$.

Jeżeli $R \subset X \times X$ jest relacją równoważnościową, to dla dowolnego $x \in X$ definiujemy *klasę równoważności (abstrakcji) x względem R*

$$[x]_R := \{y \in X : xRy\}.$$

Rodzinę $X/R := \{[x]_R : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *przestrzenią ilorazową*.

Oczywiście, $x \in [x]_R$ oraz $[x]_R = [y]_R \iff xRy$ (Ćwiczenie).

Ćwiczenie: Jeżeli $X = \mathbb{Z}$, $xRy :\Longleftrightarrow 2|(x - y)$, to $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R,\ [1]_R\}$.

1.4. Odwzorowania

Definicja 1.4.1. Dane niech będą zbiory X oraz Y. Zbiór $f \subset X \times Y$ nazywamy *odwzorowaniem (funkcją)*, jeżeli $\forall_{x \in X}\ \exists!_{y \in Y} : (x, y) \in f$. Jeżeli $f \subset X \times Y$ jest odwzorowaniem, to piszemy $f : X \longrightarrow Y$. Zamiast pisać $(x, y) \in f$, piszemy $y = f(x)$. Jest to zgodne z tradycyjną definicją odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ jako przyporządkowania każdemu elementowi $x \in X$ pewnego elementu $y = f(x) \in Y$; $X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$.

- Dla $A \subset X$ definiujemy *obraz A poprzez f* jako zbiór $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$. Jest widoczne, że dla $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mamy $f(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup f(\mathcal{A})$, gdzie $f(\mathcal{A}) := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$, oraz $f(\bigcap \mathcal{A}) \subset \bigcap f(\mathcal{A})$.

  Ćwiczenie: Znaleźć przykład funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ takich, że $\varnothing = f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B) \neq \varnothing)$.

---

(3) Augustus De Morgan (1806–1871).

- Dla $B \subset Y$ definiujemy *przeciwobraz B poprzez f* jako zbiór $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$. Zamiast pisać $f^{-1}(\{b\})$ piszemy $f^{-1}(b)$. Jest widoczne, że dla $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ mamy $f^{-1}(\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{B})$, gdzie $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$, oraz $f^{-1}(\bigcap \mathcal{B}) = \bigcap f^{-1}(\mathcal{B})$.
- Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Y \longrightarrow Z$, to odwzorowanie $g \circ f : X \longrightarrow Z$ dane wzorem $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, $\quad x \in X$, nazywamy *złożeniem odwzorowań f oraz g*.

  Ćwiczenie: Składanie odwzorowań jest łączne, tzn. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$, to dla $A \subset X$ określamy *zacieśnienie (zawężenie, restrykcję) odwzorowania f do A* jako odwzorowanie $f|_A : A \longrightarrow Y$ dane wzorem $f|_A(x) := f(x)$, $x \in A$.
- Jeżeli $f_j : X_j \longrightarrow Y$, $j = 1, 2$, oraz $f_1|_{X_1 \cap X_2} = f_2|_{X_1 \cap X_2}$, to odwzorowanie $f_1 \cup f_2 : X_1 \cup X_2 \longrightarrow Y$ dane wzorem $(f_1 \cup f_2)(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{gdy } x \in X_1 \\ f_2(x), & \text{gdy } x \in X_2 \end{cases}$ nazywamy *sklejeniem odwzorowań f_1 i f_2*.
- Jeżeli $f_j : X \longrightarrow Y_j$, $j = 1, \dots, N$, to odwzorowanie $(f_1, \dots, f_N) : X \longrightarrow Y_1 \times \dots \times Y_N$ dane wzorem $(f_1, \dots, f_N)(x) := (f_1(x) \dots, f_N(x))$ nazywamy *zestawieniem odwzorowań $f_1, \dots, f_N$*.
- Jeżeli zbiór $f(X)$ jest jednopunktowy, to mówimy, że f jest *odwzorowaniem stałym*.
- Odwzorowanie $X \ni x \overset{\mathrm{id}_X}{\longmapsto} x \in X$ nazywamy *odwzorowaniem identycznościowym*.

  Jeżeli $A \subset X$, to przez $\chi_{A,X} : X \longrightarrow \{0, 1\}$ oznaczamy *funkcję charakterystyczną zbioru A*,
$$\chi_{A,X}(x) := \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in A \\ 0, & \text{gdy } x \in X \setminus A \end{cases}.$$
  Jeżeli zbiór X nie budzi wątpliwości, to będziemy pisać χ_A.
- Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy:

  — *surjekcją*, jeżeli $Y = f(X)$;

  — *injekcją (odwzorowaniem różnowartościowym)*, jeżeli dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z tego, że $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$ (równoważnie: jeżeli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$);

  — *bijekcją*, jeżeli jest równocześnie injekcją i surjekcją.
- Dla bijekcji $f : X \longrightarrow Y$ definiujemy *odwzorowanie odwrotne (funkcję odwrotną)* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ przy pomocy przepisu $f^{-1}(y) = x :\Longleftrightarrow y = f(x)$. Innymi słowy: $f^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}$.
- Ćwiczenie: Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $g : Y \longrightarrow X$ takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_X$ oraz $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
- Ćwiczenie: Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ są injekcjami (odp. surjekcjami, bijekcjami), to $g \circ f$ jest injekcją (odp. surjekcją, bijekcją).
- Ćwiczenie: Jeżeli f i g są bijekcjami, to $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Ćwiczenie: Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest bijekcją, to $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ jest również bijekcją, $(f^{-1})^{-1} = f$ oraz $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$, gdzie zbiór po lewej stronie rozumiemy jako przeciwobraz zbioru B poprzez f, zaś zbiór po prawej — jako obraz zbioru B poprzez f^{-1}.

Definicja 1.4.2. Każde odwzorowanie $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ nazywamy *ciągiem w X*. Zwykle kładziemy $f_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, i piszemy $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ lub $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, np. $(1/n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$. Podciągiem ciągu $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ jest nazywany dowolny ciąg postaci $f \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$, gdzie $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ jest odwzorowaniem takim, że $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots$ (zauważmy, że φ musi być injekcją). Kładąc $n_k := \varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, piszemy wtedy, że $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest podciągiem ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definicja 1.4.3. Każde odwzorowanie $f : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ nazywamy *indeksowaną rodziną zbiorów* (o zbiorze indeksów I). Rodzinę $\mathcal{A} := \{f(i) : i \in I\}$ będziemy zapisywać wtedy jako $(A_i)_{i \in I}$, gdzie $A_i := f(i)$, $i \in I$. Ponadto, $\bigcup\limits_{i \in I} A_i := \bigcup \mathcal{A}$ oraz $\bigcap\limits_{i \in I} A_i := \bigcap \mathcal{A}$.

Oczywiście każda rodzina $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ może być uważana za rodzinę indeksowaną.

Jeżeli $I = \{k, k+1, \dots, N\}$, to piszemy $\bigcup\limits_{j=k}^{N} A_j$. Jeżeli $I = \{k, k+1, \dots\}$, to piszemy $\bigcup\limits_{j=k}^{\infty} A_j$. Podobnie jak dla sumy zbiorów definiujemy $\bigcap\limits_{j=k}^{N} A_j$ i $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty} A_j$.

1.5. Zbiory przeliczalne

Twierdzenie 1.5.1 (Zasada minimum). *Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. Wtedy $\exists_{k_0 \in A}\ \forall_{k \in A} : k_0 \leqslant k$, tzn. $k_0 = \min A$.*

Dowód podamy na końcu § 1.8.

Twierdzenie 1.5.2 (Zasada indukcji matematycznej)**.** *Niech* $A \subset \mathbb{N}_0$. *Jeżeli* $0 \in A$ *oraz*

$$\forall_{k \in \mathbb{N}_0} \ (k \in A \Longrightarrow k+1 \in A),$$

to $A = \mathbb{N}_0$.

Dowód. Przypuśćmy, że $A \subsetneq \mathbb{N}_0$ i niech $k_0 := \min(\mathbb{N} \setminus A)$ (na podstawie zasady minimum). Wobec definicji k_0 musi być $k_0 - 1 \in A$. Stąd, korzystając z założeń, wnioskujemy, że $k_0 \in A$; sprzeczność. $\square$

Definicja 1.5.3. Dwa zbiory X oraz Y nazywamy *równolicznymi*, jeżeli istnieje bijekcja $\varphi : X \longrightarrow Y$. Zbiór A nazywamy *skończonym*, jeżeli $A = \varnothing$ lub A jest równoliczny ze zbiorem $\{1, \dots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ (wtedy mówimy, że A jest *n-elementowy*). Zbiory *nieskończone* to takie, które nie są skończone. Mówimy, że A jest *przeliczalny*, jeżeli A jest równoliczny z $\mathbb{N}$; zapisujemy to jako $\#A = \aleph_0$. Zbiór A nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeżeli jest skończony lub przeliczalny; zapisujemy to jako $\#A \leqslant \aleph_0$. Zbiór A nazywamy *nieprzeliczalnym*, jeżeli nie jest co najwyżej przeliczalny.

Obserwacja 1.5.4. (a) Relacja równoliczności zbiorów jest relacją równoważnościową.
(b) Zbiór jest przeliczalny, jeżeli wszystkie wyrazy tego zbioru można ustawić w ciąg różnowartościowy.
(c) $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ są przeliczalne.

Lemat 1.5.5. (a) *Każdy nieskończony zbiór* $C \subset \mathbb{N}$ *można ustawić w ciąg ściśle rosnący* $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$, *tzn.* $a(n) < a(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.
(b) *Dowolny nieskończony podzbiór* B *zbioru przeliczalnego* A *jest przeliczalny.*
(c) *Jeżeli* A *jest przeliczalny, zaś* $f : A \longrightarrow B$ *jest surjekcją, to* B *jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. (a) Korzystając z zasady minimum definiujemy

$$a(1) := \min C, \qquad a(n) := \min(C \setminus \{a(1), \dots, a(n-1)\}), \quad n \geqslant 2.$$

Trzeba tylko pokazać, że $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$ jest odwzorowaniem surjektywnym. Oczywiście $a(1) < a(2) < \dots$. Przypuśćmy, że $c_0 \in C \setminus a(\mathbb{N}) \subset C \setminus \{a(1), \dots, a(n-1)\}$. Wtedy $n \leqslant a(n) \leqslant c_0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, co daje sprzeczność.

(b) Ponieważ A jest przeliczalny, istnieje bijekcja $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Niech $C := \varphi^{-1}(B)$; jest to zbiór nieskończony oraz $\varphi|_C : C \longrightarrow B$ jest bijekcją. Wiemy, że C można ustawić w ciąg ściśle rosnący $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$. Teraz $\psi := \varphi \circ a$ jest bijekcją $\mathbb{N} \longrightarrow B$.

(c) Możemy założyć, że $A = \mathbb{N}$ oraz, że B jest nieskończony. Zauważmy, że rodzina $\{f^{-1}(b) : b \in B\}$ składa się z niepustych zbiorów parami rozłącznych. Dla $b \in B$ niech $g(b) := \min f^{-1}(b)$ (zasada minimum). Wtedy $g : B \longrightarrow \mathbb{N}$ jest injekcją, a więc B jest przeliczalny. $\square$

Twierdzenie 1.5.6. (a) *Zbiór* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *jest przeliczalny.*
(b) *Zbiór* $\mathbb{Q}$ *jest przeliczalny.*

Dowód. (a) Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ustawiamy w nieskończoną tablicę

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & \longrightarrow & (1,2) & & (1,3) & \longrightarrow & (1,4) & & \dots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \dots \\
(2,1) & \longleftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & \dots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \dots \\
(3,1) & \longrightarrow & (3,2) & \longrightarrow & (3,3) & & (3,4) & & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \dots \\
(4,1) & \longleftarrow & (4,2) & \longleftarrow & (4,3) & \longleftarrow & (4,4) & & \dots \\
\downarrow & & & & & & & & \dots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

i teraz wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ustawimy w ciąg zgodnie ze strzałkami.

(b) Wobec (a) zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. Odwzorowanie $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ni (\ell, m) \longmapsto \frac{\ell}{m} \in \mathbb{Q}$ jest surjekcją. Teraz korzystamy z Lematu 1.5.5(c). $\square$

Twierdzenie 1.5.7. (a) *Załóżmy, że rodzina* $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ *jest taka, że* $I \neq \varnothing$, $\#I \leqslant \aleph_0$ *oraz* $\#A_i \leqslant \aleph_0$, $i \in I$. *Wtedy zbiór* $A := \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ *jest co najwyżej przeliczalny.*

(b) *Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ są co najwyżej przeliczalne, to $X_1 \times \dots \times X_n$ jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. (a) Jeżeli zbiór I jest skończony, to możemy przyjąć $I = \{1, \dots, N\}$. Jeżeli I jest przeliczalny, to możemy przyjąć, że $I = \mathbb{N}$. Dalej, możemy przyjąć, że $A_i \subset \{i\} \times \mathbb{N}$, $i \in I$. W takim razie $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i możemy skorzystać z Twierdzenia 1.5.6(a).

(b) Indukcja względem n. Przypadek $n = 1$ jest oczywisty. Przechodzimy do kroku indukcyjnego $n \rightsquigarrow n + 1$. Wtedy

$$X_1 \times \dots \times X_{n+1} = \bigcup_{x_{n+1} \in X_{n+1}} X_1 \times \dots \times X_n \times \{x_{n+1}\}$$

i możemy zastosować (a) $\square$

Twierdzenie 1.5.8 (Cantor (4)). *Zbiór $\mathcal{X}$ wszystkich ciągów $\mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Oczywiście $\mathcal{X}$ jest nieskończony. Przypuśćmy, że ustawiliśmy go w ciąg $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{X}$. Teraz zdefiniujemy pewien element $x \in \mathcal{X}$:

$$x(n) := 1 - a(n)(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ, $x \notin a(\mathbb{N})$ dostajemy sprzeczność. $\square$

Powyższa metoda dowodu nosi nazwę *metody przekątniowej.*

1.6. Grupy, ciała, ciała uporządkowane

Definicja 1.6.1. *Grupą przemienną (abelową)* nazywamy dowolną parę $(G, \bullet)$, gdzie G jest zbiorem niepustym, zaś $\bullet : G \times G \longrightarrow G$ jest *działaniem* spełniającymi następujące warunki:

(a) $\forall_{a,b,c \in G} : (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (łączność),
(b) $\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} : a \bullet e = e \bullet a = a$ (element neutralny),
(c) $\forall_{a \in G} \exists_{a' \in G} : a \bullet a' = a' \bullet a = e$ (element odwrotny; jeżeli spełnione są warunki (a), (b) i (c), to mówimy, że $(G, \bullet)$ jest *grupą*),
(d) $\forall_{a,b \in G} : a \bullet b = b \bullet a$ (przemienność).

Ciałem nazywamy dowolną trójkę $(F, +, \cdot)$, gdzie F jest niepustym zbiorem, zaś

$$+ : F \times F \longrightarrow F, \quad \cdot : F \times F \longrightarrow F$$

są działaniami spełniającymi następujące warunki:

(a) $(F, +)$ jest grupą przemienną (element neutralny względem $+$ oznaczamy przez 0, zaś element odwrotny przez $-a$),
(b) $(F_*, \cdot)$ jest grupą przemienną (element neutralny względem $\cdot$ oznaczamy przez 1, zaś element odwrotny przez a^{-1}),
(c) $\forall_{a,b,c \in F} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Mówimy, że czwórka $(F, +, \cdot, <)$ jest *ciałem uporządkowanym* jeżeli $(F, +, \cdot)$ jest ciałem, zaś $<$ jest relacją w F taką, że:

(P1) $\forall_{a,b \in F}$: zachodzi dokładnie jedna z możliwości: $a < b$, $a = b$, $b < a$ (spójność),
(P2) $\forall_{a,b,c \in F} : ((a < b,\ b < c) \Longrightarrow a < c)$ (przechodniość),
(P3) $\forall_{a,b,c \in F} : (b < c \Longrightarrow a + b < a + c)$ (zgodność relacji z dodawaniem),
(P4) $\forall_{a,b,c \in F} : (0 < a,\ b < c) \Longrightarrow a \cdot b < a \cdot c$ (zgodność relacji z mnożeniem).

Mówimy, że ciało uporządkowane $(F, +, \cdot, <)$ spełnia *aksjomat ciągłości (aksjomat Dedekinda (5))*, jeżeli niemożliwe jest przedstawienie $F = A \cup B$, gdzie

(C1) $A, B \neq \varnothing$,
(C2) $\forall_{a \in A,\ b \in B} : a < b$,
(C3) $\forall_{a \in A} \exists_{a' \in A} : a < a'$,
(C4) $\forall_{b \in B} \exists_{b' \in B} : b' < b$.

---

(4) Georg Cantor (1845–1918).
(5) Julius Dedekind (1831–1916).

Obserwacja 1.6.2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym, które nie spełnia aksjomatu Dedekinda.
Istotnie, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : (x \leqslant 0) \vee (x > 0,\ x^2 < 2)\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 > 2\}$.

1.7. Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Zakładamy, że znamy ciało uporządkowane $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ wraz ze standardową wartością bezwzględną $|\ | : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$.

Definicja 1.7.1. Mówimy, że ciąg $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ jest *ciągiem Cauchy'ego* (6), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}}\ \exists_{N \in \mathbb{N}}\ \forall_{m,n \geqslant N} : |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Dla ciągów $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ definiujemy

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} :\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}}\ \exists_{N \in \mathbb{N}}\ \forall_{n \geqslant N} : |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon.$$

Niech

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q} : \boldsymbol{a} \text{ jest ciągiem Cauchy'ego}\}.$$

Łatwo widać, że $\sim$ jest relacją równoważności w $\mathcal{C}$. Definiujemy *zbiór liczb rzeczywistych*

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim.$$

Konstrukcja 1.7.2 (Budowa struktury zbioru liczb rzeczywistych)**.** Poniżej $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{c} = (c_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{d} = (d_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$.

(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$. Jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ oraz $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, to $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$.

(b) Istnieje $M \in \mathbb{Q}_+$ takie, że $|a_n| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$.
Istotnie, biorąc w definicji ciągu Cauchy'ego, $\varepsilon = 1$ wnioskujemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a_N| \leqslant 1$ dla $n \geqslant N$. W takim razie wystarczy wziąć $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$.

(c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := (a_n b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$.
Istotnie, niech $M \in \mathbb{Q}_+$ będzie takie, że $|a_n|, |b_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - a_m b_m| \leqslant M(|a_n - a_m| + |b_n - b_m|)$.

(d) Jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ oraz $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, to $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d}$.
Istotnie, niech $M \in \mathbb{Q}_+$ będzie takie, że $|b_n|,\ |c_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - c_n d_n| \leqslant M(|a_n - c_n| + |b_n - d_n|)$.

(e) Powyższe własności pozwalają zdefiniować w $\mathcal{C}/\sim$ działania dodawania i mnożenia:
$[\boldsymbol{a}]_\sim + [\boldsymbol{b}]_\sim := [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]_\sim$,
$[\boldsymbol{a}]_\sim \cdot [\boldsymbol{b}]_\sim := [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}]_\sim$.
Jest oczywiste, że działania te są łączne i przemienne. Ponadto, mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

(f) Dla $r \in \mathbb{Q}$ przez $\boldsymbol{r}$ rozumiemy ciąg stały $r_n := r$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}$. Teraz definiujemy $\tau : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tau(r) = [\boldsymbol{r}]_\sim$, $r \in \mathbb{Q}$. Zauważmy, że τ jest injektywne oraz $\tau(r_1 + r_2) = \tau(r_1) + \tau(r_2)$, $\tau(r_1 \cdot r_2) = \tau(r_1) \cdot \tau(r_2)$, czyli τ jest *zgodne z działaniami*.

(g) Elementy $\tau(0) = [\boldsymbol{0}]_\sim$ oraz $\tau(1) = [\boldsymbol{1}]_\sim$ są neutralne odp. względem dodawania i mnożenia. Łatwo też widać, że element $[-\boldsymbol{a}]_\sim$ jest odwrotny do $[\boldsymbol{a}]_\sim$ względem dodawania, gdzie $-\boldsymbol{a} := (-a_n)_{n=1}^{\infty}$. Krótko: $-[\boldsymbol{a}]_\sim = [-\boldsymbol{a}]_\sim$.

(h) $\boldsymbol{a} \not\sim \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \exists_{\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}_{>0},\ N \in \mathbb{N}} : (\forall_{n \geqslant N} : a_n \geqslant b_n + \varepsilon_0) \vee (\forall_{n \geqslant N} : b_n \geqslant a_n + \varepsilon_0)$.
Istotnie, implikacja „$\Longleftarrow$" jest oczywista. Dla dowodu implikacji „$\Longrightarrow$" wprost z definicji relacji $\sim$ wnioskujemy, że istnieje $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ oraz ciąg liczb $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ takie, że $n_1 < n_2 < \dots$ i $|a_{n_k} - b_{n_k}| > \varepsilon$. Niech $I_+ := \{k \in \mathbb{N} : a_{n_k} - b_{n_k} > \varepsilon\}$, $I_- := \{k \in \mathbb{N} : b_{n_k} - a_{n_k} > \varepsilon\}$. Co najmniej jeden z tych zbiorów musi być nieskończony. Przyjmijmy, że I_+. Zastępując ciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ stosownym podciągiem, możemy założyć, że $I_+ = \mathbb{N}$. Wobec definicji ciągu Cauchy'ego istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon/3$ i $|b_n - b_m| \leqslant \varepsilon/3$ dla $n, m \geqslant N$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $n_k \geqslant N$. Wtedy dla $n \geqslant N$ mamy

$$a_n - b_n \geqslant a_{n_k} - b_{n_k} - |a_n - a_{n_k}| - |b_n - b_{n_k}| > \varepsilon/3 =: \varepsilon_0.$$

---

(6) Augustin Cauchy (1789–1857).

(i) Niech $\boldsymbol{a} \not\sim \boldsymbol{0}$ i niech $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}_{>0}$ oraz $N \in \mathbb{N}$ będą takie, że $|a_n| \geqslant \varepsilon_0$ dla $n \geqslant N$. Zdefiniujmy $\boldsymbol{a}^* = (c_n)_{n=1}^\infty$, $c_n := 0$ dla $1 \leqslant n \leqslant N-1$ i $c_n := 1/a_n$ dla $n \geqslant N$. Wtedy $\boldsymbol{a}^* \in \mathcal{C}$ oraz $[\boldsymbol{a}]_\sim \cdot [\boldsymbol{a}^*]_\sim = [\boldsymbol{1}]_\sim$, czyli, że $[\boldsymbol{a}^*]_\sim = [\boldsymbol{a}]_\sim^{-1}$.

Istotnie, dla $m, n \geqslant N$ mamy $|1/a_n - 1/a_m| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^2}|a_n - a_m|$.

(j) Wykazaliśmy, że $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest ciałem.

(k) Wprowadzamy porządek: $[\boldsymbol{a}]_\sim < [\boldsymbol{b}]_\sim :\Longleftrightarrow \exists_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0},\, N \in \mathbb{N}} : \forall_{n \geqslant N} : a_n + \varepsilon \leqslant b_n$.

Jest to relacja poprawnie określona, spójna, przechodnia i zgodna z działaniami.

Istotnie, jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, oraz $a_n + \varepsilon \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N$, to dobieramy $N_1 \geqslant N$ takie, że $|a_n - c_n| \leqslant \varepsilon/3$, $|b_n - d_n| \leqslant \varepsilon/3$ dla $n \geqslant N_1$. Wtedy, dla $n \geqslant N_1$ mamy $c_n + \varepsilon/3 \leqslant a_n + 2\varepsilon/3 \leqslant b_n - \varepsilon/3 \leqslant d_n$.

(P1) wynika natychmiast z (h).

(P2): Jeżeli $a_n + \varepsilon_1 \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N_1$ i $b_n + \varepsilon_1 \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N_2$, to biorąc $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dla $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, mamy $a_n + 2\varepsilon \leqslant b_n + \varepsilon \leqslant c_n$.

(P3): Jeżeli $b_n + \varepsilon \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N$, to $a_n + b_n + \varepsilon \leqslant a_n + c_n$ dla $n \geqslant N$.

(P4): Jeżeli $0 + \varepsilon_1 \leqslant a_n$ dla $n \geqslant N_1$ oraz $b_n + \varepsilon_2 \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N_2$, to dla $\varepsilon := \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ i $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ mamy $a_n \cdot b_n + \varepsilon \leqslant a_n(b_n + \varepsilon_2) \leqslant a_n \cdot c_n$ dla $n \geqslant N$.

(l) $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym.

(m) Dla $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mamy $r_1 < r_2 \Longleftrightarrow \tau(r_1) < \tau(r_2)$, co oznacza, że τ jest zgodnie z relacjami $<$.

(n) Utożsamiamy $\mathbb{Q}$ z $\tau(\mathbb{Q})$. W szczególności, piszemy 0, 1 zamiast $\tau(0)$, $\tau(1)$.

(o) W $\mathbb{R}$ wprowadzamy relacje $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ oraz *wartość bezwzględną* $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$a \leqslant b :\Longleftrightarrow (a = b) \vee (a < b)$,

$a > b :\Longleftrightarrow b < a$,

$a \geqslant b :\Longleftrightarrow (a = b) \vee (a > b)$,

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{jeżeli } a > 0 \\ 0, & \text{jeżeli } a = 0, \\ -a, & \text{jeżeli } a < 0 \end{cases}$$

(p) Oczywiście powyższa wartość bezwzględna zgadza się na $\mathbb{Q}$ z wyjściową wartością bezwzględną dla liczb wymiernych ($|\tau(r)| = |r|$ dla $r \in \mathbb{Q}$). Łatwo można sprawdzić (ĆWICZENIE), że dla $a, b \in \mathbb{R}$ mamy $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

(q) Wprowadzamy *przedziały*:

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ dla $a \leqslant b$,

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$, $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ dla $a < b$,

$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$, $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ dla $a \in \mathbb{R}$,

$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$, $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ dla $b \in \mathbb{R}$,

$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$, $\varnothing$,

$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_{>0} := (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_{<0} := (-\infty, 0)$.

(r) Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, to istnieje $r \in \mathbb{Q}$ takie, że $r \in (a, b)$ (gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$).

Niech $a_n + \varepsilon \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N_1$. Dobieramy N_2 takie, że $|a_n - a_m|$, $|b_n - b_m| \leqslant \varepsilon/4$ dla $n, m \geqslant N_2$. Niech $N = \max\{N_1, N_2\}$, $r := a_N + \varepsilon/2$. Dla $n \geqslant N$ mamy $a_n + \varepsilon/4 \leqslant a_N + \varepsilon/2 = r < r + \varepsilon/4 = (a_N + \varepsilon/2) + \varepsilon/4 \leqslant b_N - \varepsilon/4 \leqslant b_n$.

(s) Spełniony jest aksjomat Dedekinda.

Istotnie, przypuśćmy, że $\mathbb{R} = A \cup B$ is spełnione są (C1) – (C4). Korzystając z tych warunków oraz (r), wnioskujemy, że istnieją liczby $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}$, $r_1 < s_1$, takie, że $r_1 \in A$, $s_1 \in B$. Rozważmy, punkt $q := \frac{1}{2}(r_1 + s_1)$. Leży on albo w A albo w B. Jeżeli w A to definiujemy $r_2 = q$, $s_2 := s_1$. Jeżeli leży w B, to kładziemy $r_2 = r_1$, $s_2 := q$. Powtarzamy procedurę. Dostajemy ciągi $\boldsymbol{r} = (r_n)_{n=1}^\infty$, $\boldsymbol{s} = (s_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ takie, że $r_n \in A$, $s_n \in B$, $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n < s_n \leqslant s_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant s_1$ i $s_n - r_n = \frac{1}{2^{n-1}}(s_1 - r_1)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n, m \geqslant N$ mamy $|r_n - r_m| \leqslant s_N - r_N$. Wynika stąd natychmiast, że $\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}$. Podobnie $\boldsymbol{s} \in \mathcal{C}$. Oczywiście, $\boldsymbol{r} \sim \boldsymbol{s}$, a więc $[\boldsymbol{r}]_\sim = [\boldsymbol{s}]_\sim =: c$. Przypuśćmy, że $c \in A$. Niech $c' \in A$ będzie takie, że $c < c'$. Wobec (r), musi istnieć $t \in \mathbb{Q}$ takie, $c < t < c'$. Oznacza to w szczególności, że istnieją $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ i $N \in \mathbb{N}$ takie, że $r_n + \varepsilon \leqslant t < s_n$ dla $n \geqslant N$, co daje sprzeczność. Przypadek, gdy $c \in B$ jest analogiczny (ĆWICZENIE).

(t) $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda.

Można pokazać, że $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest jedynym ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda takim, że istnieje odwzorowanie injektywne $\tau : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, które jest zgodne z działaniami i relacjami. Dokładniej, jeżeli $(\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot}, \widetilde{<})$ jest ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda takim, że istnieje odwzorowanie injektywne $\widetilde{\tau} : \mathbb{Q} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$, które jest zgodne z działaniami i relacjami ($<$, $\widetilde{<}$), to istnieje bijekcja $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ zgodna z działaniami i relacjami ($\widetilde{<}$ i $<$) taka, że $\varphi \circ \widetilde{\tau} = \tau$.

1.8. Kresy

Definicja 1.8.1. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że A jest *ograniczony od góry*, jeżeli istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że $x \leqslant M$ dla dowolnego $x \in A$. Każdą taką liczbę M nazywamy *ograniczeniem górnym (majorantą) zbioru* A. Zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru A oznaczamy $\operatorname{Maj} A$.

Mówimy, że A jest *ograniczony od dołu*, jeżeli istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, że $m \leqslant x$ dla dowolnego $x \in A$. Każdą taką liczbę m nazywamy *ograniczeniem dolnym (minorantą) zbioru* A. Zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A oznaczamy $\operatorname{Min} A$.

Mówimy, że A jest *ograniczony*, jeżeli jest jednocześnie ograniczony od dołu i od góry.

Mówimy, że element $a^* \in A$ jest *maksimum* zbioru A, jeżeli $x \leqslant a^*$ dla dowolnego $x \in A$. Piszemy $a^* = \max A$.

Mówimy, że element $a_* \in A$ jest *minimum* zbioru A, jeżeli $a_* \leqslant x$ dla dowolnego $x \in A$. Piszemy $a_* = \min A$.

Jeżeli zbiór $\operatorname{Maj} A \neq \varnothing$ ma element minimalny, to nazywamy go *supremum (kresem górnym)* zbioru A i oznaczamy $\sup A$. To znaczy, że $\sup A := \min(\operatorname{Maj} A)$.

Jeżeli zbiór $\operatorname{Min} A \neq \varnothing$ ma element maksymalny, to nazywamy go *infimum (kresem dolnym)* zbioru A i oznaczamy $\inf A$. To znaczy, że $\inf A := \max(\operatorname{Min} A)$.

Obserwacja 1.8.2. (a) Jeżeli $a \in \operatorname{Maj} A$ i $b > a$, to $b \in \operatorname{Maj} A$. Jeżeli $a \in \operatorname{Min} A$ i $b < a$, to $b \in \operatorname{Min} A$.
(b) $\operatorname{Maj} \mathbb{R} = \operatorname{Min} \mathbb{R} = \varnothing$.
(c) $\varnothing$ jest ograniczony, ale nie ma kresów.
(d) $\sup A$ i $\inf A$ są wyznaczone jednoznacznie.
(e) Jeżeli $\max A$ (odp. $\min A$) istnieje, to $\max A = \sup A$ (odp. $\min A = \inf A$).
(f) Każdy niepusty zbiór skończony $A \subset \mathbb{R}$ ma maksimum i minimum.
(g) $\max A = -\min(-A)$, $\sup A = -\inf(-A)$, gdzie $-A := \{-x : x \in A\}$. Jeżeli A jest ograniczony od góry (odp. od dołu), to $-A$ jest ograniczony od dołu (odp. od góry).
(h) $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony od góry (odp. od dołu) i $a_0 \in \mathbb{R}$, to następujące warunki są równoważne:
- $a_0 = \sup A$ (odp. $a_0 = \inf A$);
- $a_0 \in \operatorname{Maj} A$ oraz $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a \in A} :\ a > a_0 - \varepsilon$ (odp. $a_0 \in \operatorname{Min} A$ oraz $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a \in A} :\ a < a_0 + \varepsilon$).

Twierdzenie 1.8.3. *Każdy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony od góry (odp. od dołu) ma supremum (odp. infimum).*

Dowód. Załóżmy, że $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry. Niech $P := \mathbb{R} \setminus \operatorname{Maj} A$, $Q := \operatorname{Maj} A$. Wtedy:

$P \cup Q = \mathbb{R}$.

P, $Q \neq \varnothing$. Istotnie, $P \neq \varnothing$ bo $A \neq \varnothing$, zaś $Q \neq \varnothing$ bo A jest ograniczony z góry.

Jeżeli $a \in P$, $b \in Q$, to $a < b$. Istotnie, gdyby $a \geqslant b$, to wtedy $a \in Q$.

Jeżeli $a \in P$, to istnieje $b \in A$ takie, że $a < b$. Istotnie, gdyby $b \leqslant a$ dla dowolnego $b \in A$, to $a \in Q$. Biorąc $a < a' < b$ dostajemy $a' \in P$ takie, że $a < a'$. Istotnie, gdyby $a' \in Q$, to $a' \geqslant b$.

Z zasady ciągłości wynika, że istnieje $b_0 \in Q$ takie, że $b_0 \leqslant b$ dla dowolnego $b \in Q$, czyli $b_0 = \sup A$.

Przypadek infimum przebiega analogicznie (Ćwiczenie). □

Obserwacja 1.8.4. Zbiór $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in I$, $x < y$, mamy $[x, y] \subset I$.

Oczywiście każdy przedział ma wyżej wymienioną własność. Załóżmy teraz, że $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$ ma tę własność.

- Jeżeli I jest ograniczony, to definiujemy $a := \inf I$, $b := \sup I$. Gdy $a = b$, to $I = \{a\} = [a, a]$. Jeżeli $a < b$, to, w zależności od tego, czy a i/lub b należą do I, mamy $I \in \{[a, b],\ (a, b],\ [a, b),\ (a, b)\}$.
- Jeżeli I jest ograniczony od góry, ale nie jest ograniczony od dołu, to definiujemy $b := \sup I$. Wtedy $I \in \{(-\infty, b],\ (-\infty, b)\}$.

- Jeżeli I jest ograniczony od dołu, ale nie jest ograniczony od góry, to definiujemy $a := \inf I$. Wtedy $I \in \{[a, +\infty),\ (a, +\infty)\}$.
- Jeżeli I nie jest ograniczony ani od góry ani od dołu, to $I = \mathbb{R}$.

Dowód zasady minimum. Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. Wtedy A, jako podzbiór $\mathbb{R}$, jest ograniczony z dołu, a więc ma infimum k_0. Gdyby $k_0 \notin A$, to korzystając z Obserwacji 1.8.2(h), dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mielibyśmy $(k_0, k_0 + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, co daje sprzeczność. $\square$

1.9. Nieprzeliczalność $\mathbb{R}$

Twierdzenie 1.9.1 (Twierdzenie Cantora)**.** *Niech $I_n := [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, $I_{n+1} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$.*

Dowód. Dla dowolnych m, n mamy $a_n \leqslant b_m$. Niech $A := \{a_1, a_2, \dots\}$. Jest to zbiór ograniczony z góry. Niech $a := \sup A$. Wtedy $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ dla dowolnego n. Stąd $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. $\square$

Ćwiczenie 1.9.2. Jeżeli w twierdzeniu Cantora $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} :\ b_N - a_N \leqslant \varepsilon$, to $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ musi być jednopunktowy.

Twierdzenie 1.9.3. *Dowolny przedział $I \subset \mathbb{R}$ taki, że $\#I \geqslant 2$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.*

Dowód. Przypuśćmy, że $I = \{c_1, c_2, \dots\}$. Ustalmy $a, b \in I$, $a < b$. Jeżeli $c_1 \notin I_0 := [a, b]$, to kładziemy $I_1 := I_0$. Jeżeli $c_1 \in I_0$, to dobieramy mniejszy przedział $I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0$ taki, że $a_1 < b_1$ i $c_1 \notin I_1$. Jeżeli $c_2 \notin I_1$, to kładziemy $I_2 := I_1$. Jeżeli $c_2 \in I_1$, to dobieramy mniejszy przedział $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ taki, że $a_2 < b_2$ i $c_2 \notin I_2$. Powtarzamy rozumowanie. Dostajemy zstępujący ciąg przedziałów $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$ taki, że $c_1, \dots, c_n \notin I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$ — sprzeczność. $\square$

1.10. Funkcje monotoniczne i okresowe

Definicja 1.10.1. Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ i $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *rosnąca* (odp. *silnie rosnąca*), jeżeli dla dowolnych $x, y \in A$ stąd, że $x < y$ wynika, że $f(x) \leqslant f(y)$ (odp. $f(x) < f(y)$).

Mówimy, że f jest *malejąca* (odp. *silnie malejąca*), jeżeli dla dowolnych $x, y \in A$ stąd, że $x < y$ wynika, że $f(x) \geqslant f(y)$ (odp. $f(x) > f(y)$).

Funkcje rosnące lub malejące nazywamy *monotonicznymi*. Funkcje silnie rosnące lub silnie malejące nazywamy *silnie monotonicznymi*.

Oczywiście, powyższe definicje dotyczą też ciągów $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja f jest *okresowa* jeżeli istnieje liczba $\omega > 0$ (zwana *okresem*) taka, że:

- $\forall_{x\in A} : x + \omega,\ x - \omega \in A$,
- $\forall_{x\in A} : f(x + \omega) = f(x)$.

Jeżeli istnieje okres minimalny, to nazywamy go *okresem zasadniczym (podstawowym)*.

Widać, że f jest rosnąca (odp. silnie rosnąca) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $-f$ jest malejąca (odp. silnie malejąca).

Przykład 1.10.2. Funkcja $f := \chi_{\mathbb{Q},\mathbb{R}}$ jest okresowa (dowolna liczba $\omega \in \mathbb{Q}_{>0}$ jest jej okresem), ale f nie posiada okresu zasadniczego.

1.11. Uzupełniony (rozszerzony) zbiór liczb rzeczywistych

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, gdzie $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$ i $-\infty \neq +\infty$. Dodawanie i mnożenie rozszerzamy na $\overline{\mathbb{R}}$ tylko częściowo:

$$a, b \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow a + b =$$

$b \backslash a$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$$a, b \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow a \cdot b =$$

$b \backslash a$	$-\infty$	$\mathbb{R}_{<0}$	0	$\mathbb{R}_{>0}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}_{<0}$	$+\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$\mathbb{R}_{>0}$	$-\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Dalej rozszerzamy relację $<$ na $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$:
$x < y :\Longleftrightarrow (x, y \in \mathbb{R},\ x < y) \vee (x = -\infty, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}) \vee (x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ y = +\infty)$.

Dostajemy relację spójną i przechodnią (Ćwiczenie). Możemy więc rozszerzyć na $\overline{\mathbb{R}}$ relacje $\leqslant, >$ i $\geqslant$. Dla dowolnych $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, definiujemy przedziały $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b). Ponadto, definiujemy $|\pm\infty| := +\infty$.

Pojęcia $\operatorname{Maj} A$, $\operatorname{Min} A$, $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$ przenosimy na $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ponieważ $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ dla dowolnego $x \in \overline{\mathbb{R}}$, zatem wszystkie zbiory $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ są ograniczone. Ponadto, jeżeli $A \neq \varnothing$, to $\sup A$ i $\inf A$ istnieją. Istotnie:

jeżeli zbiór $A \cap \mathbb{R}$ jest niepusty i ograniczony od góry, to przyjmujemy $\sup A := \sup(A \cap \mathbb{R})$ (po prawej stronie bierzemy supremum w „starym" sensie);

jeżeli zbiór $A \cap \mathbb{R}$ jest niepusty i nieograniczony od góry, to przyjmujemy $\sup A := +\infty$;

jeżeli $+\infty \in A$, to $\sup A := +\infty$;

jeżeli $A = \{-\infty\}$, to $\sup A := -\infty$.

Podobnie dla infimum (Ćwiczenie). Odnotujmy, że $\sup \varnothing := -\infty$, $\inf \varnothing := +\infty$.

Ćwiczenie 1.11.1. Odwzorowanie $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}$$

jest ściśle rosnącą bijekcją.

1.12. Liczby zespolone

W zbiorze $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzamy działania:
- dodawanie: $(x, y) = (u, v) := (x + u, y + v)$,
- mnożenie: $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$.

Ćwiczenie 1.12.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem, przy czym:
- $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dla dodawania.
- $-(x, y) = (-x, -y)$.
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym dla mnożenia.
- $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ jest injekcją zgodną z działaniami, co pozwala utożsamiać $\mathbb{R}$ z podzbiorem $\mathbb{C}$. W konsekwencji $x = (x, 0)$ dla $x \in \mathbb{R}$, np. $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$.
- Niech $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$; i nazywamy *jednostką urojoną*. Wtedy $i^2 = -1$ oraz $(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$.

Jeżeli $z = x + iy$ to:
$x =: \operatorname{Re} z$ nazywamy *częścią rzeczywistą* z,
$y =: \operatorname{Im} z$ — *częścią urojoną* z,
$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ — *modułem (wartością bezwzględną)* z,
$\overline{z} := x - iy$ — *liczbą sprzężoną* z z.

Ćwiczenie 1.12.2. Niech $w, z = x + iy \in \mathbb{C}$. Wtedy:
(a) $\overline{\overline{z}} = z$,
(b) $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z = x \in \mathbb{R}$,
(c) $x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
(d) $|\overline{z}| = |z|$,

(e) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,
(f) operator sprzężenia $\mathbb{C} \ni z \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ jest zgodny z działaniami, tzn. $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ oraz $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$; ponadto, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ dla $z \neq 0$.
(g) $|wz| = |w||z|$,
(h) $\max\{|x|, |y|\} \leqslant |z| \leqslant \sqrt{2}\max\{|x|, |y|\}$, $|z| \leqslant |x| + |y|$,
(i) (*nierówność trójkąta*) $||w| - |z|| \leqslant |w + z| \leqslant |w| + |z|$,
(j) Funkcja $\varrho(z, w) := |z - w|$ jest odległością Euklidesową na $\mathbb{C}$.
(k) Zbiór $K(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ jest kołem otwartym o środku w punkcie a i promieniu r.
(l) Zbiór $\overline{K}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$ jest kołem domkniętym o środku w punkcie a i promieniu r.

Twierdzenie 1.12.3 (Nierówność Schwarza (7)). *Dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ mamy*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b}_j\Big|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $(a_1, \dots, a_n)$ oraz $(b_1, \dots, b_n)$ są $\mathbb{C}$-liniowo zależne.

Dowód. Niech $A := \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$, $B := \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$, $C := \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b}_j$. Jeżeli $AB = 0$, to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $AB > 0$. Mamy:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |Ba_j - Cb_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a}_j - \overline{C}\overline{b}_j) = \\
&= B^2 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 - B\overline{C} \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b}_j - CB \sum_{j=1}^{n} b_j \overline{a}_j + |C|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 = \\
&= B^2 A - BC\overline{C} - CB\overline{C} + |C|^2 B = B^2 A - B|C|^2 = B(BA - |C|^2).
\end{aligned}$$

Wynika stąd natychmiast, że $|C|^2 \leqslant AB$ oraz, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $Ba_j = Cb_j$, $j = 1, \dots, n$. □

(7) Hermann Schwarz (1789–1857).

ROZDZIAŁ 2

Ciągi liczbowe

2.1. Ciągi liczbowe

W tym rozdziale będziemy rozważać tylko ciągi liczbowe $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. W przypadku, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mówimy o *ciągach zespolonych*, zaś w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — o *ciągach rzeczywistych*.

Obserwacja 2.1.1. W praktyce ciąg możemy zadać na następujące sposoby:

- *Wzorem ogólnym*, np. $a_n := 1/n$ lub $a_n := n$.
- *Wzorem rekurencyjnym*, np.

  $a_1 = a$, $a_{n+1} := a_n + r$, $n \in \mathbb{N}$ (ciąg arytmetyczny), lub
  $a_1 = a$, $a_{n+1} := a_n q$, $n \in \mathbb{N}$ (ciąg geometryczny), lub
  $a_1 := 0$, $a_2 := 1$, $a_{n+1} := a_{n-1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}_2$ (ciąg Fibonacciego (1), $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$).

  Oczywiście, bardzo często ciąg dany wzorem rekurencyjnym może być również zadany wzorem ogólnym (np. $a_n := a + (n-1)r$, czy $a_n := aq^{n-1}$), choć wzór rekurencyjny jest na ogół prostszy.

  Ćwiczenie. Znaleźć wzór ogólny dla ciągu Fibonacciego.
- Poprzez opis, np. $a_n := n$-ta liczba pierwsza.

Definicja 2.1.2. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ jest *zbieżny* do liczby $a \in \mathbb{C}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : |a_n - a| \leqslant \varepsilon. \quad (2) \tag{*}$$

Piszemy wtedy $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ lub $a_n \longrightarrow a$, a liczbę a nazywamy *granicą ciągu*.

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geqslant N} : |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Obserwacja 2.1.3. Jest rzeczą widoczną, iż skończona liczba początkowych wyrazów ciągu nie ma wpływu na jego zbieżność (i na granicę) oraz na to, czy ciąg jest Cauchy'ego. Mówimy, że własność W zachodzi *dla prawie wszystkich wyrazów ciągu* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że a_n ma własność W dla $n \geqslant N$. Z tego też powodu poniżej, gdy zakładamy, że jakaś własność zachodzi dla wszystkich wyrazów ciągu, możemy założyć, że zachodzi dla prawie wszystkich wyrazów.

Obserwacja 2.1.4 (Ćwiczenie)**.** (a) Ciąg może być zbieżny tylko do jednej granicy.
(b) Jeżeli $a_n = c = \text{const}$, $n \in \mathbb{N}$, to $a_n \longrightarrow c$.
(c) $1/n \longrightarrow 0$.
(d) Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.
  Istotnie, $|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a|$.
(e) Każdy ciąg Cauchy'ego jest *ograniczony*, tzn. istnieje $C > 0$ takie, że $|a_n| \leqslant C$ dla $n \in \mathbb{N}$.
  Istotnie, jeżeli $|a_n - a_m| \leqslant 1$ dla $n, m \geqslant N$, to $|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.
(f) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $|a_n| \longrightarrow |a|$.
  Istotnie, $\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|$.
(g) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$ oraz $|a_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$, to $|a| \leqslant C$.
  Istotnie, $|a| \leqslant |a_n| + |a_n - a| \leqslant C + |a_n - a|$.

---

(1) Leonardo Fibonacci (1175–1250).

(2) Innymi słowy: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : a_n \in \overline{K}(a, \varepsilon)$. Zauważmy, że warunek (*) jest równoważny warunkowi $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : |a_n - a| < \varepsilon$.

(h) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $\alpha a_n \longrightarrow \alpha a$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$.
Istotnie, $|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha||a_n - a|$.

(i) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow a$, to $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.
Istotnie, $|a_n + b_n - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$.

(j) Dla $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ mamy: $a_n + ib_n \longrightarrow a + ib \Longleftrightarrow a_n \longrightarrow a,\ b_n \longrightarrow b$.
Podobnie, ciąg $(a_n + ib_n)_{n=1}^\infty$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) jest ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_n)_{n=1}^\infty$ i $(b_n)_{n=1}^\infty$ są ciągami Cauchy'ego.
Istotnie, $|a_n + ib_n - (a+ib)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$ oraz $\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} \leqslant |a_n + ib_n - (a + ib)|$.

(k) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow a$, to $a_n b_n \longrightarrow ab$.
Istotnie, wiemy, że ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty$ i $(b_n)_{n=1}^\infty$ są ograniczone. Niech $|a_n|, |b_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leqslant C(|a_n - a| + |b_n - b|)$.

(l) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$ i $a \neq 0$, to $1/a_n \longrightarrow 1/a$.
Istotnie, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n| \geqslant |a|/2$, $n \geqslant N$. Wtedy dla $n \geqslant N$ mamy $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n a|} \leqslant \frac{4}{|a|^2}|a_n - a|$.

(m) Dla $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ i $a < b$, to $a_n < b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(n) Dla $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ i $a_n \leqslant b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $a \leqslant b$.

(o) (Twierdzenie o trzech ciągach) Jeżeli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_n \longrightarrow g$ i $c_n \longrightarrow g$, to $b_n \longrightarrow g$.

(p) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ jest rosnący i ograniczony od góry, to jest zbieżny i $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$.

(q) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ jest malejący i ograniczony od dołu, to jest zbieżny i $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \inf\{a_1, a_2, \dots\}$.

(r) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $a_{n_k} \longrightarrow a$ dla dowolnego podciągu $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$.
Istotnie, jeżeli $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$, to $|a_{n_k} - a| \leqslant \varepsilon$ dla $k \geqslant N$ (ponieważ $n_k \geqslant k$).

(s) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ jest monotoniczny, to następujące warunki są równoważne:
   (i) ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny;
   (ii) ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest ograniczony;
   (iii) istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ zbieżny;
   (iv) istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ ograniczony.

(t) Podciąg ciągu Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego.

(u) Jeżeli $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego oraz $a_{n_k} \longrightarrow a$, to $a_n \longrightarrow a$.
Istotnie, jeżeli $|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon/2$ dla $n \geqslant N$ i $|a_{n_k} - a| \leqslant \varepsilon/2$ dla $k \geqslant N$, to $|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - a| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$.

(v) Jeżeli $\mathbb{N} = A \cup B$, gdzie $A \cap B = \varnothing$, $A = \{n_1, n_2, \dots\}$, $n_1 < n_2 < \dots$, $B = \{m_1, m_2, \dots\}$, $m_1 < m_2 < \dots$, oraz $a_{n_k} \longrightarrow a$ i $a_{m_k} \longrightarrow a$, to $a_n \longrightarrow a$.

Obserwacja 2.1.5 (Ćwiczenie)**.** Rozważmy *ciąg geometryczny* $(q^n)_{n=1}^\infty$, gdzie $q \in \mathbb{C}$. Wtedy:

- dla $|q| < 1$ ciąg jest zbieżny do 0,
- dla $|q| > 1$ ciąg jest rozbieżny,
- dla $q = 1$ ciąg jest zbieżny do 1,
- dla $q = -1$ ciąg jest rozbieżny.

Twierdzenie 2.1.6 (Twierdzenie Bolzano (3)–Weierstrassa (4))**.** *Z dowolnego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.*

W szczególności, każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Dowód. Wystarczy rozważyć *ciąg rzeczywisty* $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. Istotnie, załóżmy, że to wiemy i niech $(a_n + ib_n)_{n=1}^\infty$ będzie zespolonym ciągiem Cauchy'ego. Wiemy, że $(a_n)_{n=1}^\infty$ i $(b_n)_{n=1}^\infty$ są rzeczywistymi ciągami Cauchy'ego. W takim razie $a_{n_k} \longrightarrow a$ dla pewnego podciągu $(n_k)_{k=1}^\infty$. Ciąg $(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ jest również ciągiem Cauchy'ego. W takim razie istnieje jego podciąg $(b_{n_{k_\ell}})_{\ell=1}^\infty$ zbieżny do pewnego b. Oczywiście, $a_{n_{k_\ell}} \longrightarrow a$. Ostatecznie, $a_{n_{k_\ell}} + ib_{n_{k_\ell}} \longrightarrow a + ib$.

---

(3) Bernhard Bolzano (1781–1848).
(4) Karl Weierstrass (1815–1897).

Wracamy do ciągu rzeczywistego. Możemy założyć, że $-c \leqslant a_n \leqslant c$, $n \in \mathbb{N}$, dla pewnego $c > 0$. Niech $I_1 = [p_1, q_1] := [-c, c]$, $n_1 := 1$. Któryś z przedziałów $[-c, 0]$ lub $[0, +c]$ musi zawierać nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczamy go przez $I_2 = [p_2, q_2]$ i wybieramy $n_2 > 1$ takie, że $a_{n_2} \in I_2$. Teraz dzielimy I_2 na pół i powtarzamy rozumowanie. Dostajemy zstępujący ciąg przedziałów $I_k = [p_k, q_k]$, $k \in \mathbb{N}$, i podciąg $p_k \leqslant a_{n_k} \leqslant q_k$, $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że ciąg $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ jest rosnący i ograniczony, zaś ciąg $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ jest malejący i ograniczony. Wiemy, że $p_k \longrightarrow p$, $q_k \longrightarrow q$ oraz $q_k - p_k = \frac{c}{2^{k-2}}$. Stąd $p = q$. Teraz z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że $a_{n_k} \longrightarrow p$. □

Definicja 2.1.7. Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest *zbieżny do* $+\infty$ (odp. $-\infty$), jeżeli

$$\forall_{M \in \mathbb{R}}\ \exists_{N \in \mathbb{N}}\ \forall_{n \geqslant N} : a_n \geqslant M \text{ (odp. } a_n \leqslant M);$$

piszemy wtedy $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ (odp. $-\infty$), lub $a_n \longrightarrow +\infty$ (odp. $-\infty$).

Obserwacja 2.1.8. Korzystając z Obserwacji 1.8.2(h) dostajemy następujący ważny wynik.

Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry (odp. z dołu). Wtedy istnieje ciąg rosnący (odp. malejący) $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ taki, że $a_n \longrightarrow \sup A$ (odp. $a_n \longrightarrow \inf A$).

Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $a_n \longrightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_n \longrightarrow b \in \overline{\mathbb{R}}$. Pojawiają się naturalne pytania, czy i do czego są zbieżne ciągi $a_n + b_n$, $a_n b_n$, a_n/b_n.

Obserwacja 2.1.9. (a) Jeżeli $a + b$ ma sens, to $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

Istotnie, przypadek $a, b \in \mathbb{R}$ jest nam już znany. Przyjmijmy, że np. $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$. Wtedy $a + b = +\infty$. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ musi być ograniczony, $|a_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $b_n \geqslant 2M$ dla $n \geqslant N$ i dla pewnego $M \geqslant C$, to $a_n + b_n \geqslant 2M - C \geqslant M$, $n \geqslant N$, a wiec $a_n + b_n \longrightarrow +\infty$.

Podobnie postępujemy w przypadkach ($a = +\infty$, $b \in \mathbb{R}$), ($a \in \mathbb{R}$, $b = -\infty$), ($a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$) — Ćwiczenie.

Jeżeli $a = \pm\infty$, $b = \mp\infty$ dostajemy *symbol nieoznaczony* $\infty - \infty$. Nieoznaczoność tego symbolu rozumiemy w ten sposób, że:

— dla dowolnego $g \in \overline{\mathbb{R}}$ istnieją ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ takie, że $a_n \longrightarrow +\infty$, $b_n \longrightarrow -\infty$ i $a_n + b_n \longrightarrow g$,

— istnieją ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ takie, że $a_n \longrightarrow +\infty$, $b_n \longrightarrow -\infty$ i ciąg $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny (ani do granicy skończonej, ani nieskończonej).

Ćwiczenie: Zilustrować powyższe przypadki konkretnymi przykładami.

(b) Jeżeli $a \cdot b$ ma sens, to $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$.

Jeżeli ($a = 0$, $b = \pm\infty$) lub ($a = \pm\infty$, $b = 0$) dostajemy *symbol nieoznaczony* $0 \cdot \infty$.

(c) Jeżeli $\frac{a}{b}$ ma sens, to $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Jeżeli $a = b = 0$, dostajemy *symbol nieoznaczony* $\frac{0}{0}$. Jeżeli $a, b \in \{-\infty, +\infty\}$, dostajemy *symbol nieoznaczony* $\frac{\infty}{\infty}$.

Ćwiczenie: W (b) i (c) uzupełnić dowody oraz zilustrować „nieoznaczoność” stosownymi przykładami.

2.2. Pierwiastkowanie i potęgowanie

Twierdzenie 2.2.1. *Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}_+$ i $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $p \in \mathbb{R}_+$ taka, że $a = p^n$.*

Piszemy $p =: \sqrt[n]{a}$ i nazywamy p *pierwiastkiem n-tego stopnia z a*.

Dowód. Przypadek $a = 0$ jest oczywisty. Zakładamy, że $a > 0$ oraz $n \geqslant 2$. Jedyność wynika z tego, że jeżeli $0 < p_1 < p_2$, to $p_1^n < p_2^n$ (korzystamy z (P4)). Przypadek $a = 1$ jest oczywisty, więc zakładamy dalej, że $a \neq 1$. Zauważmy, że możemy również założyć, że $a > 1$. Istotnie, jeżeli przyjmiemy, że umiemy już obliczać pierwiastek n-tego stopnia dla $a > 1$ i weźmiemy $0 < a < 1$, to wtedy wiemy, że istnieje $q \in \mathbb{R}_{>0}$ takie, że $q^n = 1/a$, a stąd $(1/q)^n = a$. Niech więc $a > 1$. Aby wykazać istnienie p definiujemy

$$A := \{q \in \mathbb{R}_{>0} : q^n \leqslant a\}.$$

Oczywiście, $1 \in A$. Ponadto, jeżeli $q \in A$, to $q \leqslant a$ (dla $q > a$, na podstawie (P4) mamy $q^n > a^n > a$), a więc A jest ograniczony z góry. Niech $p := \sup A$. Wiemy, że istnieje rosnący ciąg $(q_s)_{s=1}^{\infty} \subset A$ taki, że

$q_s \longrightarrow p$. Stąd $q_s^n \longrightarrow p^n \leqslant a$, a więc $p \in A$. Pokażemy, że gdyby było $p^n < a$, to wtedy dla pewnego $h > 0$ mielibyśmy $(p+h)^n < a$, co prowadzi do sprzeczności. Istotnie,

$$(p+h)^n - p^n = h\big((p+h)^{n-1} + (p+h)^{n-2}p + \dots + p^{n-1}\big) < nh(p+h)^{n-1}.$$

Biorąc $h := \min\left\{1, \frac{a-p^n}{n(p+1)^{n-1}}\right\}$, dostajemy $(p+h)^n < p^n + hn(p+h)^{n-1} \leqslant a$. □

Obserwacja 2.2.2 (Ćwiczenie). Dla $a, b \geqslant 0$ oraz $m, n \in \mathbb{N}$ mamy:

(a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

(b) $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

(c) Jeżeli $b > 0$, to $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

(d) Jeżeli $a < b$, to $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

(e) Jeżeli $\mathbb{R}_+ \ni a_s \longrightarrow a$, to $\sqrt[n]{a_s} \longrightarrow \sqrt[n]{a}$.

Istotnie, przypadek $a = 0$ jest elementarny (Ćwiczenie). Jeżeli $a > 0$, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_s \geqslant a/2$ dla $s \geqslant N$. Wtedy dla $s \geqslant N$ mamy

$$|\sqrt[n]{a_s} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|a_s - a|}{(\sqrt[n]{a_s})^{n-1} + (\sqrt[n]{a_s})^{n-2}\sqrt[n]{a} + \dots + (\sqrt[n]{a})^{n-1}} \leqslant \frac{|a_s - a|}{n(\sqrt[n]{a/2})^{n-1}}.$$

(f) Jeżeli $0 < a < 1$, to $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a}$.

(g) Jeżeli $a > 1$, to $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$.

Obserwacja 2.2.3. Jeżeli n jest nieparzyste, to definicję $\sqrt[n]{a}$ można rozszerzyć do $a < 0$, kładąc $\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}$. Istotnie, $(-\sqrt[n]{-a})^n = (-1)^n \cdot (-a) = a$. Nie będziemy korzystać z tego rozszerzenia.

Definicja 2.2.4. Dla $a > 0$ i $q := \ell/m \in \mathbb{Q}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, kładziemy $a^q := (\sqrt[m]{a})^\ell$.

Łatwo sprawdzić (Ćwiczenie), że definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od przedstawienia liczby q w postaci ułamka.

Obserwacja 2.2.5 (Ćwiczenie). Dla $a, b > 0$ i $q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mamy:

(a) $1^q = 1$.

(b) $a^0 = 1$.

(c) $(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q$.

(d) $a^{q_1+q_2} = a^{q_1} \cdot a^{q_2}$; w szczególności, $a^{-q} = 1/a^q$.

(e) $(a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 q_2}$.

(f) Jeżeli $q > 0$ i $a < b$, to $a^q < b^q$; w szczególności, dla $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^q \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca.

(g) Jeżeli $q < 0$ i $a < b$, to $a^q > b^q$; w szczególności, dla $q \in \mathbb{Q}_{<0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^q \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

(h) Jeżeli $a > 1$ i $q_1 < q_2$, to $a^{q_1} < a^{q_2}$; w szczególności, dla $a > 1$, funkcja $\mathbb{Q} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca.

(i) Jeżeli $0 < a < 1$ i $q_1 < q_2$, to $a^{q_1} > a^{q_2}$; w szczególności, dla $0 < a < 1$, funkcja $\mathbb{Q} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

Obserwacja 2.2.6. Teraz stoimy przed pewnym wyborem dotyczącym definicji a^x dla $x \in \mathbb{R}$. Mamy dwie drogi:

- Odłożyć definicję a^x do momentu wprowadzenia funkcji eksponens w § 5.6.1 i zdefiniować $a^x := e^{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Zdefiniować już teraz a^x, być może mniej elegancko niż w § 5.6.1, ale za to uzyskując już teraz możliwość korzystania z takich potęg.

Wybieramy drugą drogę.

Definicja 2.2.7. Dla liczb $a \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$ definiujemy

$$a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} : q \leqslant x\}$$

(Ćwiczenie: zbiór po prawej stronie jest niepusty i ograniczony od góry). Dla $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R}$, definiujemy $a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

W wyrażeniu a^x liczbę a nazywamy *podstawą*, zaś liczbę x *wykładnikiem* potęgi a^x.

Obserwacja 2.2.8. (a) Jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to powyższe a^x zgadza się z poprzednią definicją.
(b) $1^x = 1$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.
(c) Dla $a > 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ taki, że $q_n \nearrow x$ oraz $a^{q_n} \nearrow a^x$.

Istotnie, przypadek $x \in \mathbb{Q}$ jest trywialny. Jeżeli $x \notin \mathbb{Q}$, to, wobec definicji a^x, istnieje ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ taki, że $a^{q_n} \nearrow a^x$. Wobec, Obserwacji 2.2.5(h) musi być $q_n \leqslant q_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Gdyby $q_n \longrightarrow x^* < x$, to dla $b, c \in \mathbb{Q}$, $x^* < b < c < x$ mielibyśmy $a^c > a^b > a^{q_n}$, $n \in \mathbb{N}$, a więc $a^b > a^c \geqslant a^x$; sprzeczność.

Twierdzenie 2.2.9. *Niech $a > 0$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$.*
(a) $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$.
(b) *Jeżeli $b_n \longrightarrow \pm\infty$, to $a^{1/b_n} \longrightarrow 1$.*
(c) *Jeżeli $b_n \longrightarrow 0$, to $a^{b_n} \longrightarrow 1$.*
(d) *Jeżeli $b_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}$, to $a^{b_n} \longrightarrow a^x$.*

Dowód. (a) Przypadek $a = 1$ jest trywialny. Transformacja $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$ sprowadza dowód do przypadku $a > 1$. Niech $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Chcemy pokazać, że $\delta_n \longrightarrow 0$. Mamy $a = (1 + \delta_n)^n \geqslant 1 + n\delta_n$. Wynika stąd, że $0 < \delta_n \leqslant (a-1)/n$, $n \in \mathbb{N}$, i teraz wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(b) Możemy założyć, że $a > 1$, $b_n \longrightarrow +\infty$. Możemy również założyć, że $b_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $k_n \leqslant b_n < k_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $k_n \longrightarrow +\infty$. Wobec (a) dostajemy $a^{1/k_n} \longrightarrow 1$. Ponieważ $1 < a^{1/b_n} \leqslant a^{1/k_n}$, wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(c) Wynika z (b) — wyrazy ciągu $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dzielimy na trzy grupy: wyrazy dodatnie, równe zero i ujemne. Jeżeli grupa dodatnia jest nieskończona, to stosujemy do niej (b). Jeżeli grupa ujemna jest nieskończona, to korzystamy z (b) dla wyrazów przeciwnych — zob. Obserwacja 2.1.4(v).

(d) Wobec definicji a^x możemy założyć, że $a > 1$. Niech $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ będzie taki, jak w Obserwacji 2.2.8(c). Wtedy, na podstawie (c), mamy $a^{b_n} = a^{q_n} \cdot a^{b_n - q_n} \longrightarrow a^x$. □

Przykład 2.2.10. Niech $a_1, \dots, a_k \geqslant 0$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$.

Istotnie, możemy założyć, że $\max\{a_1, \dots, a_k\} = a_k$. Wtedy

$$a_k \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{k a_k^n} = \sqrt[n]{k} a_k \longrightarrow a_k.$$

W kolejnym kroku uogólnimy Twierdzenie 2.2.9 na dowolne ciągi $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.2.11. *Niech $a > 0$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.*
(a) *Dla dowolnego ciągu $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli $b_n \longrightarrow +\infty$, to $a^{1/b_n} \longrightarrow 1$.*
(b) *Dla dowolnego ciągu $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli $b_n \longrightarrow 0$, to $a^{b_n} \longrightarrow 1$.*
(c) *Jeżeli $b_n \longrightarrow b$, to $a^{b_n} \longrightarrow a^b$.*
(d) *Jeżeli ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony i $a_n \longrightarrow 1$, to $a_n^{b_n} \longrightarrow 1$.*
(e) *Jeżeli $b_n \longrightarrow b$, $a_n \longrightarrow a$, to $a_n^{b_n} \longrightarrow a^b$.*

Dowód. (a) Możemy założyć, że $a > 1$ i $b_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $k_n \leqslant b_n < k_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $k_n \longrightarrow +\infty$. Ponieważ $1 < a^{1/b_n} \leqslant a^{1/k_n}$, wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(b) wynika z (a).

(c) Możemy założyć, że $a > 1$. Niech $q_n \in \mathbb{Q}$, $|q_n - b_n| \leqslant 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $q_n \longrightarrow b$. Wobec Twierdzenia 2.2.9(d) mamy $a^{q_n} \longrightarrow a^b$. Teraz, na podstawie (b), $a^{b_n} = a^{q_n} \cdot a^{b_n - q_n} \longrightarrow a^b$.

(d) Wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dzielimy na trzy grupy: wyrazy > 1, wyrazy $= 1$ i wyrazy < 1. Wystarczy zająć się wyrazami pierwszej grupy. Niech $b_n \in [k, \ell]$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Wtedy $a_n^k \leqslant a_n^{b_n} \leqslant a_n^{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$, i korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.

(e) Korzystamy z (c) i (d): $a_n^{b_n} = (a_n/a)^{b_n} \cdot a^{b_n} \longrightarrow a^b$. □

Teraz, korzystając z Twierdzeń 2.2.9(d) i 2.2.11(e), przenosimy Obserwację 2.2.5 na dowolne potęgi rzeczywiste.

Obserwacja 2.2.12 (Ćwiczenie)**.** Dla $a, b > 0$ i $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mamy:
(a) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,
(b) $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$; w szczególności, $a^{-x} = 1/a^x$,
(c) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$,

(d) jeżeli $x > 0$ i $a < b$, to $a^x < b^x$; w szczególności, $p \in \mathbb{R}_{>0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^p \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca,
(e) jeżeli $x < 0$ i $a < b$, to $a^x > b^x$; w szczególności, dla $p \in \mathbb{R}_{<0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^p \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca,
(f) jeżeli $a > 1$ i $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} < a^{x_2}$; w szczególności, dla $a > 1$, funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca,
(g) jeżeli $0 < a < 1$ i $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} > a^{x_2}$; w szczególności, dla $0 < a < 1$, funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

W kontekście Twierdzenia 2.2.11(e), powstaje naturalne pytanie

$$\Big((x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0},\ x_n \longrightarrow x \in \overline{\mathbb{R}},\ a_n \longrightarrow a \in [0,+\infty]\Big) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n^{x_n} = ?$$

Prowadzi ono do kolejnych trzech symboli nieoznaczonych 1^∞, 0^0 i ∞^0:

$x\backslash a$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1^∞	0	0
$(-\infty,0)$	$+\infty$	a^x	1	a^x	0
0	0^0	1	1	1	∞^0
$(0,+\infty)$	0	a^x	1	a^x	$+\infty$
$+\infty$	0	0	1^∞	$+\infty$	$+\infty$

Twierdzenie 2.2.13. (a) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$.
(b) *Jeżeli* $a_n \longrightarrow +\infty$, *to* $a_n^{1/a_n} \longrightarrow 1$.

Dowód. (a) Niech $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Chcemy pokazać, że $\delta_n \longrightarrow 0$. Mamy $n = (1+\delta_n)^n \geqslant 1 + \binom{n}{2}\delta_n^2$, a stąd $0 \leqslant \delta_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}$.

(b) Możemy założyć, że $a_n > 1$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \leqslant a_n < k_n + 1$. Wtedy, korzystając z (a) oraz Twierdzenia 2.2.11(e) dostajemy.

$$1 \leqslant a_n^{1/a_n} \leqslant \Big((k_n+1)^{\frac{1}{k_n+1}}\Big)^{\frac{k_n+1}{k_n}} \longrightarrow 1^1 = 1. \qquad \square$$

Ćwiczenie 2.2.14. Znaleźć przykłady ilustrujące „nieoznaczoność” symboli 1^∞, 0^0 i ∞^0.

2.3. Liczba e

Twierdzenie 2.3.1. (a) *Niech*

$$e_n := \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $e_n < e_{n+1} < 3$, $n \in \mathbb{N}$. *W konsekwencji, na mocy Obserwacji 2.1.4*(p), *ciąg* $(e_n)_{n=1}^\infty$ *jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy przez* e.
(b) *Niech*

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wtedy $s_n \longrightarrow e$.
(c) *Dla dowolnego* $n \geqslant 2$ *istnieje* $t_n \in (0,1)$ *takie, że*

$$e = s_n + \frac{t_n}{n!n}.$$

(d) *Jeżeli* $a_n \longrightarrow \pm\infty$, *to* $(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \longrightarrow e$.
(e) *Jeżeli* $a_n \longrightarrow 0$, *to* $(1 + a_n)^{1/a_n} \longrightarrow e$.
(f) $(1 + \frac{x}{n})^n \longrightarrow e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
(g) $e \notin \mathbb{Q}$.
(h) $e^x \geqslant 1 + x$, $x \geqslant 0$.

Dowód. (a) Wobec wzoru Newtona dostajemy

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \dots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n}).$$

Wynika stąd, że jest to ciąg silnie rosnący. Ponadto,

$$2 \leqslant e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

(b) Wiemy, że $e_n < s_n$ oraz dla $n \geqslant k$ dostajemy

$$e_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \dots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big),$$

co przy $n \longrightarrow +\infty$, daje $e \geqslant s_k$.

(c) Mamy

$$s_{n+k} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)\dots(n+k)}\Big)$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}}\Big) < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1},$$

co przy $k \longrightarrow +\infty$ daje

$$e - s_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!n}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Pozostaje zauważyć, że $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$.

(d) Jeżeli $a_n \longrightarrow +\infty$, to możemy założyć, że $a_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie taki, że $k_n \leqslant a_n < k_n + 1$; oczywiście $k_n \longrightarrow +\infty$. Mamy

$$e = \frac{e}{1} \longleftarrow \frac{\Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{k_n+1}}{1+\frac{1}{k_n+1}} \leqslant \Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)^{a_n} \leqslant \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big)^{k_n} \cdot \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big) \longrightarrow e\cdot 1 = e.$$

Jeżeli $a_n = -b_n \longrightarrow -\infty$, to korzystamy z przekształcenia

$$\Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)^{a_n} = \frac{1}{\Big(1-\frac{1}{b_n}\Big)^{b_n}} = \Big(\Big(1+\frac{1}{b_n-1}\Big)^{b_n-1}\Big)^{\frac{b_n}{b_n-1}}.$$

(e) Wynika z (d).

(f) Korzystamy z (e) z $a_n := x/n$: $(1+\frac{x}{n})^n = \big((1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}\big)^x \longrightarrow e^x$.

(g) Jest oczywiste, że $e \notin \mathbb{N}$. Gdyby $e = \frac{m}{n}$ $(n \geqslant 2)$, to na podstawie (c) mielibyśmy $n!e - n!s_n = \frac{t_n}{n}$, przy czym lewa strona jest liczbą całkowitą, zaś prawa — liczbą z przedziału $(0,1)$; sprzeczność.

(h) Mamy $\big(1+\frac{x}{n}\big)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} \geqslant 1 + x$ dla $x \geqslant 0$. Pozostaje skorzystać z (f). □

Obserwacja 2.3.2. (a) $e \approx 2.718281828$.

(b) s_n przybliża e z błędem mniejszym niż $\frac{1}{n!n}$. Np. dla $n = 6$ mamy $\frac{1}{6!6} = \frac{1}{720\cdot 6} < 0.001$ i $s_6 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.7181$.

Ćwiczenie: Dla jakiego n liczba e_n daje przybliżenie e z błędem < 0.001?

2.4. Granice górne i dolne

Niech $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ będzie dowolny i niech $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) := \{g \in \overline{\mathbb{R}} : \exists_{(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}} : a_{n_k} \longrightarrow g\}$. Zauważmy, że:

— jeżeli ciąg jest nieograniczony od góry, to $+\infty \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$,

— jeżeli jest nieograniczony od dołu, to $-\infty \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$,

— jeżeli jest ograniczony, to na podstawie Twierdzenia Bolzano–Weierstrassa 2.1.6, $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) \neq \varnothing$.

Definiujemy *granicę górną i dolną* ciągu $\boldsymbol{a}$ jako

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \sup \mathcal{S}(\boldsymbol{a}), \quad \liminf_{n\to+\infty} a_n := \inf \mathcal{S}(\boldsymbol{a}).$$

Czasami używa się symboli $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ i $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$.

Obserwacja 2.4.1. (a) $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(b) Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = g$.

(c) $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n, \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$.

Istotnie, niech $g := \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. Jeżeli $g = -\infty$, to $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) = \{-\infty\}$ i wtedy $a_n \longrightarrow g$.

Jeżeli $g \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $s \in \mathbb{N}$ znajdziemy $g' \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ takie, że $g - 1/s \leqslant g' \leqslant g$. Wiemy, że istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ taki, że $a_{n_k} \longrightarrow g'$. Znajdziemy więc wiec $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_{n_k} - g'| \leqslant 1/s$ dla $k \geqslant k_0$. Biorąc $s = 1, 2, \dots$, budujemy podciąg $(a_{\ell_s})_{s=1}^{\infty}$ taki, że $|a_{\ell_s} - g| \leqslant 2/s$, $s \in \mathbb{N}$.

Jeżeli $g = +\infty$, dla dowolnego $s \in \mathbb{N}$ znajdziemy $g' \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ takie, że $g' \geqslant 2s$. Wiemy, że istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ taki, że $a_{n_k} \longrightarrow g'$. Znajdziemy więc wiec $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_{n_k} \geqslant s$ dla $k \geqslant k_0$. Biorąc $s = 1, 2, \dots$, budujemy podciąg $(a_{\ell_s})_{s=1}^{\infty}$ taki, że $a_{\ell_s} \geqslant s$, $s \in \mathbb{N}$.

Dowód dla $\liminf$ przebiega analogicznie.

(d) Jeżeli $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n =: g$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$.

(e) Jeżeli $g := \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n < +\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M > g$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant M$ dla $n \geqslant N$.

(f) Jeżeli $g := \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n > -\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M < g$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \geqslant M$ dla $n \geqslant N$.

Twierdzenie 2.4.2. *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$. *Wtedy*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

W szczególności, jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow g \in [0, +\infty]$, *to* $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow g$.

Dowód. Jeżeli $g_- := \liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$, to ustalamy dowolnie $0 < g_1 < g_2 < g_-$. Wiemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant g_2$ dla $n \geqslant N$. Stąd $a_{N+k} \geqslant a_N g_2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, a więc $a_n \geqslant a_N g_2^{n-N}$, $n \geqslant N$. Wynika stąd, że $\sqrt[n]{a_n} \geqslant g_2 \sqrt[n]{\frac{a_N}{g_2^N}}$, $n \geqslant N$. Ponieważ $\sqrt[n]{\frac{a_N}{g_2^N}} \longrightarrow 1$, zatem istnieje $N_1 \geqslant N$ takie, że $\sqrt[n]{a_n} \geqslant g_1$, $n \geqslant N_1$.

Jeżeli $g_+ := \limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < +\infty$, to ustalamy dowolnie $g_+ < g_2' < g_1' < +\infty$ i rozumując jak powyżej wnioskujemy, że $\sqrt[n]{a_n} \leqslant g_1'$, $n \geqslant N_1'$. $\square$

Przykład 2.4.3. (a) Jeżeli $a_n := \frac{2+(-1)^n}{2^n}$, to $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{2}$, ale ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżny.

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Istotnie, bierzemy $a_n := \frac{n^n}{n!}$ i mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1 + \frac{1}{n})^n \longrightarrow e$.

ROZDZIAŁ 3

Przestrzenie metryczne

3.1. Przestrzenie metryczne

Definicja 3.1.1. *Przestrzenią metryczną* nazywamy parę (X, ϱ), gdzie X jest zbiorem, zaś $\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją taką, że:

(a) (*oznaczoność*) $\forall_{x,y\in X} : (\varrho(x, y) = 0 \iff x = y)$,
(b) (*symetria*) $\forall_{x,y\in X} : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
(c) (*nierówność trójkąta*) $\forall_{x,y,z\in X} : \varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Funkcję ϱ nazywamy *metryką (odległością)*. Jeżeli wiadomo o jaką metrykę chodzi, to piszemy X zamiast (X, ϱ).

Obserwacja 3.1.2. (a) $(\mathbb{R}, \varrho_{\mathbb{R}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\mathbb{R}}(x, y) := |x - y|$.
(b) $(\overline{\mathbb{R}}, \varrho_{\overline{\mathbb{R}}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$, zaś $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$ jest bijekcją daną wzorem (zob. Ćwiczenie 1.11.1)

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}.$$

Dla $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ i $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mamy:

$$a_n \xrightarrow{\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}} a \iff \begin{cases} a_n \longrightarrow a, & \text{jeżeli } a \in \mathbb{R} \\ a_n \longrightarrow \pm\infty, & \text{jeżeli } a = \pm\infty \end{cases}.$$

(c) $(\mathbb{C}, \varrho_{\mathbb{C}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\mathbb{C}}(z, w) := |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$.
(d) Dowolny zbiór można zamienić w przestrzeń metryczną przy pomocy *metryki dyskretnej*

$$\varrho_d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = y \\ 1, & \text{jeżeli } x \neq y \end{cases}.$$

Przykład 3.1.3 (Sfera Riemanna)**.** Jako zbiór *sfera Riemanna* to $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Rozszerzamy działania na $\widehat{\mathbb{C}}$:
$\infty + a = a + \infty := \infty$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$,
$a \cdot \infty = \infty \cdot a := \infty$ dla dowolnego $a \in \widehat{\mathbb{C}}_*$,
$1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$.
Sfera Riemanna $\widehat{\mathbb{C}}$ jest bijektywna z dwuwymiarową sferą euklidesową

$$\boldsymbol{S} := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + (w - \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2\}$$

poprzez *rzut stereograficzny* $R : \boldsymbol{S} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$,

$$R(u, v, w) := \Big(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}\Big), \quad (u, v, w) \in \boldsymbol{S} \setminus \{\boldsymbol{N}\}, \qquad R(\boldsymbol{N}) := \infty,$$

gdzie $\boldsymbol{N} := (0, 0, 1)$. Istotnie (Ćwiczenie),

$$R^{-1}(z) = \Big(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\Big), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \qquad R^{-1}(\infty) := \boldsymbol{N}.$$

W szczególności, $\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}}(a,b) := \varrho_{\mathbb{R}^3}(R^{-1}(a), R^{-1}(b))$, $a,b \in \widehat{\mathbb{C}}$, gdzie $\varrho_{\mathbb{R}^3}$ oznacza odległość euklidesową w $\mathbb{R}^3$ (1), jest metryką w $\widehat{\mathbb{C}}$. Nosi ona nazwę *metryki sferycznej*. Można pokazać (Ćwiczenie), że

$$\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}}(a,b) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } a=b=\infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}, & \text{jeżeli } a\in\mathbb{C},\ b=\infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a=\infty,\ b\in\mathbb{C} \\ \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a,b\in\mathbb{C} \end{cases}, \quad a,b\in\widehat{\mathbb{C}}.$$

Dla ciągu $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ mamy (Ćwiczenie):

$z_n \overset{(\widehat{\mathbb{C}},\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}})}{\longrightarrow} z_0 \in \mathbb{C} \iff z_n \longrightarrow z_0$ (w zwykłym sensie).

$z_n \overset{(\widehat{\mathbb{C}},\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}})}{\longrightarrow} \infty \iff |z_n| \longrightarrow +\infty$.

Definicja 3.1.4. Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Dla $a\in X$ i $r>0$ definiujemy:
- *kulę otwartą* $B_\varrho(a,r) = B(a,r) := \{x\in X : \varrho(a,x) < r\}$,
- *kulę domkniętą* $\overline{B}_\varrho(a,r) = \overline{B}(a,r) := \{x\in X : \varrho(a,x) \leqslant r\}$.

Mówimy, że zbiór $A\subset X$ jest *otwarty*, jeżeli dla dowolnego $a\in A$ istnieje $r>0$ takie, że $B(a,r)\subset A$. Rodzinę wszystkich podzbiorów otwartych nazywamy *topologią* i oznaczamy $\operatorname{top}\varrho$ lub $\operatorname{top}X$, gdy metryka jest znana. Zbiór $A\subset X$ nazywamy *domkniętym*, jeżeli zbiór $X\setminus A$ jest otwarty. Rodzinę wszystkich podzbiorów domkniętych oznaczamy $\operatorname{cotop}\varrho$ lub $\operatorname{cotop}X$, gdy metryka jest znana.

Obserwacja 3.1.5 (Ćwiczenie). (a) W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R},\varrho_{\mathbb{R}})$ mamy: $B(a,r) = (a-r,a+r)$, $\overline{B}(a,r) = [a-r,a+r]$.

(b) Dla $A\subset\overline{\mathbb{R}}$ mamy: $A\in\operatorname{top}\varrho_{\overline{\mathbb{R}}} \iff A\cap\mathbb{R}\in\operatorname{top}\varrho_{\mathbb{R}}$ oraz
$+\infty\in A \Longrightarrow \exists_{M\in\mathbb{R}} : (M,+\infty]\subset A$,
$-\infty\in A \Longrightarrow \exists_{M\in\mathbb{R}} : [-\infty,M)\subset A$.

(c) W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{C},\varrho_{\mathbb{C}})$ mamy: $B(a,r) = \{z\in\mathbb{C} : |z-a|<r\}$ = koło otwarte o środku w punkcie a i promieniu r; $\overline{B}(a,r) = \{z\in\mathbb{C} : |z-a|\leqslant r\}$ = koło domknięte o środku w punkcie a i promieniu r.

(d) W przestrzeni $(\widehat{\mathbb{C}},\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}})$ mamy $B(\infty,r) = \begin{cases} \widehat{\mathbb{C}}, & \text{jeżeli } r>1 \\ \{\infty\}\cup\{z\in\mathbb{C} : |z| > \sqrt{\frac{1}{r^2}-1}\}, & \text{jeżeli } 0<r\leqslant 1\end{cases}$. Jak wyglądają kule $B(a,r)$, $a\in\mathbb{C}$?

(e) W przestrzeni z metryką dyskretną mamy

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{jeżeli } r\leqslant 1 \\ X, & \text{jeżeli } r>1 \end{cases}, \quad \overline{B}(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{jeżeli } r<1 \\ X, & \text{jeżeli } r\geqslant 1 \end{cases}.$$

(f) W dowolnej przestrzeni metrycznej (X,ϱ), dla dowolnych $a,b\in X$, $a\neq b$, jeżeli $r := \frac{\varrho(a,b)}{3}$, to $B(a,r)\cap B(b,r) = \varnothing$.
Istotnie, dla $x\in B(a,r)$ i $y\in B(b,r)$ mamy $\varrho(x,y) \geqslant \varrho(a,b) - \varrho(a,x) - \varrho(b,y) > \frac{r}{3}$.

(g) W dowolnej przestrzeni metrycznej (X,ϱ) kule otwarte są otwarte, zaś kule domknięte są domknięte.
Istotnie, jeżeli $x_0\in B(a,r)$, to dla $x\in B(x_0, r-\varrho(a,x_0))$ mamy $\varrho(a,x)\leqslant\varrho(a,x_0)+\varrho(x_0,x) < r$, czyli $B(x_0,r-\varrho(a,x_0))\subset B(a,r)$.
Jeżeli $x_0\in X\setminus\overline{B}(a,r)$, to dla $x\in B(x_0,\varrho(a,x_0)-r)$ mamy $\varrho(a,x)\geqslant\varrho(a,x_0)-\varrho(x_0,x) > r$, czyli $B(x_0,\varrho(a,x_0)-r)\subset X\setminus\overline{B}(a,r)$.

(h) Rodzina $\mathcal{T} := \operatorname{top}\varrho$ ma następujące własności:
- $\varnothing, X\in\mathcal{T}$,
- $U_1,\dots,U_N\in\mathcal{T} \Longrightarrow U_1\cap\dots\cap U_N\in\mathcal{T}$,
- $(U_i)_{i\in I}\subset\mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{F}$.

(i) Rodzina $\mathcal{F} := \operatorname{cotop}\varrho$ ma następujące własności:
- $\varnothing, X\in\mathcal{F}$,
- $F_1,\dots,F_N\in\mathcal{F} \Longrightarrow F_1\cup\dots\cup F_N\in\mathcal{F}$,

---

(1) $\varrho_{\mathbb{R}^3}(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.

- $(F_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$.

(j) Jeżeli ϱ jest metryką, to $d := \min\{1, \varrho\}$ jest również metryką oraz $\operatorname{top}\varrho = \operatorname{top} d$.

(k) W *topologii dyskretnej* (tzn. topologii generowanej przez metrykę dyskretną) mamy $\operatorname{top}\varrho_d = \mathcal{P}(X) = \operatorname{cotop}\varrho_d$.

(l) * Niech $d := \varphi \circ \varrho$, gdzie $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest dowolną funkcją rosnącą taką, że:
- $\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
- φ jest *wklęsła* (zob. § 6.8), tzn. $\varphi(tx+(1-t)y) \geqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ i $t \in [0, 1]$ (np. $\varphi(x) := \sqrt{x}$).

Wtedy d jest metryką. Kiedy $\operatorname{top}\varrho = \operatorname{top} d$?

Definicja 3.1.6. Dla dowolnego zbioru $A \subset X$ definiujemy:

$$\begin{aligned} &\textit{wnętrze } A\text{:} && \operatorname{int} A = A^\circ := \bigcup_{U\in\operatorname{top} X:\ U\subset A} U,\\ &\textit{domknięcie } A\text{:} && \operatorname{cl} A = \overline{A} := \bigcap_{F\in\operatorname{cotop} X:\ A\subset F} F,\\ &\textit{brzeg } A\text{:} && \partial A := \overline{A} \setminus \operatorname{int} A. \end{aligned}$$

Każdy zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $a \in U$ nazywamy *otoczeniem otwartym punktu a*. Każdy zbiór $A \subset X$ taki, że $a \in \operatorname{int} A$ nazywamy *otoczeniem punktu a*.

Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest
- *gęsty*, jeżeli $\overline{A} = X$,
- *brzegowy*, jeżeli $\operatorname{int} A = \varnothing$,
- *nigdziegęsty*, jeżeli $\operatorname{int}\overline{A} = \varnothing$,
- *ograniczony*, jeżeli istnieją $a \in X$ i $r > 0$ takie, że $A \subset B(a, r)$.

Dla zbioru $A \subset X$ definiujemy jego *średnicę* $\operatorname{diam} A := \sup \varrho(A \times A)$, przy czym $\operatorname{diam}\varnothing := 0$.

Dla $\varnothing \neq A \subset X$ i $x \in X$ kładziemy $\varrho(x, A) := \inf\{\varrho(x, a) : a \in A\}$.

Mówimy, że punkt a jest *punktem skupienia zbioru A*, jeżeli dla dowolnego otoczenia U tego punktu mamy $A\cap(U \setminus \{a\}) \neq \varnothing$. Zbiór wszystkich punktów skupienia oznaczamy A'. Punkty z $A\setminus A'$ nazywamy *punktami izolowanymi zbioru A*.

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset X$ jest zbieżny do punktu $a \in X$, jeżeli dla dowolnego otoczenia U punktu a istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \in U$ dla $n \geqslant N$. Piszemy wtedy $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, lub $a_n \xrightarrow{\varrho} a$, lub $a_n \longrightarrow a$.

Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geqslant N} : \varrho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon.$$

Mówimy, że (X, ϱ) jest przestrzenią zupełną, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Mówimy, że dwie metryki $\varrho_1, \varrho_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *równoważne* ($\varrho_1 \sim \varrho_2$), jeżeli $\operatorname{top}\varrho_1 = \operatorname{top}\varrho_2$. Jest to relacja równoważności. Własności niezmiennicze względem metryk równoważnych (np. zbieżność, ciągłość) nazywamy *własnościami topologicznymi* przestrzeni metrycznej (X, ϱ).

Mówimy, że dwie metryki $\varrho_1, \varrho_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *porównywalne*, jeżeli $\varrho_1 \leqslant c_1\varrho_2^{\alpha_1}$ i $\varrho_2 \leqslant c_2\varrho_1^{\alpha_2}$ dla pewnych stałych $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$. Porównywalność metryk jest również relacją równoważnościową. Własności niezmiennicze względem metryk porównywalnych (np. ograniczoność, jednostajna ciągłość) nazywamy *własnościami metrycznymi* przestrzeni (X, ϱ).

Obserwacja 3.1.7. (a) Dla dowolnych $a, b \in X$, $a \neq b$, istnieją otoczenia otwarte U_a, U_b takie, że $U_a \cap U_b = \varnothing$, czyli każda przestrzeń metryczna jest *przestrzenią Hausdorffa* (2).

(b) $A \in \operatorname{top} X \Longleftrightarrow A = \operatorname{int} A$.

(c) $a \in \operatorname{int} A \Longleftrightarrow \exists_{r>0} :\ B(a, r) \subset A$.

(d) $A \in \operatorname{cotop} X \Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

(e) $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall_{r>0} :\ B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

Istotnie, przypuśćmy, że $B(a, r) \cap A = \varnothing$ dla pewnego $a \in \overline{A}$. Wtedy $X \setminus B(a, r)$ jest zbiorem domkniętym zawierającym zbiór A. Stąd $\overline{A} \subset X \setminus B(a, r)$ — sprzeczność. Niech teraz a będzie punktem mającym własność po prawej stronie i przypuśćmy, że $a \notin \overline{A}$. Wtedy istnieje zbiór domknięty $F \supset A$ taki, że $a \notin F$. Musi więc istnieć $r > 0$ takie, że $B(a, r) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$ — sprzeczność.

(2) Felix Hausdorff (1868–1942).

(f) $x_n \longrightarrow a \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : a_n \in B(a,\varepsilon) \iff \varrho(x_n, a) \longrightarrow 0$.
(g) Ciąg może mieć tylko jedną granicę.
(h) $a \in \overline{A} \iff \exists_{(x_n)_{n=1}^\infty \subset A} :\ x_n \longrightarrow a$.
(i) $a \in A' \iff \exists_{(x_n)_{n=1}^\infty \subset A\setminus\{a\}} :\ x_n \longrightarrow a$.
(j) Następujące warunki są równoważne:
  (i) $\operatorname{top}\varrho_1 \subset \operatorname{top}\varrho_2$;
  (ii) $\forall_{a\in X}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} : B_{\varrho_2}(a,\delta) \subset B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$;
  (iii) $\forall_{(x_n)_{n=0}^\infty \subset X} : (x_n \xrightarrow{\varrho_2} a \Longrightarrow x_n \xrightarrow{\varrho_1} a)$.

Istotnie, jest oczywiste, że (i) $\iff$ (ii). Przypuśćmy, że (ii) zachodzi oraz $x_n \xrightarrow{\varrho_2} a$. Niech $\delta > 0$ będzie dobrane do $\varepsilon > 0$ przy pomocy warunku (ii). Wtedy $x_n \in B_{\varrho_2}(a,\delta)$ dla $n \geqslant N$, co daje $x_n \in B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$ dla $n \geqslant N$. Oznacza to, że $x_n \xrightarrow{\varrho_1} a$.

Teraz załóżmy, że (iii) zachodzi. Przypuśćmy, że dla pewnych $a \in X$ i $\varepsilon > 0$ warunek (ii) nie zachodzi, tzn. istnieje ciąg $x_n \in B_{\varrho_2}(a, 1/n) \setminus B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$. Znaczy to, że $x_n \xrightarrow{\varrho_2} a$, ale $x_n \overset{\varrho_1}{\not\longrightarrow} a$; sprzeczność.
(k) Metryki porównywalne są równoważne (ale nie odwrotnie — np. $\varrho \sim \min\{\varrho, 1\}$, ale metryki te nie muszą być porównywalne).
(l) Niech $\varnothing \neq A \subset X$. Wtedy $x \in \overline{A} \iff \varrho(x, A) = 0$.
(m) $|\varrho(x,A) - \varrho(y,A)| \leqslant \varrho(x,y)$, $x, y \in X$.

Istotnie, na podstawie nierówności trójkąta dla $a \in A$ mamy: $\varrho(x,A) \leqslant \varrho(x,a) \leqslant \varrho(x,y)+\varrho(y,a)$. Stąd $\varrho(x,A) \leqslant \varrho(x,a) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,A)$. Teraz wystarczy zamienić miejscami x i y.
(n) $|\varrho(a,b) - \varrho(a',b')| \leqslant \varrho(a,a') + \varrho(b,b')$, $a, a', b, b' \in X$.
(o) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$, to $\varrho(a_n, b_n) \longrightarrow \varrho(a,b)$.
(p) Zbiór A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{diam} A < +\infty$.
(q) Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.
(r) Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.
(s) Jeżeli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to jest cały zbieżny.
(t) $(\mathbb{K}, \varrho_{\mathbb{K}})$ jest przestrzenią zupełną.

Definicja 3.1.8. Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Z dowolnego zbioru $Y \subset X$ robimy przestrzeń metryczną z *metryką indukowaną* $\varrho|_{Y\times Y}$.

Obserwacja 3.1.9. (a) Dla $a \in Y$ mamy $B_{\varrho|_{Y\times Y}}(a,r) = B_\varrho(a,r) \cap Y$.
(b) $A \in \operatorname{top}(\varrho|_{Y\times Y}) \iff \exists_{U\in\operatorname{top}\varrho} :\ A = U \cap Y$.
(c) $A \in \operatorname{cotop}(\varrho|_{Y\times Y}) \iff \exists_{F\in\operatorname{cotop}\varrho} :\ A = F \cap Y$.
(d) Jeżeli $(Y, \varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zupełną, to Y jest domknięte w X.
(e) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zupełną i Y jest domknięte w X, to $(Y,\varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zupełną.
(f) Jeżeli $F \subset \mathbb{R}$ jest domknięty, to jest przestrzenią zupełną.

3.2. Przestrzenie zwarte

Definicja 3.2.1. Mówimy, że przestrzeń metryczna (X,ϱ) jest *zwarta* jeżeli dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty \subset X$ istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ oraz punkt $a \in X$ takie, że $a_{n_k} \longrightarrow a$.

Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X,ϱ), jeżeli $(Y,\varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zwartą, to mówimy, że Y jest *zwartym podzbiorem* X.

Obserwacja 3.2.2. (a) Dowolna przestrzeń zwarta jest zupełna.
(b) Jeżeli $Y \subset X$ jest zbiorem zwartym, to Y jest domknięte w X.
(c) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zwartą i Y jest domknięte w X, to Y jest zbiorem zwartym.
(d) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zwartą, to $\operatorname{diam} X = \max \varrho(X \times X) < +\infty$.
(e) $(\overline{\mathbb{R}}, \varrho_{\overline{\mathbb{R}}})$ jest przestrzenią zwartą.
(f) $(\widehat{\mathbb{C}}, \varrho_{\widehat{\mathbb{C}}})$ jest przestrzenią zwartą.
(g) Jeżeli X jest przestrzenią zwartą to dla dowolnych ciągów $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset X$ istnieją podciągi $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$, $(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ oraz $a, b \in X$ takie, że $a_{n_k} \longrightarrow a$, $b_{n_k} \longrightarrow b$.

Twierdzenie 3.2.3 (Cantor). *Niech $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niepustych zbiorów zwartych w przestrzeni metrycznej (X,ϱ) takim, że $K_{n+1}\subset K_n$, $n\in\mathbb{N}$. Wtedy zbiór $K:=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ jest niepustym zbiorem zwartym oraz* $\operatorname{diam}K_n\longrightarrow\operatorname{diam}K$. *W szczególności, jeżeli* $\operatorname{diam}K_n\longrightarrow 0$, *to K musi być jednopunktowy.*

Dowód. Oczywiście K jest zwarty. Niech $a_n,b_n\in K_n$ będą takie, że $\operatorname{diam}K_n=\varrho(a_n,b_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Wobec zwartości K_1 istnieją podciągi $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ oraz $a,b\in K_1$ takie, że $a_{n_k}\longrightarrow a$, $b_{n_k}\longrightarrow b$. Ponieważ $a_n,b_n\in K_N$ dla $n\geqslant N$, zatem musi być $a,b\in K$. Oznacza to w szczególności, że $K\neq\varnothing$. Ponadto, $\operatorname{diam}K\geqslant\varrho(a,b)=\lim_{n\to+\infty}\varrho(a_{n_k},b_{n_k})=\lim_{n\to+\infty}\operatorname{diam}K_n\geqslant\operatorname{diam}K$. □

Przykład 3.2.4 (Zbiór Cantora). Niech $C_0:=[0,1]$. Dzielimy C_0 na trzy równe przedziały domknięte i wyrzucamy wnętrze środkowego. Niech $C_1:=[0,\frac13]\cup[\frac23,1]$. W kolejnym kroku, z każdego z dwóch przedziałów tworzących C_1 wyrzucamy wnętrze środkowego z trzech równych przedziałów, na które dzielimy ten przedział, tzn. $C_2:=[0,\frac{1}{3^2}]\cup[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}]\cup[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}]\cup[\frac{8}{3^2},\frac{9}{3^2}]$. Kontynuujemy: $C_n:=\bigcup_{j=1}^{2^n}C_{n,j}$, gdzie $C_{n,j}$, $j=1,\dots,2^n$, są przedziałami domkniętymi, parami rozłącznymi, każdy o długości $\frac{1}{3^n}$. Oczywiście, $C_n\neq\varnothing$ oraz $C_{n+1}\subset C_n$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Teraz *zbiór Cantora* definiujemy jako

$$C:=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n.$$

Na podstawie Twierdzenia Cantora 3.2.3 C jest niepustym zbiorem zwartym.

Twierdzenie 3.2.5. *Przestrzeń metryczna (X,ϱ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy z dowolnego pokrycia otwartego $\mathfrak{U}=(U_i)_{i\in I}$ tej przestrzeni (tzn. $X=\bigcup_{i\in I}U_i$) można wybrać podpokrycie skończone.*

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że X jest zbiorem nieskończonym.

($\Longleftarrow$): Przypuśćmy, że $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$ jest ciągiem, z którego nie da się wybrać podciągu zbieżnego. Możemy założyć, że $a_n\neq a_m$ dla dowolnych $n\neq m$. Niech $U_n:=X\setminus\{a_n,a_{n+1},\dots\}$, $n\in\mathbb{N}$. Oczywiście $U_n\subset U_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n=X$ oraz $\bigcup_{n=1}^{N}U_n=U_N\subsetneq X$ dla dowolnego $N\in\mathbb{N}$. Wystarczy jeszcze zauważyć, że każdy zbiór U_n jest otwarty, co daje sprzeczność.

($\Longrightarrow$): Przypuśćmy, iż z pokrycie otwartego $\mathfrak{U}$ nie da się wybrać podpokrycia skończonego. Przypuśćmy na chwilę, że udało się nam wykazać następujący warunek

$$\exists_{\delta>0}\ \forall_{a\in X}\ \exists_{i\in I}:\ B(a,\delta)\subset U_i. \tag{*}$$

Największą liczbę $\delta>0$ o powyższej własności nazywamy *liczbą Lebesgue'a* (3) dla pokrycia $\mathfrak{U}$. Zauważmy, że dla dowolnych $a_1,\dots,a_N\in X$ mamy $\bigcup_{n=1}^{N}B(a_n,\delta)\subsetneq X$.

Niech $a_1\in X$ będzie dowolne. Wybierzmy $a_2\in X\setminus B(a_1,\delta)$ i dalej $a_n\in X\setminus\bigcup_{j=1}^{n-1}B(a_j,\delta)$, $n\in\mathbb{N}_3$. Oczywiście $\varrho(a_n,a_m)\geqslant\delta$ dla dowolnych $n\neq m$. Z takiego ciągu nie da się wybrać podciągu zbieżnego.

Pozostaje wykazać (*). Przypuśćmy, że takiego δ nie ma. Wtedy istnieje ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$ taki, że kula $B(a_n,\frac1n)$ nie jest zawarta w żadnym zbiorze U_i. Z ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg zbieżny $a_{n_k}\longrightarrow a$. Niech $a\in U_{i_0}$. Z otwartości U_{i_0} wynika, że $B(a,r)\subset U_{i_0}$ dla pewnego $r>0$. Niech $a_{n_k}\in B(a,\frac r2)$ dla $k\geqslant N$. Wtedy dla dostatecznie dużych k mamy $B(a_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset B(a,\frac r2+\frac{1}{n_k})\subset B(a,r)\subset U_{i_0}$ — sprzeczność. □

3.3. Metryka Czebyszewa

Niech X będzie dowolnym (niepustym) zbiorem i niech (Y,ϱ_Y) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Zdefiniujmy $\mathcal{B}(X,Y):=\{f:X\longrightarrow Y:\text{zbiór } f(X)\text{ jest ograniczony}\}$. W zbiorze $\mathcal{B}(X,Y)$ wprowadzamy *metrykę Czebyszewa* (4)

$$\delta(f,g):=\sup\{\varrho_Y(f(x),g(x)):x\in X\}.$$

(3) Henri Lebesgue (1875–1941).
(4) Pafnutij Czebyszew (1821–1894).

Obserwacja 3.3.1. (a) ĆWICZENIE: δ jest metryką na $\mathcal{B}(X,Y)$.

(b) $f_n \xrightarrow{\delta} f_0 \iff f_n \longrightarrow f_0$ *jednostajnie na* X, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_0(x)) \leqslant \varepsilon. \tag{†}$$

(c) Przestrzeń $\mathcal{B}(X,Y)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń Y jest zupełna.

Istotnie, każdy ciąg Cauchy'ego $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ możemy utożsamiać z ciągiem Cauchy'ego odwzorowań stałych $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Stąd, jeżeli $\mathcal{B}(X,Y)$ jest zupełna, to Y jest zupełna.

W drugą stronę: Jeżeli $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ jest ciągiem Cauchy'ego, to znaczy to, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant N}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon. \tag{‡}$$

Wtedy, dla dla dowolnego $x \in X$ ciąg $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \subset Y$ spełnia zwykły warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. Definiujemy $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in X$. Jeżeli $m \longrightarrow +\infty$ w warunku (‡), to dostajemy $\varrho_Y(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, $n \geqslant N$, co oznacza, że (†) zachodzi. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że f jest odwzorowaniem ograniczonym: niech $f_N(X) \subset B(y_0, R)$. Wtedy $f(X) \subset B(y_0, R+\varepsilon)$.

3.4. Przestrzenie spójne

Definicja 3.4.1. Przestrzeń metryczną (X,ϱ) nazywamy ***spójną***, jeżeli z tego, że $X = U \cup V$, gdzie U i V są zbiorami otwartymi takimi, że $U \cap V = \varnothing$ wynika, że $U = \varnothing$ lub $V = \varnothing$.

Zbiór $Y \subset X$ nazywamy ***spójnym***, jeżeli Y z metryką indukowaną jest przestrzenią spójną.

Twierdzenie 3.4.2. *Niech $\varnothing \neq P \subset \mathbb{R}$. Wtedy zbiór P jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy P jest przedziałem.*

Dowód. ($\Longrightarrow$): Przypuśćmy, że P nie jest przedziałem. Wtedy istnieją $a, b \in P$, $a < b$, oraz $c \in (a,b) \setminus P$. Biorąc $U := P \cap (-\infty, c)$, $V := P \cap (c, +\infty)$, dostajemy sprzeczność ze spójnością.

($\Longleftarrow$): Przypuśćmy, że przedział P nie jest spójny, czyli istnieją otwarte w P, niepuste zbiory A oraz B takie, że $A \cap B = \varnothing$ oraz $P = A \cup B$. Niech $a \in A$, $b \in B$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a < b$. Zdefiniujmy $c := \sup\{x \in A : x < b\}$. Oczywiście, $a \leqslant c \leqslant b$, a więc $c \in P$. Mamy dwie możliwości:

- $c \in A$. Wtedy $c < b$. Z otwartości zbioru A w P istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $[c, c+\varepsilon) \subset A$ oraz $c+\varepsilon < b$ — sprzeczność.
- $c \in B$. Wtedy, podobnie jak poprzednio, dostajemy istnienie $\varepsilon > 0$ takiego, że $(c-\varepsilon, c] \subset B$ i $c - \varepsilon > a$ — sprzeczność. □

3.5. Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych

Definicja 3.5.1. Niech $(X_1, \varrho_1), \dots, (X_N, \varrho_N)$ będą *niepustymi* przestrzeniami metrycznymi i niech $X := X_1 \times \dots \times X_N$. Dla $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in X$ niech

$$\varrho(x,y) := \varrho_1(x_1, y_1) + \dots + \varrho_N(x_N, y_N).$$

Obserwacja 3.5.2. (a) (X,ϱ) jest przestrzenią metryczną.

(b) Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$, $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,N})$, mamy:

$$a_n \xrightarrow{\varrho} a_0 \iff a_{n,j} \xrightarrow{\varrho_j} a_{0,j},\ j = 1, \dots, N.$$

(c) Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,N})$, mamy:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(X,\varrho) \iff (a_{n,j})_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w (X_j, ϱ_j), $j = 1, \dots, N$.

(d) Niech $\varphi : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będzie taka, że dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathbb{R}_+^N$ mamy:
  (i) $\varphi(\xi) = 0 \iff \xi = 0$,
  (ii) $\xi \leqslant \eta \Longrightarrow \varphi(\xi) \leqslant \varphi(\eta)$, [5]
  (iii) $\varphi(\xi + \eta) \leqslant \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$.

[5] $(\xi_1, \dots, \xi_N) \leqslant (\eta_1, \dots, \eta_N) :\iff \xi_j \leqslant \eta_j,\ j = 1, \dots, N$.

Zdefiniujmy
$$d(x,y) := \varphi(\varrho_1(x_1,y_1),\dots,\varrho_N(x_N,y_N)), \quad x=(x_1,\dots,x_N),\ y=(y_1,\dots,y_N)\in X.$$

Wtedy (X,ϱ) jest przestrzenią metryczną. Istotnie, jedyną wątpliwość może budzić nierówność trójkąta. Mamy
$$\begin{aligned} d(x,z)+d(z,y) &= \varphi(\varrho_1(x_1,z_1),\dots,\varrho_N(x_N,z_N)) + \varphi(\varrho_1(z_1,y_1),\dots,\varrho_N(z_N,y_N)) \\ &\overset{\text{(iii)}}{\geqslant} \varphi(\varrho_1(x_1,z_1)+\varrho_1(z_1,y_1),\dots,\varrho_N(x_N,z_N)+\varrho_N(z_N,y_N)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{\geqslant} \varphi(\varrho_1(x_1,y_1),\dots,\varrho_N(x_N,y_N)) = d(x,y). \end{aligned}$$

Ćwiczenie: Kiedy $d\sim\varrho$? Kiedy d i ϱ są porównywalne?

Twierdzenie 3.5.3. *Niech*
$$\varphi_p(\xi) := \Big(\sum_{j=1}^N \xi_j^p\Big)^{\frac{1}{p}},\ \varphi_\infty(\xi) := \max\{\xi_1,\dots,\xi_N\}, \quad \xi=(\xi_1,\dots,\xi_N)\in\mathbb{R}_+^N, \quad p\in[1,+\infty).$$
Wtedy
$$\sum_{j=1}^N \xi_j\eta_j \leqslant \varphi_p(\xi)\varphi_q(\eta), \quad \xi,\eta\in\mathbb{R}_+^N,\ p,q\in[1,+\infty],\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \ \ \text{(nierówność Höldera)},$$
$$\varphi_p(\xi+\eta)\leqslant\varphi_p(\xi)+\varphi_p(\eta), \quad \xi,\eta\in\mathbb{R}_+^N,\ p\in[1,+\infty] \ \ \text{(nierówność Minkowskiego)}.$$
Ponadto:

- *dla $1<p,q<+\infty$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}_{>0}^N$ równość w nierówności Höldera zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $t>0$ mamy $\xi_j^p = t\eta_j^q$, $j=1,\dots,N$.*
- *dla $1<p<+\infty$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}_{>0}^N$ równość w nierówności Minkowskiego zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $t>0$ mamy $\xi=t\eta$.*

Obserwacja 3.5.4. (a) $\lim_{p\to+\infty}\varphi_p(\xi)=\varphi_\infty(\xi)$ (por. Przykład 2.2.10).

(b) Z nierówności Höldera dla $p=q=2$ wynika nierówność Schwarza (por. Twierdzenie 1.12.3).

Dowód Twierdzenia 3.5.3. Nierówność Höldera: Nierówność jest oczywista jeżeli $(p,q)\in\{(1,+\infty),(+\infty,1)\}$. Możemy więc założyć, że $1<p,q<+\infty$. Ponadto możemy założyć, że $\xi_j>0$ i $\eta_j>0$, $j=1,\dots,N$ (Ćwiczenie). Zastępując ξ przez $\frac{\xi}{\varphi_p(\xi)}$ oraz η przez $\frac{\eta}{\varphi_q(\eta)}$, sprowadzamy dowód do przypadku $\varphi_p(\xi)=\varphi_q(\eta)=1$. Poniżej skorzystamy z dówch własności funkcji $x\longmapsto e^x$, które poznamy w przyszłości:

— funkcja $\mathbb{R}\ni x\longmapsto e^x\in(0,+\infty)$ jest surjektywna (Twierdzenie 4.4.16),

— funkcja $\mathbb{R}\ni x\longmapsto e^x$ jest silnie wypukła (§ 6.8), tzn.
$$e^{\mu x+(1-\mu)y} < \mu e^x+(1-\mu)e^y, \quad x,y\in\mathbb{R},\ x\neq y,\ \mu\in(0,1). \tag{*}$$

Niech $\xi_j=e^{t_j/p}$, $\eta_j=e^{u_j/q}$, $j=1,\dots,N$. Mamy więc
$$\sum_{j=1}^N\xi_j\eta_j = \sum_{j=1}^N e^{t_j/p+u_j/q} \leqslant \sum_{j=1}^N\Big(\frac{1}{p}e^{t_j}+\frac{1}{q}e^{u_j}\Big) = \sum_{j=1}^N\Big(\frac{1}{p}\xi_j^p+\frac{1}{q}\eta_j^q\Big) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Rozważmy teraz problem równości w nierówności Höldera. Jeżeli spełniony jest warunek $\xi_j^p=t\eta_j^q$, $j=1,\dots,N$, to wtedy
$$\sum_{j=1}^N\xi_j\eta_j = \sum_{j=1}^N t^{1/p}\eta_j^{q/p+1} = t^{1/p}\sum_{j=1}^N\eta_j^q.$$
Z drugiej strony,
$$\varphi_p(\xi)\varphi_q(\eta) = \Big(\sum_{j=1}^N t\eta_j^q\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^N\eta_j^q\Big)^{1/q} = t^{1/p}\sum_{j=1}^N\eta_j^q.$$

W drugą stronę, jeżeli w nierówności Höldera zachodzi równość, to na podstawie (*) w postaci zredukowanej musi być $t_j=u_j$, $j=1,\dots,N$. Oznacza to, że $\xi_j^p=\eta_j^q$, $j=1,\dots,N$, dla postaci zredukowanej. Stąd $\frac{\xi_j^p}{\varphi_p(\xi)}=\frac{\eta_j^q}{\varphi_q(\eta)}$, $j=1,\dots,N$, dla postaci wyjściowej.

Nierówność Minkowskiego: Po pierwsze zauważmy, że dla $p = 1$ nierówność Minkowskiego jest oczywista. Możemy więc założyć, że $p > 1$ oraz $\sum_{j=1}^{N}(\xi_j + \eta_j)^p > 0$. Niech $q := \frac{p}{p-1}$. Wtedy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Na podstawie nierówności Höldera mamy więc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}(\xi_j+\eta_j)^p &= \sum_{j=1}^{N}\xi_j(\xi_j+\eta_j)^{p-1} + \sum_{j=1}^{N}\eta_j(\xi_j+\eta_j)^{p-1}\\ &\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \Big(\sum_{j=1}^{N}\xi_j^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^{N}(\xi_j+\eta_j)^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{j=1}^{N}\eta_j^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^{N}(\xi_j+\eta_j)^{(p-1)q}\Big)^{1/q}\\ &= \Big(\sum_{j=1}^{N}\xi_j^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^{N}(\xi_j+\eta_j)^{p}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{j=1}^{N}\eta_j^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^{N}(\xi_j+\eta_j)^{p}\Big)^{1/q}. \qquad (**)\end{aligned}$$

Dzieląc obie strony przez $\big(\sum_{j=1}^{N}(\xi_j+\eta_j)^p\big)^{1/q}$ dostajemy żądaną nierówność Minkowskiego.

Przechodzimy do problemu równości w nierówności Minkowskiego. Jeżeli $\xi = t\eta$, to

$$\varphi_p(\xi+\eta) = (1+t)\varphi_p(\eta) = \varphi_p(t\eta) + \varphi_p(\eta) = \varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta).$$

W drugą stronę, jeżeli w nierówności Minkowskiego zachodzi równość, to w (**) w obu miejscach, w których stosowaliśmy nierówność Höldera musi być równość, a więc $\xi_j^p = t_1(\xi_j+\eta_j)^{(p-1)q}$ oraz $\eta_j^p = t_2(\xi_j+\eta_j)^{(p-1)q}$, $j = 1,\dots,N$, dla pewnych $t_1, t_2 > 0$. Wynika stąd natychmiast, że $\xi = t\eta$ dla pewnego $t > 0$. □

Ćwiczenie 3.5.5. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na równość w nierówności Höldera (odp. Minkowskiego) bez założenia, że $\xi_j, \eta_j > 0$, $j = 1,\dots,N$.

Wniosek 3.5.6. *Niech (X_1,ϱ_1), ..., (X_N,ϱ_N) będą niepustymi przestrzeniami metrycznymi i niech $X := X_1\times\dots\times X_N$. Wtedy funkcje*

$$d_p(x,y) := \Big(\sum_{j=1}^{N}(\varrho_j(x_j,y_j))^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p\in[1,+\infty),$$
$$d_\infty(x,y) := \max\{\varrho_1(x_1,y_1),\dots,\varrho_N(x_N,y_N)\}, \quad x=(x_1,\dots,x_N),\ y=(y_1,\dots,y_N)\in X,$$

są metrykami na X. Ponadto:
- *$d_\infty \leqslant d_p \leqslant N^{1/p}d_\infty$, $p\in[1,+\infty)$. W szczególności, metryki d_p i d_∞ są porównywalne.*
- *$d_1 = \varrho$ (zob. Definicja 3.5.1). W szczególności, metryki d_p i d_∞ zadają topologię iloczynu kartezjańskiego.*

Obserwacja 3.5.7. (a) Metryka d_p nosi nazwę *metryki ℓ^p*.
(b) Metryka d_∞ nosi nazwę *metryki ℓ^∞* lub też *metryki maksimum*.
(c) Jeżeli $(X_j,\varrho_j) = (\mathbb{K},\varrho_{\mathbb{K}})$, $j = 1,\dots,N$, to

$$d_p(x,y) := \Big(\sum_{j=1}^{N}|x_j-y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$
$$d_\infty(x,y) := \max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_N-y_N|\}, \quad x=(x_1,\dots,x_N),\ y=(y_1,\dots,y_N)\in\mathbb{K}^N.$$

(d) Szczególnie ważna jest metryka d_2. Dla przykładu, w przypadku, gdy $(X_j,\varrho_j) = (\mathbb{K},\varrho_{\mathbb{K}})$, $j = 1,\dots,N$, standardową metryką w $\mathbb{K}^N$ jest *metryka euklidesowa* $d_2(x,y) := \sqrt{\sum_{j=1}^{N}|x_j-y_j|^2}$.

Dowód Wniosku 3.5.6. Stosujemy Obserwację 3.5.2(d). □

Twierdzenie 3.5.8. (a) *(X,ϱ) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy (X_j,ϱ_j) jest zupełna, $j = 1,\dots,N$. W szczególności, $\mathbb{R}^N$ jest przestrzenią zupełną.*
(b) *(X,ϱ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy (X_j,ϱ_j) jest zwarta, $j = 1,\dots,N$.*
(c) *(X,ϱ) jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy (X_j,ϱ_j) jest spójna, $j = 1,\dots,N$.*

Dowód. (a), (b) — ĆWICZENIE.
(c) — ĆWICZENIE*. $\square$

3.6. Metryka Hausdorffa

Dla przestrzeni metrycznej (X, ϱ), niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów X. Zdefiniujmy *metrykę Hausdorffa*

$$h(A, B) := \max\Big\{\sup\{\varrho(x, B) : x \in A\},\ \sup\{\varrho(y, A) : y \in B\}\Big\}, \quad A, B \in \mathcal{F}.$$

Obserwacja 3.6.1. Poniżej $A, B, C \in \mathcal{F}$.

(a) Przypomnijmy, że $a \in C \iff \operatorname{dist}(a, C) = 0$.
(b) Jeżeli $h(A, B) = 0$, to $A \subset \overline{B}$ oraz $B \subset \overline{A}$, to oznacza, że $A = B$.
(c) $h(A, B) = h(B, A)$.
(d) $h(A, B) < +\infty$. Istotnie, jeżeli $A, B \subset B(a, r)$, to dla $x \in A$ mamy $\varrho(x, B) = \inf\{\varrho(x, z) : z \in B\} \leqslant \inf\{\varrho(x, a) + \varrho(a, z) : z \in B\} \leqslant 2r$. Podobnie, $\varrho(x, A) \leqslant 2r$, $x \in B$.
(e) $h(A, B) = \sup\{|\varrho(x, A) - \varrho(x, B)| : x \in X\}$. Istotnie, wystarczy pokazać, że $\sup\{\varrho(x, A) - \varrho(x, B) : x \in X\} = \sup\{\varrho(y, A) : y \in B\}$. Nierówność „$\geqslant$” jest oczywista. Ustalmy $x_0 \in X$ oraz weźmy dowolne $a \in A$, $b \in B$. Wtedy $\varrho(x_0, a) - \varrho(x_0, b) \leqslant \varrho(a, b)$. Biorąc $\inf_{a \in A}$ dostajemy $\varrho(x_0, A) - \varrho(x_0, b) \leqslant \varrho(b, A) \leqslant \sup\{\varrho(y, A) : y \in B\}$. Biorąc teraz $\inf_{b \in B}$ dostajemy poszukiwaną nierówność.
(f) $h(A, B) \leqslant h(A, C) + h(C, B)$. W szczególności, $(\mathcal{F}, h)$ jest przestrzenią metryczną.
(g) $h(A, B) \leqslant r \iff A \subset B^{(r)}$ oraz $B \subset A^{(r)}$, gdzie $C^{(r)} := \{z \in X : \operatorname{dist}(z, C) \leqslant r\}$. Zauważmy, że $C^{(r)} \in \mathcal{F}$.
(h) $|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)| \leqslant 2h(A, B)$. Istotnie, wystarczy pokazać, że $\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B) \leqslant 2h(A, B)$. Ustalmy $x, y \in A$. Wtedy

$$\begin{aligned}\varrho(x, y) - \operatorname{diam}(B) &= \inf_{u, v \in B}(\varrho(x, y) - \varrho(u, v)) \overset{\text{Obs. 3.1.7(n)}}{\leqslant} \inf_{u, v \in B}(\varrho(x, u) + \varrho(y, v)) \\ &\leqslant \varrho(x, B) + \varrho(y, B) \leqslant 2 \sup_{z \in A} \varrho(z, B) \leqslant 2h(A, B).\end{aligned}$$

Teraz wystaczy wziąć $\sup_{x, y \in A}$.
(i) ĆWICZENIE*. Niech $K \subset X$ będzie ustalonym niepustym zbiorem zwartym i niech $\mathfrak{K} := \{A \in \mathcal{F} : A \subset K\}$. Wtedy $(\mathfrak{K}, h)$ jest przestrzenią zwartą.

ROZDZIAŁ 4

Ciągłość

4.1. Funkcje ciągłe

Definicja 4.1.1. Niech (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \longrightarrow Y$ i $a \in X$. Powiemy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0} : f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon).$$

Równoważnie:

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in X} : \varrho_X(x,a) < \delta \Longrightarrow \varrho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Jest to tzw. *definicja Cauchy'ego ciągłości*. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$ — *jest to oznaczenie niestandardowe, dla potrzeb naszego wykładu*.

Mówimy, że $f : X \longrightarrow Y$ jest *ciągła*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Ponadto, $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Mówimy, że f jest *jednostajnie ciągła*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x,y\in X} : \varrho_X(x,y) < \delta \Longrightarrow \varrho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Mówimy, że f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 0$, jeżeli istnieje stała $M \geqslant 0$ taka, że

$$\varrho_Y(f(x), f(y)) \leqslant M(\varrho_X(x,y))^\alpha, \quad x, y \in X.$$

Dla $\alpha = 1$, warunek Höldera nosi nazwę *warunku Lipschitza* (1).

Mówimy, że odwzorowanie bijektywne $f : X \longrightarrow Y$ jest *homeomorfizmem*, jeżeli $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $f^{-1} \in \mathcal{C}(Y, X)$.

Obserwacja 4.1.2. (a) Każde odwzorowanie jednostajnie ciągłe jest ciągłe.
(b) Każde odwzorowanie spełniające warunek Höldera jest jednostajnie ciągłe.

Ćwiczenie 4.1.3. (a) Znaleźć przykład odwzorowania ciągłego, które nie jest jednostajnie ciągłe.
(b) Znaleźć przykład odwzorowania jednostajnie ciągłego, które dla dowolnego $\alpha > 0$ nie spełnia warunku Höldera z wykładnikiem α.
(c) Udowodnić, że odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup\left\{\frac{\varrho_Y(f(x), f(y))}{(\varrho_X(x,y))^\alpha} : x, y \in X,\ x \neq y\right\} < +\infty.$$

(d) Znaleźć przykład ciągłego odwzorowania bijektywnego $f : X \longrightarrow Y$ takiego, że f^{-1} nie jest ciągłe.

Twierdzenie 4.1.4. *Niech $f : X \longrightarrow Y$, $a \in X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
(i) *$f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$;*
(ii) *dla dowolnego otoczenia V punktu $f(a)$ istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(U) \subset V$;*
(iii) *dla dowolnego otoczenia V punktu $f(a)$ zbiór $f^{-1}(V)$ jest otoczeniem punktu a;*
(iv) *dla dowolnego ciągu $x_n \longrightarrow a$ mamy $f(x_n) \longrightarrow f(a)$; jest to tzw.* definicja Heinego (2) ciągłości.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $B(f(a),\varepsilon) \subset V$ i niech $\delta > 0$ będzie dobrane zgodnie z (i). Wtedy $U := B(a,\delta)$ jest otoczeniem punktu a oraz $f(U) \subset B(f(a),\varepsilon) \subset V$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Oczywiste.

(1) Rudolf Lipschitz (1832–1903).
(2) Eduard Heine (1821–1881).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ kule $V := B(f(a), \varepsilon)$ jest otoczeniem $f(a)$. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Niech $x_n \in B(a, \delta)$ dla $n \geqslant N$. Wtedy $f(x_n) \in B(f(a), \varepsilon)$ dla $n \geqslant N$, czyli $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ nie istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Wtedy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in B(a, 1/n)$, $\varrho_Y(f(x_n), f(a)) \geqslant \varepsilon$; sprzeczność. □

Twierdzenie 4.1.5 (Składanie odwzorowań ciągłych)**.** *Jeżeli* $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z; f(a))$, *to* $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z; a)$.

Dowód. ĆWICZENIE. □

Twierdzenie 4.1.6. *Niech* $f : X \longrightarrow Y$. *Wtedy następujące warunki są równoważne:*
(i) $f \in \mathcal{C}(X, Y)$;
(ii) *dla dowolnego zbioru otwartego* $V \subset Y$ *zbiór* $f^{-1}(V)$ *jest otwarty;*
(iii) *dla dowolnego* $a \in X$ *oraz dla dowolnego ciągu* $x_n \longrightarrow a$ *mamy* $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Dowód. ĆWICZENIE. □

Twierdzenie 4.1.7 (Składanie odwzorowań ciągłych)**.** *Jeżeli* $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$, *to* $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z)$.

Dowód. ĆWICZENIE. □

Twierdzenie 4.1.8. *Niech* $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$.
(a) *Jeżeli dodawanie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x + y \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*
(b) *Jeżeli mnożenie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x \cdot y \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*
(c) *Jeżeli dzielenie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto \frac{x}{y} \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*
(d) *Jeżeli* $A \subset \mathbb{R}$ *and* $B \subset \mathbb{R}_{>0}$, *to potęgowanie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x^y \in \mathbb{R}_{>0}$ *jest odwzorowaniem ciągłym.*

Dowód. Por. § 2.2. □

Twierdzenie 4.1.9. (a) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $f(x) + g(x)$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$, *to* $f + g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.
(b) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $f(x) \cdot g(x)$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$, *to* $f \cdot g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.
(c) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$, *to* $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.
(d) *Jeżeli* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ *są ciągłe w punkcie* a, *to* $g^f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}; a)$.

Dowód. Jest wniosek z Twierdzeń 4.1.7 i 4.1.8. □

Ćwiczenie 4.1.10 (Zob. Obserwacja 3.1.2(b))**.** Niech $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}.$$

(a) Udowodnić, że φ jest homeomorfizmem.
(b) Udowodnić, że $f \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a) \Longleftrightarrow \varphi \circ f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1]; a)$.

Przykład 4.1.11. (a) Dowolny wielomian $p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $p(z) := a_0 + \cdots + a_n z^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, jest ciągły.
(b) Dla dowolnych wielomianów $p, q : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $q \not\equiv 0$, *funkcja wymierna* $\frac{p}{q}$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{K} \setminus q^{-1}(0)$.
(c) Funkcja *signum (znak)* $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \{-1, 0, +1\}$,

$$\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ -1, & \text{jeżeli } x < 0 \end{cases},$$

jest ciągła w każdym punkcie poza zerem.
(d) *Funkcja Dirichleta* (3) $d := \chi_{\mathbb{Q}, \mathbb{R}}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie.

---

(3) Peter Dirichlet (1805–1859).

(e) Niech $h(x) := xd(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy h jest ciągła tylko w $x = 0$.

(f) Funkcja *moduł*, $\mathbb{K} \ni z \longmapsto |z| \in \mathbb{R}_+$, jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza.

(g) Funkcja *cecha* (lub *część całkowita*) $[\ ] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $[x] := \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$, $x \in \mathbb{R}$, jest ciągła w każdym punkcie zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ale nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $\mathbb{Z}$. Czasami też będziemy pisać $\lfloor x \rfloor$ zamiast $[x]$.

(h) Niech $\lceil x \rceil := \inf\{k \in \mathbb{Z} : k \geqslant x\}$. Gdzie jest ciągła funkcja $x \longrightarrow \lceil x \rceil$? — Ćwiczenie.

(i) *Funkcja Riemanna* (4) $r : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$,

$$r(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z},\ (p, q) = 1 \end{cases},$$

jest ciągła w punktach zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ale nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $\mathbb{Q}$.

4.2. Granica w punkcie

Definicja 4.2.1. Niech $A \subset X$, $f : A \longrightarrow Y$, $a \in A'$, $b \in Y$. Wtedy mówimy, że f ma w punkcie a granicę b, jeżeli dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$ mamy $f(x_n) \longrightarrow b$. Piszemy wtedy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Obserwacja 4.2.2. (a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \widetilde{f} \in \mathcal{C}(A \cup \{a\}, Y; a)$, gdzie $\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{jeżeli } x \in A \setminus \{a\} \\ b, & \text{jeżeli } x = a \end{cases}$.

(b) Dla $f : X \longrightarrow Y$ i $a \in X$ mamy $f \in \mathcal{C}(X, Y; a) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Twierdzenie 4.2.3. *Jeżeli* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z; b)$, *to* $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = g(b)$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Ćwiczenie 4.2.4. Pokazać, że następujące twierdzenie nie jest prawdziwe.

Niech $f : A \longrightarrow B \subset Y$, $a \in A'$, $b \in B'$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$. Wtedy $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Definicja 4.2.5. W przypadku $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ można również mówić o *granicy górnej i dolnej funkcji f w punkcie a*:

$$\limsup_{x \to a} f(x) := \sup \mathcal{S}(f, a), \quad \liminf_{x \to a} f(x) := \inf \mathcal{S}(f, a),$$

gdzie

$$\mathcal{S}(f, a) := \{g \in \overline{\mathbb{R}} : \exists_{(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}} : x_n \longrightarrow a,\ f(x_n) \longrightarrow g\}.$$

Obserwacja 4.2.6. (a) Niech $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy powyższe pojęcia redukują się do poprzednio wprowadzonych $\limsup\limits_{n \to +\infty} f(n)$ i $\liminf\limits_{n \to +\infty} f(n)$.

(b) $\liminf\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \limsup\limits_{x \to a} f(x)$.

(c) Jeżeli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\liminf\limits_{x \to a} f(x) = \limsup\limits_{x \to a} f(x) = g$.

(d) $\limsup\limits_{x \to a} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to a} f(x) \in \mathcal{S}(f, a)$.

(e) Jeżeli $\liminf\limits_{x \to a} f(x) = \limsup\limits_{x \to a} f(x) =: g$, to $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$.

(f) Jeżeli $g := \limsup\limits_{x \to a} f(x) < +\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M > g$ istnieje $r > 0$ takie, że $f(x) \leqslant M$ dla $x \in B(a, r) \setminus \{a\}$.

(g) Jeżeli $g := \liminf\limits_{x \to a} f(x) > -\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M < g$ istnieje $r > 0$ takie, że $f(x) \geqslant M$ dla $x \in B(a, r) \setminus \{a\}$.

Definicja 4.2.7. Jeżeli $X = \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset [-\infty, a]$, $f : A \longrightarrow Y$ i $a \in A'$, to $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ nosi nazwę *granicy lewostronnej* i piszemy wtedy $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$. Analogicznie definiujemy *granicę prawostronną* $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$, gdy $A \subset [a, +\infty]$ i $a \in A'$.

---

(4) Bernhard Riemann (1826–1866).

Przykład 4.2.8 (Moduł ciągłości)**.** Dla $f : X \longrightarrow Y$ definiujemy *moduł ciągłości* funkcji f:

$$\omega_f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow [0, +\infty], \quad \omega_f(\delta) := \sup\{\varrho_Y(f(x), f(y)) : x, y \in X,\ \varrho_X(x, y) \leqslant \delta\}.$$

Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

4.3. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Twierdzenie 4.3.1 (Banach [5])**.** *Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $f : X \longrightarrow X$ będzie odwzorowaniem* zwężającym*, tzn. takim, że $d(f(x), f(y)) \leqslant \theta d(x, y)$, $x, y \in X$, gdzie $\theta \in [0, 1)$. Wtedy dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorem $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, jest zbieżny do jedynego* punktu stałego *odwzorowania f, tzn. do punktu $x^* \in X$ takiego, że $f(x^*) = x^*$.*

Dowód. Odwzorowanie f spełnia warunek Lipschitza ze stałą θ. Jest więc w szczególności ciągłe. Jeżeli ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnego $x^* \in X$, to musi to być punkt stały, co wynika ze związku $x_{n+1} = f(x_n)$ oraz ciągłości f. Punkt stały jest jedyny. Jeżeli bowiem $a, b \in X$ byłyby dwoma różnymi punktami stałymi, to $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leqslant \theta d(a, b) < d(a, b)$, co daje sprzeczność. Pozostaje więc pokazać, że ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny. Ponieważ przestrzeń jest zupełna wystarczy pokazać, że spełnia warunek Cauchy'ego. Mamy

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \theta d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \theta^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \dots \leqslant \theta^n d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

W takim razie

$$\begin{aligned} &d(x_{n+k}, x_n) \leqslant d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (\theta^{n+k-1} + \theta^{n+k-2} + \dots + \theta^n) d(x_1, x_0) = \frac{1 - \theta^k}{1 - \theta} \theta^n d(x_1, x_0) \leqslant \frac{1}{1 - \theta} \theta^n d(x_1, x_0), \quad n, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

skąd natychmiast wynika, że $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego. □

Przykład 4.3.2. Niech $X := (0, \frac{1}{4}) \subset \mathbb{R}$ i niech $f : X \longrightarrow X$, $f(x) = x^2$; X nie jest przestrzenią zupełną! Wtedy f jest odwzorowaniem zwężającym ($|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$) bez punktu stałego.

4.4. Własności funkcji ciągłych

Twierdzenie 4.4.1. *Niech X będzie przestrzenią zwartą i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy $f(X)$ jest przestrzenią zwartą (z metryką indukowaną z Y).*

Dowód. Niech $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset f(X)$, $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ X jest zwarta, istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ oraz $x_0 \in X$ takie, że $x_{n_k} \longrightarrow x_0$. Wobec ciągłości f mamy $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$. □

Obserwacja 4.4.2. Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem zwartym. Wtedy $\inf K, \sup K \in K$.

Jako wniosek dostajemy.

Twierdzenie 4.4.3 (Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów)**.** *Niech X będzie niepustą przestrzenią zwartą oraz niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieją punkty $x_\pm \in X$ takie, że $f(x_+) =$* $\sup f(X)$*, $f(x_-) =$* $\inf f(X)$.

Obserwacja 4.4.4. Niech $\mathcal{CB}(X, Y) := \mathcal{C}(X, Y) \cap \mathcal{B}(X, Y)$.
(a) $\mathcal{CB}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$, gdy X jest przestrzenią zwartą.
(b) $\mathcal{CB}(X, Y)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{B}(X, Y)$.
(c) Przestrzeń $\mathcal{CB}(X, Y)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest zupełna.
(d) Jeżeli E jest przestrzenią Banacha, to przestrzeń $\mathcal{CB}(X, E)$ wraz z normą Czebyszewa jest przestrzenią Banacha.

Twierdzenie 4.4.5. *Jeżeli $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, to dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ spełniony jest warunek: $\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{\delta > 0}\ \forall_{a \in K} :\ f(\overline{B}_\varrho(a, \delta)) \subset \overline{B}_d(f(a), \varepsilon)$. W szczególności, jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to f jest jednostajnie ciągłe.*

---

[5] Stefan Banach (1892–1945).

Dowód. Ponieważ f jest ciągła, zatem dla dowolnego $a \in K$ istnieje $r(a) > 0$ takie, że $f(\overline{B}_\varrho(a, r(a))) \subset \overline{B}_d(f(a), \frac{1}{2}\varepsilon)$. Wobec zwartości zbioru K, istnieje skończona liczba punktów $a_1, \dots, a_N \in K$ takich, że $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\varrho(a_i, \frac{1}{2}r(a_i))$. Niech $\delta := \frac{1}{2}\min\{r(a_1), \dots, r(a_N)\}$. Weźmy dowolny punkt $a \in K$, $a \in B_\varrho(a_{i_0}, \frac{1}{2}r(a_{i_0}))$, i niech $x \in \overline{B}_\varrho(a, \delta)$. Mamy $\varrho(x, a_{i_0}) \leqslant \varrho(x, a) + \varrho(a, a_{i_0}) \leqslant \delta + \frac{1}{2}r(a_{i_0}) \leqslant r(a_{i_0})$. Wynika stąd, że $d(f(x), f(a_{i_0})) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ i ostatecznie $d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f(a_{i_0})) + d(f(a), f(a_{i_0})) \leqslant \varepsilon$. □

Twierdzenie 4.4.6. *Niech X będzie przestrzenią zwartą i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie ciągłą bijekcją. Wtedy f^{-1} jest ciągła, czyli f jest homeomorfizmem.*

Dowód. Niech $y_n \longrightarrow y_0$, $x_n := f^{-1}(y_n)$, $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Chcemy pokazać, że $x_n \longrightarrow x_0$. Przypuśćmy, że $x_n \not\longrightarrow x_0$, co oznacza, że istnieje $\varepsilon_0 > 0$ oraz podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ takie, że $\varrho_X(x_{n_k}, x_0) \geqslant \varepsilon_0$, $k \in \mathbb{N}$. Wobec zwartości X możemy założyć, że $x_{n_k} \longrightarrow x^*$. Wynika, stąd, że $\varrho_X(x^*, x_0) \geqslant \varepsilon_0$. Z drugiej strony $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x^*)$, skąd wynika, że $f(x^*) = f(x_0)$ — sprzeczność. □

Wniosek 4.4.7. *Rzut stereograficzny $R : \boldsymbol{S} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest homeomorfizmem (por. Przykład 3.1.3).*

Twierdzenie 4.4.8. *Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy $f(X)$ jest przestrzenią spójną (z metryką indukowaną z Y).*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(X) = U \cup V$, gdzie U, V są niepuste, rozłączne i otwarte. Wtedy $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, gdzie $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ są niepuste, rozłączne i otwarte (wobec ciągłości) — sprzeczność. □

Definicja 4.4.9. Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma *własność Darboux* (6), jeżeli dla dowolnych $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, $\alpha < \beta$, i dla dowolnego $\gamma \in (\alpha, \beta)$ istnieje $c \in X$ takie, że $f(c) = \gamma$; innymi słowy: f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie.

Twierdzenie 4.4.10. *Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy f ma własność Darboux.*

Obserwacja 4.4.11. Istnieją funkcje nieciągłe, posiadające własność Darboux (zob. Przykład 6.2.14).

Ćwiczenie 4.4.12. Wykazać, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego posiada miejsce zerowe.

Obserwacja 4.4.13. Niech $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, będzie funkcją rosnącą. Wtedy $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \sup f((a, b))$ oraz $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \inf f((a, b))$.

Twierdzenie 4.4.14. *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, będzie funkcją monotoniczną. Wtedy:*

(a) *funkcja f nie jest ciągła w co najwyżej przeliczalnej liczbie punktów;*
(b) *jeżeli f nie jest ciągła, to zbiór $f(P)$ nie jest spójny.*

Dowód. Możemy założyć, że f jest rosnąca.

(a) Niech

$$N(f) := \{x \in P : f \text{ nie jest ciągła w } x\}.$$

Dla dowolnego punktu $c \in \operatorname{int} P$ niech $L(c) := \lim\limits_{x \to c-} f(x)$, $R(c) := \lim\limits_{x \to c+} f(x)$. Jeżeli lewy koniec c przedziału P należy do niego, to kładziemy $L(c) := f(c)$, $R(c) := \lim\limits_{x \to c+} f(x)$. Jeżeli prawy koniec c przedziału P należy do niego, to kładziemy $L(c) := \lim\limits_{x \to c-} f(x)$, $R(c) := f(c)$.

Wtedy $-\infty < L(c) \leqslant R(c) < \infty$ oraz dla dowolnych $c_1, c_2 \in P$, $c_1 < c_2$, mamy $R(c_1) \leqslant L(c_2)$, a stąd

$$(L(c_1), R(c_1)) \cap (L(c_2), R(c_2)) = \varnothing.$$

W takim razie $c \in N(f) \iff L(c) < R(c) \iff \exists_{q(c) \in \mathbb{Q} \cap (L(c), R(c))}$. Zbudowaliśmy injekcję $N(f) \longrightarrow \mathbb{Q}$.

(b) Przypuśćmy, że $a \in N(f) \neq \varnothing$. Z poprzednich rozważań istnieje $q \in (L(a), R(a)) \setminus \{f(a)\}$. Zdefiniujmy $U := (-\infty, q) \cap f(P)$, $V := (q, +\infty) \cap f(P)$. Zbiory U oraz V są otwarte w $f(P)$, $U, V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$ oraz $U \cup V = f(P)$, co oznacza, że $f(P)$ nie jest zbiorem spójnym. □

Twierdzenie 4.4.15. *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, będzie ciągłą injekcją. Wtedy:*

(6) Jean Darboux (1842–1917).

(a) *f jest silnie monotoniczna;*

(b) *funkcja odwrotna $f^{-1} : f(P) \longrightarrow P$ jest ciągła.*

Dowód. (a) Wystarczy pokazać, że dla dowolnego przedziału $[a, b] \subset P$, $a < b$, funkcja $f|_{[a,b]}$ jest ściśle monotoniczna. Ustalmy a, b i przypuśćmy, że $f(a) < f(b)$ (przypadek $f(a) > f(b)$ jest analogiczny — Ćwiczenie). Z twierdzenia Weierstrassa istnieją $c_-, c_+ \in [a, b]$ takie, że $f(c_-) = \min f([a, b])$ oraz $f(c_+) = \max f([a, b])$. Pokażemy, że $c_- = a$ oraz $c_+ = b$. Przypuśćmy, że np. $a < c_-$ (przypadek $c_+ < b$ jest analogiczny — Ćwiczenie). Wtedy $f(c_-) < f(a) < f(b)$. Z własności Darboux funkcji f wynika istnienie $c \in (c_-, b)$ takiego, że $f(c) = f(a)$, co daje sprzeczność.

Zatem $c_- = a$ i $c_+ = b$.

Ustalmy $a \leqslant x < y \leqslant b$. Przypuśćmy, $f(x) > f(y)$. Wtedy $f(a) \leqslant f(y) < f(x) \leqslant f(b)$. Wobec własności Darboux, istnienie $c \in [a, x]$ taki, że $f(c) = f(y)$, co daje sprzeczność.

(b) Oczywiście $f^{-1} : f(P) \longrightarrow P$ jest funkcją ściśle monotoniczną oraz $f(P)$ jest przedziałem. Ponieważ $f^{-1}(f(P)) = P$, więc z Twierdzenia 4.4.14 wnioskujemy, że f^{-1} jest funkcją ciągłą. $\square$

Twierdzenie 4.4.16. *Dla dowolnego $a > 1$ (odp. $a \in (0, 1)$)* funkcja wykładnicza $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ *jest bijektywna i ściśle rosnąca (odp. malejąca). W szczególności, jest ona homeomorfizmem, funkcją do niej odwrotną jest* funkcja logarytmiczna $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto \log_a x \in \mathbb{R}$.

Piszemy $\ln x := \log_e x$.

Ćwiczenie 4.4.17. Korzystając z własności funkcji wykładniczej wyprowadzić następujące własności funkcji logarytmicznej $\log_a$ dla $a > 0$, $a \neq 1$.

(a) $\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1, x_2 > 0$.

(b) $\log_a(b^x) = x \log_a b$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $a^x = e^{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

4.5. Krzywe

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Każde odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ nazywamy *krzywą*. Zbiór $\gamma^* := \gamma([a, b])$ nazywamy *obrazem geometrycznym* krzywej γ; γ^* jest zbiorem zwartym spójnym.

W przyszłości będziemy zawsze utożsamiać krzywą $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ z dowolną krzywą

$$\gamma \circ \sigma : [c, d] \longrightarrow X,$$

gdzie $\sigma : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ jest bijekcją rosnącą (zwaną *zmianą parametryzacji*). Oczywiście, zmiana parametryzacji nie zmienia obrazu geometrycznego krzywej. W szczególności, można się zawsze ograniczyć do krzywych sparametryzowanych w przedziale $[0, 1]$.

Jeżeli $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ jest krzywą, to:

- $\gamma(a)$ nazywamy *początkiem* krzywej,
- $\gamma(b)$ nazywamy *końcem* krzywej,
- jeżeli $\gamma(a) = \gamma(b)$, to mówimy, że γ jest *zamknięta*,
- jeżeli γ jest odwzorowaniem injektywnym, to mówimy, że γ jest *łukiem Jordana* (7) — wtedy $\gamma : [a, b] \longrightarrow \gamma^*$ jest homeomorfizmem,
- jeżeli γ jest zamknięta oraz $\gamma|_{[a,b)}$ jest odwzorowaniem injektywnym, to mówimy, że γ jest *krzywą Jordana* — wtedy funkcja $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow X$, gdzie $\mathbb{T}$ oznacza okrąg jednostkowy na płaszczyźnie, dana wzorem $\sigma(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) := \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, jest homeomorfizmem.

Dla krzywej $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ definiujemy krzywą *przeciwną*

$$\ominus\gamma : [a, b] \longrightarrow X, \quad \ominus\gamma(t) := \gamma(a + b - t).$$

Widać, że $(\ominus\gamma)^* = \gamma^*$.

Dla krzywych $\gamma_j : [0, 1] \longrightarrow X$, $j = 1, 2$, takich, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ definiujemy ich *sumę*

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow X,\ (\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases};$$

(7) Camille Jordan (1838–1922).

jest to oczywiście krzywa i $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$. (8)

Mówimy, że X jest ***łukowo spójna***, jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje krzywa $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ taka, że $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Każda przestrzeń łukowo spójna jest spójna (ale nie odwrotnie — Ćwiczenie).

Dla $X_1 \neq \varnothing, \dots, X_N \neq \varnothing$ mamy:

$X_1, \dots, X_N$ są przestrzeniami łukowo spójnymi $\Longleftrightarrow$ $X_1 \times \dots \times X_N$ jest przestrzenią łukowo spójną.

4.6. Przestrzenie unormowane

Definicja 4.6.1. *Przestrzenią unormowaną* nad ciałem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) nazywamy dowolną parę $(E, \| \ \|)$, gdzie E jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$, zaś $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją spełniającą następujące trzy warunki:

(a) $\forall_{x \in E} : \ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
(b) $\forall_{\alpha \in \mathbb{K},\, x \in E} : \ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
(c) $\forall_{x, y \in E} : \ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Funkcję $\| \ \|$ nazywamy *normą*.

Obserwacja 4.6.2. (a) $(\mathbb{K}, | \ |)$ jest przestrzenią unormowaną.

(b) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in E$.

(c) Zdefiniujmy $\varrho(x, y) = \varrho_{\| \ \|}(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in E$. Wtedy $\varrho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest metryką *generowaną przez normę*. Oczywiście
$$x_\nu \xrightarrow{\varrho_{\| \ \|}} x_0 \Longleftrightarrow \|x_\nu - x_0\| \longrightarrow 0.$$

(d) Mówimy, że dwie normy $\| \ \|_1, \| \ \|_2 : R \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *równoważne*, jeżeli $\varrho_{\| \ \|_1} \sim \varrho_{\| \ \|_2}$.

(e) Działania w przestrzeni unormowanej są ciągłe. Istotnie,
$$\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\| = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_1,$$
$$\|\alpha x - \alpha_0 x_0\| \leqslant |\alpha - \alpha_0| |x_0| + |\alpha| \|x - x_0\| \leqslant \max\{|\alpha|, \|x_0\|\} \|(\alpha, x) - (\alpha_0, x_0)\|_1.$$

Obserwacja 4.6.3. (a) Podobnie jak dla metryk w iloczynie kartezjańskim przestrzeni unormowanych $(E_1, | \ |_1), \dots, (E_N, | \ |_N)$ możemy wprowadzić wiele norm. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją taką, że:

(i) $\varphi(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \xi = 0$,
(ii) $\xi \leqslant \eta \Longrightarrow \varphi(\xi) \leqslant \varphi(\eta)$,
(iii) $\varphi(\xi + \eta) \leqslant \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$,
(iv) $\varphi(t\xi) = t\varphi(\xi)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Wtedy funkcja dana wzorem
$$\|x\| := \varphi(|x_1|_1, \dots, |x_N|_N), \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in E_1 \times \dots \times E_N,$$
jest normą na $E_1 \times \dots \times E_N$ — Ćwiczenie.

(b) W szczególności, jeżeli $(E_1, | \ |_1), \dots, (E_N, | \ |_N)$ są przestrzeniami unormowanymi, to w $E_1 \times \dots \times E_N$ mamy następujące klasyczne normy (Ćwiczenie):
$$\|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|_j^p \Big)^{1/p} = \textit{norma } l^p, \quad p \geqslant 1,$$
$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|_1, \dots, |x_N|_N\} = \textit{norma } \ell^\infty = \textit{norma maksimum}.$$

W szczególności, normami są funkcje:
$$\|x\|_1 = |x_1|_1 + \dots + |x_N|_N = \textit{norma suma},$$
$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|_j^2 \Big)^{1/2} = \textit{norma euklidesowa}.$$

Zauważmy, że metryki generowane przez te normy odpowiadają metrykom d_p, d_∞, d_1 i d_2 (utworzonym dla $(E_1, \varrho_{| \ |_1}), \dots (E_N, \varrho_{| \ |_N})$ — por. Wniosek 3.5.6. W szczególności, są to normy równoważne, zadające topologię iloczynu kartezjańskiego.

(8) Oznaczenia $\ominus$ i $\oplus$ mają charakter roboczy i nie musimy się do nich zbyt przywiązywać.

(c) Dla przykładu, $\mathbb{K}^N$ jest przestrzenią unormowaną przez *normę euklidesową*

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N.$$

Definicja 4.6.4. Dla $a \in E$, niech

$$B(a,r) := B_{\varrho_{\|\ \|}}(a,r) = \{x \in E : \|x-a\| < r\}, \quad 0 < r \leqslant +\infty,$$
$$\overline{B}(a,r) := \overline{B}_{\varrho_{\|\ \|}}(a,r) = \{x \in E : \|x-a\| \leqslant r\}, \quad 0 \leqslant r < +\infty,$$
$$B(r) := B(0,r), \quad \overline{B}(r) := \overline{B}(0,r).$$

Niech

$$A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\}, \quad A, B \subset E,$$
$$A \cdot B := \{\alpha x : \alpha \in A,\ x \in B\}, \quad A \subset \mathbb{K},\ B \subset E.$$

Ponadto przyjmujemy $a + B := \{a\} + B$, $\alpha \cdot B := \{\alpha\} \cdot B$ (9).

Dla dowolnych $x, y \in E$ definiujemy *odcinek* (*niezorientowany*) (*segment*) o końcach x, y:

$$[x,y] := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}.$$

Zbiór $A \subset E$ nazywamy ***wypukłym***, jeżeli $[x,y] \subset A$ dla dowolnych $x, y \in A$.

Obserwacja 4.6.5. (a) $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$, $r > 0$.

Istotnie, wystarczy pokazać inkluzję $\supset$. W tym celu zauważmy, że jeżeli $x_0 \in \overline{B}(a,r)$, to $a + \theta(x_0 - a) \in B(a,r)$ dla dowolnego $\theta \in [0,1)$.

(b) Mamy następującą własność translatywności kul:

$$B(a,r) = a + B(r), \quad \overline{B}(a,r) = a + \overline{B}(r).$$

Ponadto, $B(r) = r \cdot B(1)$, $\overline{B}(r) = r \cdot \overline{B}(1)$.

(c) Odnotujmy, że $[x,y] = [y,x]$ oraz $[x,x] = \{x\}$. Odcinek jest zbiorem spójnym.

(d) Dla dowolnej rodziny zbiorów wypukłych $(A_i)_{i \in I} \subset E$ zbiór $\bigcap_{i \in I} A_i$ jest wypukły. W szczególności, dla dowolnego zbioru $A \subset E$ istnieje najmniejszy zbiór wypukły $\operatorname{conv} A = \operatorname{conv}(A) \subset E$ zawierający A.

(e) Jeżeli $A, B \subset E$ są wypukłe, to

$$\operatorname{conv}(A \cup B) = \{ta + (1-t)b : a \in A,\ b \in B,\ t \in [0,1]\} =: C.$$

Istotnie, oczywiście $C \subset \operatorname{conv}(A \cup B)$. Pozostaje pokazać, że C jest wypukły. Dla $a', a'' \in A$, $b', b'' \in B$, oraz $t', t'' \in [0,1]$, $u \in (0,1)$, mamy

$$x^0 := (1-u)((1-t')a' + t'b') + u((1-t'')a'' + t''b'') = (1-s)((1-p)a' + pa'') + s((1-q)b' + qb''),$$

gdzie

$$p := \frac{u(1-t'')}{(1-u)(1-t') + u(1-t'')}, \quad q := \frac{ut''}{(1-u)t' + ut''}, \quad s := (1-u)t' + ut''$$

(jeżeli $(1-u)(1-t') + u(1-t'') = 0$, to $t' = t'' = 1$, $x^0 = (1-u)b' + ub'' \in B$; podobnie, jeżeli $(1-u)t' + ut'' = 0$, to $t' = t'' = 0$, $x^0 = (1-u)a' + ua'' \in A$). Stąd $x^0 \in C$.

(f) Jeżeli A jest wypukły, to $\overline{A}$ jest wypukły. Istotnie, jeżeli $x_\nu \longrightarrow x_0$ i $y_\nu \longrightarrow y_0$, to

$$x_\nu + t(y_\nu - x_\nu) \longrightarrow x_0 + t(y_0 - x_0), \quad t \in [0,1].$$

(g) Jeżeli A jest wypukły, to $\operatorname{int} A$ jest wypukły. Istotnie, jeżeli $B(a,r), B(b,r) \subset A$, to

$$\begin{aligned}[a,b] + B(r) &= \{(1-t)a + tb + x : t \in [0,1],\ x \in B(r)\} \\ &= \{(1-t)(a+x) + t(b+x) : t \in [0,1],\ x \in B(r)\} \subset \operatorname{conv}(B(a,r) \cup B(b,r)) \subset A,\end{aligned}$$

co dowodzi, że $[a,b] \subset \operatorname{int} A$.

---

(9) Oczywiście $a + B = T_a(B)$, gdzie $T_a : E \longrightarrow E$ oznacza *translację* $x \longmapsto a + x$.

(h) Jeżeli A jest wypukły i $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, to dla dowolnych $a \in \operatorname{int} A$ i $b \in A$ mamy

$$[a, b) := \{(1-t)a + tb : t \in [0,1)\} \subset \operatorname{int} A.$$

W szczególności, $A \subset \overline{\operatorname{int} A}$.

Istotnie, jeżeli $B(a,r) \subset A$, to

$$B((1-t)a + tb, r(1-t)) \subset \operatorname{conv}(B(a,r) \cup \{b\}) \subset A, \quad t \in [0,1).$$

(i) W przestrzeni unormowanej kule $B(a,r)$ i $\overline{B}(a,r)$ są wypukłe. Istotnie,

$$\|x + t(y-x) - a\| = \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \leqslant (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\|.$$

Przestrzeń unormowaną $(E, \| \ \|)$ nazywamy *przestrzenią Banacha*, jeżeli przestrzeń metryczna $(E, \varrho_{\| \ \|})$ jest zupełna.

Obserwacja 4.6.6. (a) Niech $X \neq \varnothing$ będzie dowolnym zbiorem i niech E będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy $\mathcal{B}(X,E)$ [10] z *normą Czebyszewa*

$$\|f\|_X := \sup\{\|f(x)\|_E : x \in X\}, \quad f \in \mathcal{B}(X,E),$$

ma naturalną strukturę przestrzeni unormowanej (Ćwiczenie); odnotujmy, że powyższa norma generuje metrykę Czebyszewa.

Ponadto, E jest Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}(X,E)$ jest Banacha.

[10] Odnotujmy, że $\mathcal{B}(X,E) := \{f : X \longrightarrow E : \exists_{R>0} : f(X) \subset B(R)\}$.

ROZDZIAŁ 5

Szeregi

5.1. Szeregi liczbowe

Definicja 5.1.1. Dla $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ definiujemy $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. Parę $((a_n)_{n=0}^{\infty}, (S_n)_{n=0}^{\infty})$ nazywamy *szeregiem*. Zwykle, zamiast powyższej pary, piszemy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Liczbę a_n nazywamy *n-tym wyrazem szeregu*, zaś liczbę S_n nazywamy *n-tą sumą częściową szeregu*. W przypadku, gdy $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mówimy o *szeregu rzeczywistym*. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nazywamy *zbieżnym*, jeżeli $S_n \longrightarrow S \in \mathbb{C}$. Liczbę S nazywamy wtedy *sumą szeregu* i oznaczamy przez $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Szeregi, które nie są zbieżne nazywamy *rozbieżnymi*.

Oczywiście można również rozważać szeregi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Obserwacja 5.1.2. Ogólnie, można rozważać szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n \in E$, $n \in \mathbb{N}_0$, zaś E jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$. Takimi szeregami będziemy się zajmować w przyszłości.

Ćwiczenie 5.1.3. Które z podanych w tym rozdziale własności i twierdzeń dotyczących szeregów liczbowych przenoszą się na szeregi elementów z przestrzeni Banacha?

Obserwacja 5.1.4. (a) Następujące warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) dla dowolnego $n_0 \in \mathbb{N}_0$ szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(iii) istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(b) Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny.

(c) *Szereg geometryczny* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, gdzie $q \in \mathbb{C}$ ($0^0 := 1$), jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$ i wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Istotnie, $S_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{jeżeli } q \neq 1 \\ n+1, & \text{jeżeli } q = 1 \end{cases}$.

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (por. Twierdzenie 2.3.1(b)).

(e) Jeżeli $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ następujące warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) ciąg $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony;

(iii) pewien podciąg ciągu $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny;

(iv) pewien podciąg ciągu $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony.

W przypadku, gdy $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$,

- zamiast pisać, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny będziemy pisać $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$,
- zamiast pisać, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny będziemy pisać $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(f) Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Twierdzenie 5.1.5 (Warunek konieczny zbieżności szeregów). *Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

Dowód. Niech $S := \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Wtedy $a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0$. □

Przykład 5.1.6 (Szereg harmoniczny). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Istotnie,

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \dots + \Big(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\Big) \geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \dots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty.$$

Ćwiczenie: $S_{10^3} = 7{,}485$, $S_{10^6} = 14{,}393$, $S_{10^9} = 21{,}301$ z dokładnością do $0{,}001$.

Twierdzenie 5.1.7 (Warunek Cauchy'ego zbieżności szeregów). *Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}_0}\ \forall_{m>n\geqslant n_0} :\ |a_{n+1} + \dots + a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Dowód. Ponieważ $S_m - S_n = a_{n+1} + \dots + a_m$ wystarczy skorzystać z zupełności $\mathbb{C}$ (Twierdzenie 2.1.6). □

Definicja 5.1.8. Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny. Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest *warunkowo zbieżny*, jeżeli szereg ten jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie 5.1.9 (Kryterium porównawcze). (a) *Jeżeli $|a_n| \leqslant b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny oraz $\Big|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. W szczególności, jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest on zbieżny oraz $\Big|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.*

(b) *Jeżeli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.*

Dowód. (a) $|a_{n+1} + \dots + a_m| \leqslant |a_{n+1}| + \dots + |a_m|$.

(b) $b_0 + \dots + b_n \geqslant a_0 + \dots + a_n \longrightarrow +\infty$. □

Twierdzenie 5.1.10 (Kryterium asymptotyczne). *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$. Wtedy:*

(a) *Jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$ oraz $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{b_n} < \infty$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.*

(b) *Jeżeli $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ oraz $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.*

(c) *Jeżeli $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$.*

Dowód. (a) Wobec Obserwacji 2.4.1(e), wnioskujemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leqslant M b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Możemy więc skorzystać z kryterium porównawczego.

(b) Wobec Obserwacji 2.4.1(f), wnioskujemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $a_n \geqslant M b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, i znów możemy skorzystać z kryterium porównawczego.

(c) wynika z (a) i (b). □

Twierdzenie 5.1.11 (Kryterium kondensacyjne). *Jeżeli $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, to*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Dowód. Niech $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $S'_n := \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}S'_n = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^n a_{2^n}) \\
&= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n} \\
&\leqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) = S_{2^n} - a_0 \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n-1}) + a_{2^n} \\
&\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} = S'_n.
\end{aligned}$$
□

Ćwiczenie 5.1.12. Udowodnić, że dla dowolnego $p \in \mathbb{N}_2$, jeżeli $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_{p^n} < +\infty.$$

Przykład 5.1.13 (Szereg harmoniczny rzędu α)**.** Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$.

Rzeczywiście, jeżeli $\alpha \leqslant 1$, to $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Jeżeli $\alpha > 1$, to stosujemy kryterium kondensacyjne $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$.

Ćwiczenie 5.1.14. Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

Obserwacja 5.1.15. Korzystając z Przykładu 6.6.11(a) dowiemy się, że dla dowolnego $h > -1$ istnieje $\theta \in (0,1)$ taka, że $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(1+\theta h)^2}$. Wynika stąd, że $0 < h - \ln(1+h) < \frac{1}{2}h^2$, $h > 0$. W szczególności,

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{2n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big)$$

jest zbieżny. Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{N+1}{N}\Big) = \ln(N+1).$$

W szczególności, ciąg

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\Big) - \ln N = \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big) + \ln\frac{N+1}{N}$$

jest zbieżny do granicy skończonej zwanej stałą Eulera $\gamma \simeq 0{,}5772$.

Twierdzenie 5.1.16 (Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów)**.** *Niech* $\alpha := \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$. *Wtedy:*

(a) *Jeżeli* $\alpha < 1$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

(b) *Jeżeli* $\alpha > 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

(c) *Jeżeli* $\alpha = 1$, *to nic nie wiadomo.*

Dowód. (a) Niech $q \in (\alpha, 1)$. Na podstawie Obserwacji 2.4.1(e) mamy $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q$ dla $n \geqslant N$, czyli $|a_n| \leqslant q^n$, $n \geqslant N$, i stosujemy kryterium porównawcze.

(b) Istnieje podciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, a zatem $|a_{n_k}| \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów.

(c) $a_n := \frac{1}{n}$, $a_n := \frac{1}{n^2}$. □

Twierdzenie 5.1.17 (Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów). [1]

(a) *Jeżeli* $\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n| < +\infty$.

(b) *Jeżeli* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$ *dla* $n \geqslant n_0$*, to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

Dowód. (a) Wystarczy zastosować Twierdzenie 2.4.2 i kryterium Cauchy'ego.

(b) $|a_m| \geqslant |a_{n_0}| > 0$ dla $m \geqslant n_0$. □

Obserwacja 5.1.18. (a) Kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta.

(b) Niech $a_n := \frac{2+(-1)^n}{2^n}$. Wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, ale $\limsup\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} > 1$.

(c) Kryterium Cauchy'ego jest istotnie mocniejsze niż kryterium d'Alemberta.
W powyższym przykładzie mamy $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$.

Definicja 5.1.19. Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest *bezwarunkowo zbieżny*, dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Twierdzenie 5.1.20 (Twierdzenie o tasowaniu szeregów bezwzględnie zbieżnych). *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest bezwarunkowo zbieżny.*

Dowód. Niech $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n| < +\infty$, niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją i niech $\varepsilon > 0$. Z warunku Cauchy'ego dla szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$ wynika, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego zbioru skończonego $I \subset \mathbb{N}_{N+1}$ mamy $\sum\limits_{n\in I}|a_n| \leqslant \varepsilon$. Niech $N_1 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\{0,\dots,N\} \subset \{\sigma(0),\dots,\sigma(N_1)\}$. Wtedy dla dowolnych $m > n \geqslant N_1$ mamy $\{\sigma(n+1),\dots,\sigma(m)\} \subset \mathbb{N}_{N+1}$ a stąd $\sum\limits_{k=n+1}^{m}|a_{\sigma(k)}| \leqslant \varepsilon$. W takim razie szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{\sigma(n)}|$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $S'_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$. Niech ε i niech N, N_1 będą takie, jak powyżej. Wtedy dla $n \geqslant N_1$ mamy $|S_n - S'_n| \leqslant 2\sum\limits_{i\in I(n)}|a_n| \leqslant 2\varepsilon$, gdzie $I(n) \subset \mathbb{N}_{N+1}$ jest pewnym zbiorem skończonym. □

Twierdzenie 5.1.21 (Twierdzenie Riemanna o tasowaniu szeregu warunkowo zbieżnego). *Jeżeli szereg rzeczywisty* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest warunkowo zbieżny, to dla dowolnych* $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$ *istnieje bijekcja* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ *taka, że jeżeli* $S'_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$*, to* $\liminf\limits_{n\to+\infty} S'_n = \alpha$ *i* $\limsup\limits_{n\to+\infty} S'_n = \beta$*. W szczególności, dla dowolnego* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *istnieje bijekcja* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ *taka, że* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = x$.

Dowód. Można założyć, że $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ (Ćwiczenie). Ustalmy α, β oraz ciągi $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ takie, że $\alpha_n \longrightarrow \alpha$, $\beta_n \longrightarrow \beta$, $\beta_0 > 0$ oraz $\alpha_n < \beta_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Niech $a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- := \max\{-a_n, 0\}$. Oczywiście, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Gdyby $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^+ < +\infty$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^- < +\infty$), to wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^- < +\infty$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^+ < +\infty$), co daje $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n| < +\infty$ — sprzeczność. Wynika stąd, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^+ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

Niech $A := \{n \in \mathbb{N}_0 : a_n > 0\} = \{k_0, k_1, \dots\}$, gdzie $k_0 < k_1 < \dots$, i analogicznie $B := \{n \in \mathbb{N}_0 : a_n < 0\} = \{\ell_0, \ell_1, \dots\}$, gdzie $\ell_0 < \ell_1 < \dots$. Oczywiście $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{N}_0$. Szereg $\sum\limits_{s=0}^{\infty} a_{k_s}$

---

[1] Jean d'Alembert (1717–1783).

(odp. $\sum\limits_{s=0}^{\infty}(-a_{\ell_s})$ różni się od szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^+$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^-$) tylko wyrazami zerowymi, więc jest również rozbieżny.

Rozpoczynamy konstrukcję bijekcji σ:

Krok 0: Niech $p_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $T_0 := a_{k_0} + \dots + a_{k_{p_0}} > \beta_0$ i niech $q_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $U_0 := T_0 + a_{\ell_0} + \dots + a_{\ell_{q_0}} < \alpha_0$.

Krok 1: Niech $p_1 > p_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $T_1 := U_0 + a_{k_{p_0+1}} + \dots + a_{k_{p_1}} > \beta_1$ i niech $q_1 > q_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $U_1 := T_1 + a_{\ell_{q_0+1}} + \dots + a_{\ell_{q_1}} < \alpha_1$.

Rozbieżność szeregów gwarantuje to, że procedura może być dowolnie kontynuowana.

Teraz definiujemy

$$(\sigma(0), \sigma(1), \dots) := (k_0, \dots, k_{p_0}, \ell_0, \dots, \ell_{q_0}, k_{p_0+1}, \dots, k_{p_1}, \ell_{q_0+1}, \dots, \ell_{q_1}, \dots).$$

Zauważmy, że $0 < T_s - \beta_s \leqslant a_{k_{p_s}}$ oraz $a_{\ell_{q_s}} \leqslant U_s - \alpha_s < 0$. Wynika stąd, że $T_s \longrightarrow \beta$, $U_s \longrightarrow \alpha$. W szczególności, $\limsup\limits_{n\to+\infty} S'_n \geqslant \limsup\limits_{s\to+\infty} T_s = \beta$ oraz $\liminf\limits_{n\to+\infty} S'_n \leqslant \liminf\limits_{s\to+\infty} U_s = \alpha$.

Na koniec wystarczy jeszcze zauważyć, że sumy pośrednie przy przechodzeniu od U_{s-1} do T_s leżą pomiędzy U_{s-1} i T_s, zaś sumy pośrednie przy przechodzeniu od U_s do T_s leżą pomiędzy U_s i T_s. $\square$

Wniosek 5.1.22. *Szereg zespolony jest bezwarunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny.*

Dowód. Implikacja ($\Longleftarrow$) wynika z Twierdzenia 5.1.20. Implikacja ($\Longrightarrow$) dla szeregów rzeczywistych wynika z Twierdzenia 5.1.21. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n)$ jest bezwarunkowo zbieżny, to szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są bezwarunkowo zbieżne, a stąd $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n + ib_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n| + \sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_n| < +\infty$. $\square$

Twierdzenie* 5.1.23 (Steinitz [2])**.** *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ i niech*

$$\mathcal{X} := \{z \in \mathbb{C} : \textit{istnieje bijekcja } \sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \textit{ taka, że } \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = z\}.$$

Wtedy $\mathcal{X} = \mathbb{C}$, lub $\mathcal{X}$ jest pewną prostą afiniczną, lub $\mathcal{X}$ jest punktem.

Zauważmy, że zbiór $\mathcal{X}$ jest punktem wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo (a więc bezwzględnie) zbieżny.

Oprócz poznanych dotychczas kryteriów jest bardzo wiele innych użytecznych kryteriów. Na przykład:

Twierdzenie 5.1.24. *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$.*

(a) *(Kryterium Kummera [3]) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \exists_{(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0},\ c>0,\ N\in\mathbb{N}_0}\ \forall_{n\geqslant N} : b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geqslant c$.*

(b) *(Kryterium Raabego [4]) Jeżeli $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geqslant c > 1$, $n \geqslant N$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.*

Dowód. (a) Przypuśćmy, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ i niech $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \longrightarrow S$. Niech $b_n := \frac{S-S_n}{a_n}$. Wtedy $b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S-S_n}{a_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{S-S_{n+1}}{a_{n+1}} = 1$.

Przypuśćmy teraz, że warunek Kummera jest spełniony. Wynika stąd, że $c(a_{N+1} + \dots + a_{n+1}) \leqslant a_N b_N - a_{N+1}b_{N+1} + \dots + a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1} = a_N b_N - a_{n+1}b_{n+1} < a_N b_N$, $n > N$, a stąd $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k \leqslant \frac{1}{c}a_N b_N < +\infty$.

(b) Weźmy w kryterium Kummera $b_n := n$. Wtedy $b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1 \geqslant c - 1 > 0$, $n \geqslant N$. $\square$

---

[2] Ernst Steinitz (1871–1928).

[3] Ernst Eduard Kummer (1810–1893).

[4] Joseph Ludwig Raabe (1801–1859).

5.2. Iloczyny szeregów

Twierdzenie 5.2.1. *Niech* $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$, $(b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$, $B_n := \sum_{k=0}^n b_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Wtedy:*

(a) *(Kryterium Dirichleta) Jeżeli ciąg* $(a_n)_{n=0}^\infty$ *jest monotoniczny,* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *oraz ciąg* $(B_n)_{n=0}^\infty$ *jest ograniczony, to szereg* $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ *jest zbieżny.*

(b) *(Kryterium Abela* [5] *) Jeżeli ciąg* $(a_n)_{n=0}^\infty$ *jest monotoniczny i ograniczony oraz szereg* $\sum_{n=0}^\infty b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ *jest zbieżny.*

(c) *(Kryterium Leibniza* [6] *) Jeżeli ciąg* $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$ *jest malejący, to szereg* $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dowód. (a) Niech $|B_n| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zdefiniujmy dodatkowo $B_{-1} := 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^m a_n b_n &= \sum_{n=0}^m a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=0}^m a_n B_n - \sum_{n=0}^m a_n B_{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^m a_n B_n - \sum_{n=0}^{m-1} a_{n+1} B_n = \Big(\sum_{n=0}^{m-1} (a_n - a_{n+1})B_n\Big) + a_m B_m. \qquad (*)\end{aligned}$$

Powyższe przekształcenie nosi nazwę *transformacji Abela*. Ponieważ $a_m B_m \longrightarrow 0$, wystarczy pokazać, że $\sum_{n=0}^\infty |(a_n - a_{n+1})B_n| < +\infty$. Istotnie, wobec monotoniczności ciągu $(a_n)_{n=0}^\infty$ mamy

$$\sum_{n=0}^m |a_n - a_{n+1}||B_n| \leqslant M|a_0 - a_{m+1}|, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

a ciąg $(M|a_0 - a_{m+1}|)_{m=0}^\infty$ jest oczywiście ograniczony.

(b) Ciągi $(a_m)_{m=0}^\infty$ i $(B_m)_{m=0}^\infty$ mają granice, $a_m \longrightarrow a$, $B_m \longrightarrow B$. Stąd $a_m B_m \longrightarrow aB$. Teraz korzystamy z (*) i rozumujemy jak w (a).

(c) Wynika z (a) i warunku koniecznego zbieżności szeregów. □

Przykład 5.2.2. (a) Na mocy kryterium Dirichleta szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$.

Istotnie, dla $|z| < 1$ mamy $|\frac{z^n}{n}| \leqslant |z|^n$, a ostatni szereg to zbieżny szereg geometryczny. Dla $z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, gdzie $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, mamy $|\sum_{k=1}^n z^k| = |z\frac{1-z^n}{1-z}| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$.

(b) Na mocy kryterium Leibniza, dla dowolnego $\alpha > 0$ szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

(c) Dla dowolnego $\alpha \in (0, 1]$ szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest warunkowo zbieżny.

Definicja 5.2.3 (Iloczyn Cauchy'ego szeregów)**.** Niech $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$, $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Szereg $\sum_{n=0}^\infty c_n$ nazywamy *iloczynem Cauchy'ego* szeregów $\sum_{n=0}^\infty a_n$ i $\sum_{n=0}^\infty b_n$.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$A_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^n c_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$A := \lim_{n\to+\infty} A_n = \sum_{n=0}^\infty a_n, \quad B := \lim_{n\to+\infty} B_n = \sum_{n=0}^\infty b_n, \quad C := \lim_{n\to+\infty} C_n = \sum_{n=0}^\infty c_n,$$

---

[5] Niels Abel (1802–1829).

[6] Gottfryd Leibniz (1646–1716).

oczywiście przy założeniu, że odpowiednie szeregi są zbieżne. (7)

Twierdzenie 5.2.4. *Załóżmy, że* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$. *Wtedy:*

(a) *(Twierdzenie Mertensa (8)) Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ *jest zbieżny oraz* $C=AB$.

(b) *Jeżeli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_n|<+\infty$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|<+\infty$.

Dowód. (a) Niech $M>0$ będzie takie, że $|B_n|\leqslant M$, $|a_0|+\dots+|a_n|\leqslant M$, $n\in\mathbb{N}_0$. Ustalmy $\varepsilon>0$. Niech $n_0\in\mathbb{N}_0$ będzie takie, że $\sum\limits_{k=n_0+1}^{n}|a_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{8M}$ dla $n\geqslant n_0+1$. Niech dalej $n_1>n_0$ będzie takie, że $|B_{n-n_0}-B|\leqslant\frac{\varepsilon}{4M}$ oraz $|A_n-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2M}$ dla $n\geqslant n_1$. Teraz dla $n\geqslant n_1$ mamy $|C_n-AB|\leqslant|C_n-A_nB|+|A_n-A||B|\leqslant|C_n-A_nB|+\frac{\varepsilon}{2}$. Pozostaje oszacować pierwszy składnik. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}C_n&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\dots+(a_0b_n+\dots+a_nb_0)\\&=a_0(b_0+\dots+b_n)+a_1(b_0+\dots+b_{n-1})+\dots+a_{n-1}(b_0+b_1)+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n}a_kB_{n-k}.\end{aligned}$$

Stąd dla $n\geqslant n_1$ dostajemy:

$$\begin{aligned}|C_n-A_nB|&=\Big|\sum_{k=0}^{n}a_k(B_{n-k}-B)\Big|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|a_k||B_{n-k}-B|=\sum_{k=0}^{n_0}|a_k||B_{n-k}-B|+\sum_{k=n_0+1}^{n}|a_k||B_{n-k}-B|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n_0}|a_k||B_{n+n_0-k-n_0}-B|+\sum_{k=n_0+1}^{n}|a_k|2M\leqslant\sum_{k=0}^{n_0}|a_k|\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{m}|c_n|\leqslant\Big(\sum\limits_{n=0}^{m}|a_n|\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{m}|b_n|\Big)$. □

Przykład 5.2.5. W przypadku N-szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{j,n}$, $j=1,\dots,N$, ich iloczyn Cauchy'ego $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ ma postać

$$c_n=\sum_{\substack{s_1,\dots,s_N\in\mathbb{N}_0\\ s_1+\dots+s_N=n}}a_{1,s_1}\cdots a_{N,s_N},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Na podstawie Twierdzenia 5.2.4, jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{j,n}|<+\infty$, $j=1,\dots,N$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|<+\infty$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n=\prod_{j=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{j,n}$. W szczególności, jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$, to $\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\Big)^N=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{\substack{s_1,\dots,s_N\in\mathbb{N}_0\\ s_1+\dots+s_N=n}}a_{s_1}\cdots a_{s_N}$, przy czym ostatni szereg jest zbieżny bezwzględnie.

5.3. Iloczyny nieskończone

Definicja 5.3.1. Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$. Powiemy, że *iloczyn nieskończony* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, jeżeli dla pewnego $p\in\mathbb{N}$ ciąg iloczynów częściowych $I_k:=\prod\limits_{n=p}^{k}a_n$, $k\in\mathbb{N}_p$, jest zbieżny do granicy skończonej i różnej od zera. W szczególności, musi być $a_n\neq 0$, $n\geqslant p$.

Oczywiście, badając zbieżność iloczynu nieskończonego, zawsze możemy przyjąć, że $p=1$.

(7) Przy uogólnianiu na szeregi o współczynnikach w przestrzeni Banacha będziemy zakładać, że $(a_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{K}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}\subset E$.

(8) Franz Mertens (1840–1927).

Przykład 5.3.2. (a) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}$.

Istotnie, $I_k=\prod\limits_{n=2}^{k}(1-\frac{1}{n^2})=\prod\limits_{n=2}^{k}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{k+1}{2k}\longrightarrow\frac{1}{2}$.

(b) Iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ jest rozbieżny.

Istotnie, $I_k=\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{k+1}{k}=k+1\longrightarrow+\infty$.

(c) Iloczyn $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n})$ jest rozbieżny.

Istotnie, $I_k=\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n})=\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{k-1}{k}=\frac{1}{k}\longrightarrow 0$.

Obserwacja 5.3.3 (Warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego)**.** Jeżeli iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, to $a_n\longrightarrow 1$.

Istotnie, $a_n=\frac{I_n}{I_{n-1}}$.

Propozycja 5.3.4 (Warunek konieczny i dostateczny zbieżności iloczynu nieskończonego)**.** *Iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N}\ \forall_{k\in\mathbb{N}}: |a_{n+1}\cdots a_{n+k}-1|\leqslant\varepsilon$.* (*)

Dowód. Jeżeli iloczyn jest zbieżny, to ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ $I_k\longrightarrow I\neq 0$, możemy założyć, że $|I_k|\geqslant c>0$ dla $N\geqslant N_0$ przy pewnym $c>0$. Dobierzmy teraz $N\geqslant N_0$ takie, że $|I_{n+k}-I_k|\leqslant c\varepsilon$ dla $n\geqslant N$ i $k\in\mathbb{N}$. Wtedy $|a_{n+1}\cdots a_{n+k}-1|=\frac{|I_{n+k}-I_k|}{|I_k|}\leqslant\frac{c\varepsilon}{c}=\varepsilon$.

Jeżeli warunek (*) zachodzi, to biorąc $\varepsilon=\frac{1}{2}$ dostajemy $\frac{1}{2}\leqslant|a_{n+1}\cdots a_{n+k}|\leqslant\frac{3}{2}$, $n\geqslant N$, $k\in\mathbb{N}$. W szczególności, $\frac{1}{2}\leqslant|\frac{I_k}{I_{k_0}}|\leqslant\frac{3}{2}$ dla $k>k_0$ dla pewnego k_0.

Ustalmy $\varepsilon>0$. Na postawie (*) mamy $|\frac{I_{n+k}}{I_n}-1|=|a_{n+1}\cdots a_{n+k}-1|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon\frac{1}{|I_{k_0}|}$ dla $n\geqslant N>k_0$ i $k\in\mathbb{N}$. Wynika stąd, że $|I_{n+k}-I_n|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon\frac{|I_n|}{|I_{k_0}|}\leqslant\varepsilon$ dla $n\geqslant N$ i $k\in\mathbb{N}$. Oznacza to, że ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jest więc zbieżny do pewnej granicy skończonej I. Pozostaje pokazać, że $I\neq 0$, co wynika z oszacowania $\frac{1}{2}\leqslant|\frac{I_k}{I_{k_0}}|$ dla $k>k_0$. $\square$

Zgodnie z tradycją wyrazy iloczynu nieskończonego zapisujemy w postaci $a_n=1+c_n$, przy czym zakładamy, że $c_n\longrightarrow 0$.

Definicja 5.3.5. Mówimy, że iloczyn nieskończony $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeżeli iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|c_n|)$ jest zbieżny. Iloczyn zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny nazywamy *zbieżnym warunkowo*. Iloczyn zbieżny nazywamy *bezwarunkowo zbieżnym*, jeżeli dla dowolnej bijekcji $\sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, iloczyn nieskończony $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_{\sigma(n)})$ jest zbieżny i jego wartość nie zależy od σ.

Propozycja 5.3.6. *Jeżeli iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.*

Dowód. Skorzystamy z Propozycji 5.3.4. Wystarczy zauważyć (Ćwiczenie), że

$$|(1+c_{n+1})\cdots(1+c_{n+k})-1|\leqslant|(1+|c_{n+1}|)\cdots(1+|c_{n+k}|)-1|.$$ $\square$

Propozycja 5.3.7. *Niech $(c_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}_+$, $\tau\in\{-1,1\}$. Wtedy iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\tau c_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$.*

W szczególności, dla dowolnego ciągu $(c_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|<+\infty$.

Dowód. W przypadku $\tau = 1$ niech $S_k := \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Zauważmy, że ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ jest rosnący. Mamy $S_k \leqslant I_k$, co daje implikację ($\Longrightarrow$). W drugą stronę mamy $1+x \leqslant e^x$, $x \geqslant 0$ (Twierdzenie 2.3.1(h)), a stąd $I_k \leqslant e^{S_k}$.

W przypadku, gdy $\tau = -1$ możemy założyć, $c_n < 1$, $\in \mathbb{N}$. Mamy $1 - c_n = \frac{1}{1+\frac{c_n}{1-c_n}}$. Pozostaje udowodnić, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty \Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{1-c_n} < +\infty$ (Ćwiczenie). $\square$

Propozycja 5.3.8. *Jeżeli iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + c_n)$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest bezwarunkowo zbieżny.*

Dowód. Niech $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ będzie dowolną bijekcją. Na podstawie Propozycji 5.3.7 i Twierdzenia 5.1.20 iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_{\sigma(n)})$ jest bezwzględnie zbieżny. Pozostaje wykazać równość wartości. Niech $I'_k := \prod\limits_{n=1}^{k}(1+c_{\sigma(n)}) \longrightarrow I'$. Chcemy pokazać, że $\frac{I_k}{I'_k} \longrightarrow 1$. Na podstawie Propozycji 5.3.4 dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\big(\prod\limits_{i\in A}(1+|c_i|)\big) - 1 \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego zbioru skończonego $A \subset \mathbb{N}_{N_0}$. Dobierzmy $N \geqslant N_0$ takie, że $\{1, \dots, N_0\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$. Wtedy dla $k \geqslant N$ mamy $\frac{I_k}{I'_k} = \frac{\prod_{i\in A_k}(1+|c_i|)}{\prod_{j\in B_k}(1+|c_j|)}$, gdzie $A_k, B_k \subset \mathbb{N}_{N_0}$. W konsekwencji, $\frac{1}{1+\varepsilon} \leqslant \frac{I_k}{I'_k} \leqslant 1 + \varepsilon$. $\square$

5.4. Ciągi i szeregi funkcyjne

Definicja 5.4.1. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Rozważmy ciąg funkcji $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest *zbieżny punktowo* do funkcji $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, jeżeli $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. W przypadku, gdy $X = \{x_0\}$, pojęcie ciągu funkcyjnego redukuje się do ciągu liczbowego.

Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *zbieżny jednostajnie* do funkcji f, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in X}:\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{†}$$

Przyjmijmy dodatkowo, że (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest *zbieżny lokalnie jednostajnie* do funkcji f, jeżeli dowolny punkt $a \in X$ posiada otoczenie $U \subset X$ takie, że $f_n|_U \longrightarrow f|_U$ jednostajnie.

Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest *zbieżny niemal jednostajnie* do funkcji f, jeżeli dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ mamy $f_n|_K \longrightarrow f|_K$ jednostajnie.

Obserwacja 5.4.2. (a) $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

(b) ($f_n \longrightarrow f$ jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ lokalnie jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ niemal jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ punktowo).

(c) Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to zbieżność jednostajna, lokalnie jednostajna i niemal jednostajna są równoważne.

(d) Jeżeli każdy punkt $a \in X$ posiada otoczenie $U \subset X$ takie, że $\overline{U}$ jest zbiorem zwartym (np. $X \subset \mathbb{R}^n$), to zbieżność lokalnie jednostajna i niemal jednostajna są równoważne.

Przykład 5.4.3. (a) Niech $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

- $f_n \longrightarrow f$ punktowo, gdzie $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$.
- $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = \sup\{x^n : x \in [0, 1)\} = 1$; w szczególności, zbieżność nie jest jednostajna (nie jest również jednostajna na $[0, 1)$).
- Dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ mamy $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, \theta]\} = \theta^n$; w szczególności, $f_n \longrightarrow f$ lokalnie jednostajnie na $[0, 1)$.

(b) Niech $f_n : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f_n(x) := \frac{2nx}{n^2+x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

- $f_n \longrightarrow 0$ punktowo na $\mathbb{R}$.
- $f_n(n) = 1$; w szczególności, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie.

• Dla dowolnego $M > 0$ mamy $\sup\{|f_n(x)| : |x| \leqslant M\} = \frac{2nM}{n^2+M^2}$; w szczególności, $f_n \longrightarrow 0$ lokalnie jednostajnie.

(c) Niech $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

• $f_n \longrightarrow 0$ punktowo na $\mathbb{R}$.

• $\sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = |f_n(\pm\frac{1}{n})| = \frac{1}{2}$; w szczególności, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie w żadnym otoczeniu zera.

Twierdzenie 5.4.4 (Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągu). *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcyjnym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ taka, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X;*

(ii) *spełniony jest* jednostajny warunek Cauchy'ego*, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geqslant n_0}\ \forall_{x\in X} : \ |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{‡}$$

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Jeżeli zachodzi (†), to $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant 2\varepsilon$, $x \in X$, $n, m \geqslant n_0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Jeżeli zachodzi (‡), to dla dowolnego $x \in X$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ spełnia zwykły warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. Definiujemy $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in X$. Jeżeli $m \longrightarrow +\infty$ w warunku (‡), to dostajemy $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, $n \geqslant n_0$, co oznacza, że (†) zachodzi. □

Definicja 5.4.5. Wszystkie pojęcia, wprowadzone wyżej dla ciągów funkcyjnych, przenoszą się na szeregi funkcyjne $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$. Dodatkowo, dla szeregów funkcyjnych wprowadzamy pojęcie *zbieżności bezwzględnej jednostajnej*, gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ jest zbieżny jednostajnie. Można też mówić o *zbieżności bezwzględnej lokalnie jednostajnej*, czy też o *zbieżności bezwzględnej niemal jednostajnej*

Dla szeregów funkcyjnych rozważamy też pojęcie *zbieżności normalnej na X*, gdy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|f_n(x)| : x \in X\} < +\infty.$$

Zgodnie z ogólnym wzorcem możemy też mówić o *zbieżności lokalnie normalnej*, czy też o *zbieżności niemal normalnej*.

Wniosek 5.4.6 (Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu). *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie;*

(ii) *spełniony jest* jednostajny warunek Cauchy'ego*, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m>n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in X} : \ \Big|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Wniosek 5.4.7. (a) *Szereg zbieżny bezwzględnie jednostajnie (odp. bezwzględnie lokalnie jednostajnie, bezwzględnie niemal jednostajnie) jest zbieżny jednostajnie (odp. lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

(b) *(Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) Szereg zbieżny normalnie (odp. lokalnie normalnie, niemal normalnie) jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie (odp. lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

Wiele twierdzeń poznanych dla szeregów liczbowych można uogólnić na szeregi funkcyjne. Dla przykładu:

Twierdzenie 5.4.8 (Twierdzenie o tasowaniu szeregów bezwzględnie jednostajnie zbieżnych). *Przypuśćmy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie bezwzględnie na X. Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją. Wtedy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ jest zbieżny jednostajnie bezwzględnie na X* [9].

---

[9] Oczywiście, na podstawie Twierdzenia 5.1.20 mamy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in X$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Z jednostajnego warunku Cauchy'ego dla szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ wynika, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego zbioru skończonego $I \subset \mathbb{N}_{N+1}$ mamy $\sum\limits_{n \in I} |f_n(x)| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$. Niech $N_1 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\{0, \dots, N\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N_1)\}$. Wtedy dla dowolnych $m > n \geqslant N_1$ mamy $\{\sigma(n+1), \dots, \sigma(m)\} \subset \mathbb{N}_{N+1}$ a stąd $\sum\limits_{k=n+1}^{m} |f_{\sigma(k)}(x)| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$. W takim razie szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_{\sigma(n)}|$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na X. □

Przykład 5.4.9. Szereg
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}, \quad z \in X := \mathbb{C} \setminus \mathbb{T},$$
jest zbieżny lokalnie normalnie.

Istotnie dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$ mamy
$$\sup\Big\{\Big|\frac{z^n}{1 - z^{2n}}\Big| : |z| \leqslant \theta\Big\} \leqslant 2\theta^n, \quad \sup\Big\{\Big|\frac{z^n}{1 - z^{2n}}\Big| : |z| \geqslant \frac{1}{\theta}\Big\} \leqslant 2\theta^n \quad (\text{Ćwiczenie}).$$

Ćwiczenie 5.4.10. Niech $g_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$g_n(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2}x, & \text{jeżeli } \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{2n}, & \text{jeżeli } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}.$$
Zdefiniujmy $f_n := g_n - g_{n-1}$, $k \in \mathbb{N}_2$. Wtedy szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie, ale nie jest zbieżny normalnie.

Twierdzenie 5.4.11. *Niech $f_n \longrightarrow f$ lokalnie jednostajnie. Wtedy:*
(a) *Jeżeli dla pewnego $a \in X$ mamy $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}; a)$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}; a)$.*
(b) *Jeżeli $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.*

Dowód. (a) Wykorzystamy nierówność
$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)|.$$
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wiemy, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnych $n \geqslant n_0$ i $x \in X$. Korzystając z ciągłości funkcji f_{n_0} w punkcie a otrzymujemy istnienie $\delta > 0$ takiego, że $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $x \in B(a, \delta)$. A stąd $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego $x \in B(a, \delta)$.

(b) wynika z (a). □

Ćwiczenie 5.4.12. Niech $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie. Wtedy, jeżeli f_n jest jednostajnie ciągła dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to f jest jednostajnie ciągła.

Wniosek 5.4.13. *Załóżmy, że szereg funkcyjny $f := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny. Wtedy:*
(a) *Jeżeli dla pewnego $a \in X$ mamy $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}; a)$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}; a)$.*
(b) *Jeżeli $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.*

Przykład 5.4.14. Suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 5.4.15 (Dini (10)). *Załóżmy, że (X, ϱ) jest przestrzenią zwartą, $f_n \in \mathcal{C}(X)$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Niech $f \in \mathcal{C}(X)$ i niech $f_n \longrightarrow f$ punktowo na X. Wtedy $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X.*

Dowód. Zastępując f_n przez $f_n - f$ sprowadzamy problem do przypadku $f \equiv 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $K_n := \{x \in X : f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy K_n jest zbiorem zwartym oraz $K_{n+1} \subset K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Gdyby $K_n \neq \varnothing$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to z twierdzenia Cantora istnieje punkt $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Wtedy $f_n(a) \geqslant \varepsilon$ dla dowolnego n, co przeczy zbieżności punktowej. W takim razie istnieje n_0 takie, że $K_n = \varnothing$ dla $n \geqslant n_0$, co oznacza, że $0 \leqslant f_n \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego $n \geqslant n_0$ i $x \in X$. □

(10) Ulisse Dini (1845–1918).

Obserwacja 5.4.16. Wszystkie założenia twierdzenia Diniego są istotne.

(a) f nie jest ciągła: Niech $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $f_n(x) := x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0,1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$. Wtedy $f_n \searrow f$ punktowo, ale nie jednostajnie..

(b) X nie jest zwarta: Niech $f_n : [0,1) \longrightarrow [0,1)$, $f_n(x) := x^n$. Wtedy $f_n \searrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

(c) Ciąg nie jest monotoniczny: Niech $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Wtedy $f_n \longrightarrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

(d) Funkcje f_n nie są ciągłe: Niech $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. Zdefiniujmy $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{q_1, \dots, q_n\}, \\ 1, & \text{jeżeli } x \in \{q_{n+1}, q_{n+2}, \dots\} \end{cases}.$$

Wtedy $f_n \searrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

5.5. Iloczyny funkcyjne

Propozycja 5.5.1. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym i niech $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^\infty |f_n|$ jest zbieżny niemal jednostajnie w Ω, to iloczyn $I := \prod_{n=1}^\infty (1+f_n)$ jest zbieżny niemal jednostajnie w Ω (w szczególności, $I \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$).*

Dowód. Na podstawie Propozycji 5.3.6 i 5.3.7, dla dowolnego $x \in \Omega$, iloczyn $I(x) := \prod_{n=1}^\infty (1 + f_n(x))$ jest zbieżny bezwzględnie. Pozostaje wykazać, że $I_k \longrightarrow I$ niemal jednostajnie. Ustalmy zbiór zwarty $K \subset \Omega$. Ponieważ $\sum_{n=1}^\infty |f_n| \in \mathcal{C}(\Omega)$, zatem istnieje $C > 0$ takie, że $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| \leqslant C$, $x \in K$. Stąd dla $x \in K$ dostajemy $|I_k(x)| \leqslant (1 + |f_1(x)|) \cdots (1 + |f_k(x)|) \leqslant e^{|f_1(x)| + \dots + |f_k(x)|} \leqslant e^C$.

Mamy $I_n - I_{n-1} = I_{n-1} f_n$. Stąd $I_k = I_1 + \sum_{n=2}^k (I_n - I_{n-1}) = I_1 + \sum_{n=2}^k I_{n-1} f_n$. Wystarczy więc pokazać, że szereg $\sum_{n=2}^\infty |I_{n-1} f_n|$ jest zbieżny jednostajnie na K. Wynika to z oszacowania $|I_{n-1}(x) f_n(x)| \leqslant e^C |f_n(x)|$, $x \in K$. □

5.6. Szeregi potęgowe I

Definicja 5.6.1. *Szeregiem potęgowym o środku w punkcie* $a \in \mathbb{C}$ nazywamy szereg funkcyjny zmiennej zespolonej postaci

$$\sum_{n=0}^\infty a_n (z-a)^n,$$

gdzie $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ ($0^0 := 1$). Oczywiście wszystkie własności szeregu można odczytać badając szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, czyli zakładając, że $a = 0$. Tak też zawsze będziemy czynić.

Liczbę

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$$

nazywamy *promieniem zbieżności szeregu potęgowego.*

Niech $K(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$, $K(a, +\infty) := \mathbb{C}$, $K(r) := K(0, r)$.

Twierdzenie 5.6.2. *Rozważmy szereg* $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$.

(a) *Jeżeli $R > 0$, to dla dowolnego $0 < r < R$ istnieją $\theta \in (0,1)$ oraz $M > 0$ takie, że $|a_n z^n| \leqslant M\theta^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $|z| \leqslant r$.*

(b) *Jeżeli $R > 0$, to szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ jest zbieżny lokalnie normalnie w kole $K(R)$.*

(c) *Jeżeli* $R > 0$ *i* $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in K(R)$, *to* $f \in \mathcal{C}(K(R), \mathbb{C})$ *(Wniosek 5.4.13(b)).*

(d) *Jeżeli* $R < +\infty$, *to dla* $z \notin \overline{K(R)}$ *szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ *jest rozbieżny.*

(e) $R = \sup\Big\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < +\infty\Big\} = \sup\Big\{|z| : \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |a_n z^n| < +\infty\Big\}$.

(f) *Jeżeli* $0 < R < +\infty$, *to o zbieżności szeregu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *dla* $|z| = R$ *nic nie można powiedzieć.*

Dowód. (a) Dla $|z| \leqslant r$ mamy $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$. Ponadto, $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = \frac{r}{R} < 1$. Biorąc $\frac{r}{R} < \theta < 1$ wnioskujemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n| r^n \leqslant \theta^n$ dla $n > N$. Teraz wystarczy tylko wziąć $M := \max\{1, |a_n|(r/\theta)^n : n = 1, \dots, N\}$.

(b) wynika z (a).

(c) wynika z (b) i Wniosku 5.4.13.

(d) Ponieważ $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$, wystarczy skorzystać z kryterium Cauchy'ego.

(e) Niech $R_1 := \sup\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < +\infty\}$, $R_2 := \sup\{|z| : \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n z^n| < +\infty\}$. Na podstawie (b) i (d) mamy $R = R_1 \leqslant R_2$. Jeżeli $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n z^n| < +\infty$, to dla dowolnego $\theta \in (0,1)$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(\theta z)^n|$ jest zbieżny, a więc $R_2 \leqslant R_1$.

(f) Rozważmy następujące przykłady ($R = 1$):

- $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$: dla dowolnego $z \in \mathbb{T}$ szereg jest rozbieżny.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$: dla dowolnego $z \in \mathbb{T}$ szereg jest bezwzględnie zbieżny.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$: dla $z = 1$ szereg jest rozbieżny; dla $z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ szereg jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta (Przykład 5.2.2(a)). □

Obserwacja 5.6.3. Jeżeli $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in K(R)$ ($R > 0$), to $a_1 = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$.

Istotnie, $\frac{f(z)-f(0)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$, $z \in K(R) \setminus \{0\}$. Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$ ma ten sam promień zbieżności: $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to+\infty} \big(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\big)^{\frac{n+1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}$. W szczególności, funkcja $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$, $z \in K(R)$, jest ciągła. Mamy więc $a_1 = g(0) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$.

5.6.1. Funkcje e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Definicja 5.6.4. Definiujemy *funkcję wykładniczą* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$e^z = \exp z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Zauważmy, że promień zbieżności powyższego szeregu potęgowego jest równy $+\infty$, więc funkcja jest prawidłowo zdefiniowana. Jest to funkcja ciągła (Twierdzenie 5.6.2(c)).

Obserwacja 5.6.5. (a) $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{C}$.

Istotnie, korzystamy z iloczynu Cauchy'ego szeregów. Mamy

$$\exp(a)\exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!}(a+b)^n = \exp(a+b).$$

(b) $\exp(0) = 1$, $\exp z \neq 0$, $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\exp(x) = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Istotnie, ponieważ obie funkcje są ciągłe, wystarczy wykazać równość dla $x \in \mathbb{Q}$. Mamy $\exp(1) = e = e^1$, a stąd $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Jeżeli $x = p/q$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$), to $(\exp(p/q))^q = \exp(p) = e^p$, a stąd $\exp(p/q) = e^{p/q}$.

(d) Na podstawie Obserwacji 5.6.3 mamy $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$.

Definicja 5.6.6. Definiujemy:

$$\sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Obserwacja 5.6.7. (a) sin i cos są funkcjami ciągłymi.

(b) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(d) $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Istotnie,

$$\sin z = \frac{1}{2i}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

(e) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ oraz $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $a, b \in \mathbb{C}$. W szczególności, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$ (*jedynka trygonometryczna*).

Istotnie,

$$\sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{1}{4i}\Big((e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib}) + (e^{ib} - e^{-ib})(e^{ia} + e^{-ia})\Big)$$
$$= \frac{1}{2i}(e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}) = \frac{1}{2i}(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}) = \sin(a+b).$$

Drugi wzór pozostawiamy jako Ćwiczenie.

(f) $\sin(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$, $\cos(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$.

(g) Na podstawie Obserwacji 5.6.3 mamy $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0$.

5.6.2. Liczba π. Zauważmy, że

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \frac{2^4}{4!}\Big(1 + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^4}{5^4} + \dots\Big)$$
$$= -1 + \frac{16}{24} \frac{1}{1 - \frac{4}{25}} = -1 + \frac{50}{63} < 0.$$

W takim razie, z własności Darboux funkcji ciągłych wynika, że funkcja cos musi mieć zero w przedziale $(0, 2)$.

Definicja 5.6.8. $\pi := 2 \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$.

Obserwacja 5.6.9. (a) $0 < \pi < 4$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

(b) $0 < \cos x < 1$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ustalmy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oczywiście $0 < \cos x \leqslant 1$. Dla uzyskania ostrej nierówności zauważmy, że

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}\Big(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\Big) - \frac{x^6}{6!}\Big(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\Big) - \dots < 1.$$

(c) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ oraz $0 < \sin x < 1$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ustalmy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oczywiście $\sin \frac{\pi}{2} \in \{-1, +1\}$. Wystarczy pokazać, że $\sin x > 0$. Mamy

$$\sin x = x\Big(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\Big) + \frac{x^5}{5!}\Big(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\Big) + \dots > 0.$$

(d) $\cos\pi = \cos 2\frac{\pi}{2} = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = -1$,
$\sin\pi = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$,
$\cos(2\pi) = \cos^2\pi - \sin^2\pi = 1$,
$\sin(2\pi) = 2\sin\pi\cos\pi = 0$.

(e) $\cos(z+2(k+1)\pi) = \cos(z+2k\pi)\cos 2\pi - \sin(z+2k\pi)\sin 2\pi = \cos(z+2k\pi)$, a stąd $\cos(z+2k\pi) = \cos z$, $\sin(z+2k\pi) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ (korzystamy z Obserwacji 5.6.7(e)).

(f) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. W szczególności, $e^{\pi i} = -1$.

(g) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Istotnie,
$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Twierdzenie 5.6.10. (a) *Odwzorowanie*
$$[0, 2\pi) \ni t \stackrel{\Phi}{\longmapsto} e^{it} \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$
jest bijektywne.
(b) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(c) $e^a = e^b \iff \frac{a-b}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.
(d) *Dla* $x \in \mathbb{R}$ *funkcje* $\sin x$ *i* $\cos x$ *pokrywają się z funkcjami znanymi z trygonometrii.*

Dowód. (a) Wiemy, że $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) \in \Phi([0, 2\pi))$. Ponadto, wiemy, że $\{(x + iy) \in \mathbb{T} : x > 0,\ y > 0\} = \Phi((0, \frac{\pi}{2}))$. Z okresowości wnioskujemy, że $\mathbb{T} \subset \Phi([0, 2\pi))$. Pozostaje injektywność. Przypuśćmy, że $\Phi(t') = \Phi(t'')$, $t' < t''$. Niech $4t := t'' - t'$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x + iy := e^{it} \in \mathbb{T}$ $(x, y \in (0, 1))$. Mamy $e^{i4t} = 1$, czyli $1 = (x + iy)^4 = (x^2 - y^2 + 2ixy)^2 = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + 8ixy(x^2 - y^2)$. Stąd $x^2 = y^2$, a więc $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Ostatecznie dostajemy $1 = (x + iy)^4 = -1$ — sprzeczność.

(b) Mamy $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$. Na podstawie (a) istnieje $y \in [0, 2\pi)$ takie, że $e^{iy} = \frac{z}{|z|}$. Oczywiście istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $e^x = |z|$. Ostatecznie wiec mamy $z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy}$.

(c) Niech $c := a - b = \alpha + i\beta$. Mamy $1 = e^c = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta)$, Stąd $\sin\beta = 0$, a więc, wobec (a), $\frac{\beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. W konsekwencji $1 = e^\alpha$, skąd wynika, że $\alpha = 0$. $\square$

Z dowodu powyższego twierdzenia wynika, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ może być przedstawiona w *postaci trygonometrycznej* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$. Zawsze możemy wybrać $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Wtedy φ nazywamy *argumentem głównym* z i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$. Dodatkowo definiujemy $\operatorname{Arg} 0 := 0$. Zbiór $\arg z := \{\operatorname{Arg} z\ + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy *argumentem* z. Dodatkowo kładziemy $\arg 0 := \mathbb{R}$. Dla $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$, zbiór $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$ nazywamy *pierwiastkiem zespolonym z liczby* z.

Ćwiczenie 5.6.11. (a) $a \cdot b = |a||b|(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta))$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \arg a$, $\beta \in \arg b$.
(b) (*Wzór de Moivre'a* (11)) $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \arg z$, $n \in \mathbb{N}$.
(c) $\sqrt[n]{z} = \Big\{\sqrt[n]{|z|}\exp(i\frac{\varphi+2k\pi}{n}) : k = 0, \dots, n-1\Big\}$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi := \operatorname{Arg} z$, $n \in \mathbb{N}$.
(d) Dla $n \geqslant 3$ zbiór $\sqrt[n]{1}$ to wierzchołki n-kąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy $\mathbb{T}$.

Ćwiczenie 5.6.12 (Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych)**.** (a) $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ jest ściśle rosnącą bijekcją, a funkcja do niej odwrotna to
$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(b) $\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ jest ściśle malejącą bijekcją, a funkcja do niej odwrotna to
$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.
(c) $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle rosnącą bijekcją, a funkcja do niej odwrotna to
$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
(d) $\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)} : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle malejącą bijekcją, a funkcja do niej odwrotna to
$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$.

Obserwacja* 5.6.13. Można wykazać, że $\sin\pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\big(1 - \frac{z^2}{n^2}\big)$, $z \in \mathbb{C}$.

(11) Abraham de Moivre (1667–1754).

5.6.3. Funkcje hiperboliczne.

Ćwiczenie 5.6.14 (Funkcje hiperboliczne)**.** Definiujemy:

- *cosinus hiperboliczny*: $\mathbb{C} \ni z \overset{\cosh}{\longmapsto} \frac{e^z+e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$,
- *sinus hiperboliczny*: $\mathbb{C} \ni z \overset{\sinh}{\longmapsto} \frac{e^z-e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$,
- *tangens hiperboliczny*: $\operatorname{tgh} := \frac{\sinh}{\cosh}$.

(a) Które ze wzorów trygonometrycznych, po ewentualnej zmianie znaków, pozostają prawdziwe dla funkcji hiperbolicznych?, np. $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.
(b) Odwzorowania $\cosh|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty)$, $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ są bijekcjami.
(c) Wyznaczyć wzory na funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych.

5.7. Przeliczalne rodziny sumowalne

Poznane wcześnie pojęcie szeregu liczbowego bezwarunkowo zbieżnego będziemy chcieli przenieść na szeregi funkcyjne postaci $\sum_{i \in I} f_i$, gdzie I jest dowolnym zbiorem przeliczalnym, X jest dowolnym zbiorem niepustym, zaś $f_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $i \in I$, lub nawet $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$, gdzie E jest przestrzenią Banacha.

Obserwacja 5.7.1. (a) Pamiętajmy, że w przypadku, gdy $X = \{x_0\}$ szereg $\sum_{i \in I} f_i$ redukuje się do szeregu liczbowego (ewentualnie szeregu elementów przestrzeni Banacha E).
(b) Istnieje też możliwość badania szeregów $\sum_{i \in I} f_i$, gdzie I jest dowolnym zbiorem nieskończonym, ale nie będziemy się nią zajmować.

Niech I będzie, niepustym zbiorem przeliczalnym, X — dowolnym niepustym zbiorem, zaś E przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E \neq \{0\}$. Oznaczmy przez $\mathcal{F}(I)$ rodzinę wszystkich niepustych skończonych podzbiorów I. Rozważmy rodzinę funkcji $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$. Dla $A \in \mathcal{F}(I)$ zdefiniujmy $f_A := \sum_{i \in A} f_i : X \longrightarrow E$. Oczywiście $f_{\{i\}} = f_i$. Przyjmujemy, że $f_\varnothing := 0$.

Twierdzenie 5.7.2. *Następujące warunki są równoważne:*
(i) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *jest* jednostajnie sumowalna na X*, tzn. istnieje funkcja* $f_I : X \longrightarrow E$ *taka, że*
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{S(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)}\ \forall_{A \in \mathcal{F}(I):\ S(\varepsilon) \subset A}\ \forall_{x \in X} : \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon;$$
(ii) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *spełnia* jednostajny warunek Cauchy'ego*, tzn.*
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)} \forall_{A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))}\ \forall_{x \in X} : \|f_A(x)\| \leqslant \varepsilon;$$
(iii) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *jest* jednostajnie bezwarunkowo sumowalna*, tzn. dla dowolnej bijekcji* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ *szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *jest zbieżny jednostajnie na* X *i jego suma nie zależy od* σ*, przy czym tą sumą jest funkcja* f_I *z warunku* (i)*;*
(iv) *dla dowolnej bijekcji* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ *szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *jest zbieżny jednostajnie na* X*.*

Obserwacja 5.7.3. (a) Funkcja f_I w warunku (i) jest wyznaczona jednoznacznie. Nazywamy ją *sumą* rodziny $(f_i)_{i \in I}$ i oznaczamy przez $f_I = \sum_{i \in I} f_i$.
(b) Jeżeli $X = \{x_0\}$ słowo „jednostajnie” pomijamy i mówimy o *sumowalnej* rodzinie elementów przestrzeni E.
(c) Zauważmy, że w warunku (i) (odp. (ii)) zbiór $S(\varepsilon)$ (odp. $C(\varepsilon)$) może być powiększony bez szkody dla zachodzenia warunku.

Dowód Twierdzenia 5.7.2. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $C(\varepsilon) := S(\varepsilon/2) := S$. Wtedy dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus S)$ i $x \in X$ mamy:
$$\|f_A(x)\| = \|f_{A \cup S}(x) - f_S(x)\| \leqslant \|f_{A \cup S}(x) - f_I(x)\| + \|f_S(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Możemy założyć, że $C(\frac{1}{n}) \subsetneq C(\frac{1}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $s_n := f_{C(\frac{1}{n})}$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy
$$\|s_{n+k}(x) - s_n(x)\| = \|f_{C(\frac{1}{n+k}) \setminus C(\frac{1}{n})}(x)\| \leqslant \frac{1}{n}, \quad n, k \in \mathbb{N},\ x \in X.$$

Oznacza to, że ciąg funkcji $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na X. Ponieważ E jest przestrzenią Banacha, zatem $s_n \longrightarrow s$ jednostajnie na X (dla pewnej funkcji $s : X \longrightarrow E$). Pokażemy, że rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna do s.

Z poprzedniej nierówności wynika, że $\|s_n(x) - s(x)\| \leqslant \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Jeżeli teraz $A \in \mathcal{F}(I)$ i $C(\frac{1}{n}) \subset A$, to

$$\|f_A(x) - s(x)\| \leqslant \|f_A(x) - f_{C(\frac{1}{n})}(x)\| + \|f_{C(\frac{1}{n})}(x) - s(x)\| \leqslant \|f_{A\setminus C(\frac{1}{n})}(x)\| + \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{n}, \quad x \in X.$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Ustalmy bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $N_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $S(\varepsilon) \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N_0)\}$ Wtedy dla dowolnego $N \geqslant N_0$ mamy $S(\varepsilon) \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\} =: A$, a stąd

$$\Big\| \sum_{n=0}^{N} f_{\sigma(n)}(x) - f_I(x) \Big\| = \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in X.$$

Implikacja (iii) $\Longrightarrow$ (iv) jest oczywista.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ warunek (ii) nie zachodzi. Ustalmy dowolne $i_0 \in I$. Zbiór $C(\varepsilon) := \{i_0\}$ nie może być dobry. W takim razie istnieje zbiór $F(1) \in \mathcal{F}(I \setminus \{i_0\})$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(1)}(x)\| > \varepsilon$. Zbiór $C(\varepsilon) := F(1)$ też nie może być dobry. Znajdziemy więc $F(2) \in \mathcal{F}(I \setminus F(1))$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(2)}(x)\| > \varepsilon$. Teraz bierzemy $C(\varepsilon) := F(1) \cup F(2)$ i znajdujemy $F(3) \in \mathcal{F}(I \setminus (F(1) \cup F(2)))$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(3)}(x)\| > \varepsilon$. Rozumując dalej znajdziemy ciąg $(F(k))_{k=1}^{\infty}$ parami rozłącznych skończonych podzbiorów I taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(k)}(x)\| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$.

Teraz skonstruujemy pewną bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$, którą będziemy utożsamiać z permutacją zbioru I.

Jeżeli zbiór $F(0) := I \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F(k)$ jest skończony, to na początku ustawimy elementy zbioru $F(0)$ w dowolnej kolejności, potem elementy zbioru $F(1)$ (też w dowolnej kolejności), potem $F(2)$ itd.

Niech $N(k) := \#F(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zdefiniujmy $S_N := \sum\limits_{n=0}^{N} f_{\sigma(n)}$. Wtedy $S_{N(0)+\dots+N(k)} - S_{N(0)+\dots+N(k-1)} = f_{F(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, a więc ciąg $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego; sprzeczność.

W przypadku gdy zbiór $F(0)$ jest nieskończony, ustawiamy jego elementy w ciąg $i_1, i_2, \dots$, a następnie budujemy permutację σ następująco: stawiamy i_1, potem elementy zbioru $F(1)$, potem i_2, potem $F(2)$, itd. Podobnie jak poprzednio, bez trudu widzimy, że $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie może spełniać warunku Cauchy'ego bowiem $S_{N(0)+\dots+N(k)+k} - S_{N(0)+\dots+N(k-1)+k} = f_{F(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, a więc $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie może spełniać warunku Cauchy'ego; sprzeczność. $\square$

Definiujemy $\|f_i\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|(x) := \|f(x)\|$, $x \in X$. Jeżeli rodzina $(\|f_i\|)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X, to mówimy (z pewnym nadużyciem terminologii), że rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie bezwzględnie sumowalna na X.

Obserwacja 5.7.4. (a) Jeżeli $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X, to dla dowolnego $x_0 \in X$ rodzina $(f_i(x_0))_{i\in I}$ jest sumowalna. Czy odwrotnie? — Ćwiczenie.

(b) Jeżeli rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X, to dla dowolnego niepustego nieskończonego zbioru $J \subset I$, rodzina $(f_i)_{i\in J}$ jest jednostajnie sumowalna na X.

Istotnie, wystarczy skorzystać z kryterium Cauchy'ego.

(c) Jeżeli rodzina $(\|f_i\|)_{i\in I}$ jest jednostajnie bezwzględnie sumowalna na X, to rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X oraz $\|\sum\limits_{i\in I} f_i\| \leqslant \sum\limits_{i\in I} \|f_i\|$.

Istotnie, jednostajna sumowalność rodziny $(f_i)_{i\in I}$ wynika z kryterium Cauchy'ego oraz faktu, że $\|f_A\| \leqslant \sum\limits_{i\in A} \|f_i\|$, $A \in \mathcal{F}(I)$. Dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$, korzystając z własności szeregów, mamy

$$\Big\| \sum_{i\in I} f_i(x) \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x) \Big\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{\sigma(n)}(x)\| = \sum_{i\in I} \|f_i(x)\|, \quad x \in X.$$

(d) Jeżeli $(f_i)_{i\in I}$, $(g_i)_{i\in I}$ są rodzinami jednostajnie sumowalnymi na X dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, rodzina $(\alpha f_i + \beta g_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X, a jej suma jest równa $\alpha f_I + \beta g_I$.

(e) Jeżeli rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X oraz wszystkie odwzorowania $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$, są ograniczone, to zbiór odwzorowań $\{f_A : A \in \mathcal{F}(I)\}$ jest jednostajnie ograniczony.

Istotnie, dla dowolnego $A \in \mathcal{F}(I)$ mamy: $f_A = f_{A\cap S(1)} + f_{A\setminus S(1)}$, a więc wystarczy pokazać, że zbiór $\{f_A : A \in \mathcal{F}(I \setminus S(1))\}$ jest jednostajnie ograniczony. Dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus S(1))$ mamy

$$\|f_A\| = \|f_{A\cup S(1)} - f_{S(1)}\| \leqslant \|f_{A\cup S(1)} - f_I\| + \|f_{S(1)} - f_I\| \leqslant 2.$$

Propozycja 5.7.5. *Załóżmy, że $(E, \|\ \|)$ jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, $E \neq \{0\}$ i niech $e_1, \dots, e_d$ będzie dowolną bazą E. Wtedy istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że*

$$c_1(|t_1| + \dots + |t_d|) \leqslant \|t_1e_1 + \dots + t_de_d\| \leqslant c_2(|t_1| + \dots + |t_d|), \quad t_1, \dots, t_d \in \mathbb{K}.$$

W szczególności, w przestrzeni skończenie wymiarowej wszystkie normy są równoważne.

Dowód. Mamy $\|t_1e_1 + \dots + t_de_d\| \leqslant |t_1|\|e_1\| + \dots + |t_d|\|e_d\| \leqslant c_2(|t_1| + \dots + |t_d|)$, gdzie $c_2 := \max\{\|e_1\|, \dots \|e_d\|\}$.

Druga z nierówności polega na pokazaniu, że $\inf\{\|t_1e_1+\dots+t_de_d\| : |t_1|+\dots+|t_d| = 1\} > 0$. Ponieważ działania w przestrzeni unormowanej są ciągłe, zatem funkcja $\mathbb{K}^d \ni (t_1, \dots, t_d) \overset{\varphi}{\longmapsto} \|t_1e_1 + \dots + t_de_d\| \in \mathbb{R}_+$ jest ciągła. Chcemy pokazać, że $\inf\{\varphi(t_1, \dots, t_d) : (t_1, \dots, t_d) \in S\} > 0$, gdzie $S := \{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{K}^n : |t_1| + \dots + |t_d| = 1\}$. Wynika to natychmiast z Twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów, wobec tego, że zbiór S jest zwarty.

Jeżeli $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ są dwiema normami w E, to wobec poprzedniej części dowodu istnieją stałe $c_{i,j} > 0$ takie, że

$$\begin{aligned}\|t_1e_1 + \dots + t_de_d\|_1 &\leqslant c_{1,2}(|t_1| + \dots + |t_d|) \leqslant \frac{c_{1,2}}{c_{2,1}}\|t_1e_1 + \dots + t_de_d\|_2 \\ &\leqslant \frac{c_{1,2}c_{2,2}}{c_{2,1}}(|t_1| + \dots + |t_d|) \leqslant \frac{c_{1,2}c_{2,2}}{c_{2,1}c_{1,1}}\|t_1e_1 + \dots + t_de_d\|_1, \quad t_1, \dots, t_d \in \mathbb{K},\end{aligned}$$

skąd natychmiast wynika, że $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ są równoważne. □

Wniosek 5.7.6. *Załóżmy, że $(E, \|\ \|)$ jest skończenie wymiarową przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$, $E \neq \{0\}$ (np. $E = \mathbb{C}$) i niech $e_1, \dots, e_d$ będzie dowolną bazą E. Dla dowolnej rodziny funkcji $f_i : X \longrightarrow E$ mamy $f_i(x) = f_{i,1}(x)e_1 + \dots + f_{i,d}(x)e_d$. Dostajemy w ten sposób d rodzin funkcji rzeczywistych $(f_{i,j})_{i\in I}$, $j = 1, \dots, d$. Wtedy rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X (odp. jednostajnie bezwzględnie sumowalna na X) wtedy i tylko wtedy, każda z rodzin $(f_{i,j})_{i\in I}$, $j = 1, \dots, d$, jest jednostajnie sumowalna na X (odp. jednostajnie bezwzględnie sumowalna na X).*

Dowód. Niech c_1, c_2 będą jak powyżej. Wtedy

$$c_1\Big(\Big|\sum_{i\in A} f_{i,1}(x)\Big|+\dots+\Big|\sum_{i\in A} f_{i,d}(x)\Big|\Big) \leqslant \|f_A(x)\| \leqslant c_2\Big(\Big|\sum_{i\in A} f_{i,1}(x)\Big|+\dots+\Big|\sum_{i\in A} f_{i,d}(x)\Big|\Big),\ x \in X,\ A \in \mathcal{F}(I).$$

Jeżeli więc rodzina $(f_i)_{i\in I}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego i $\|f_A(x)\| \leqslant c_1\varepsilon$, $x \in X$ dla $A \in \mathcal{F}(I\setminus C(c_1\varepsilon))$, to $|\sum_{i\in A} f_{i,j}(x)| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, $j = 1, \dots, d$, co oznacza, że każda z rodzin $(f_{i,j})_{i\in I}$, $j = 1, \dots, d$, spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego.

Odwrotnie, jeżeli każda z rodzin $(f_{i,j})_{i\in I}$, $j = 1, \dots, d$, spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego i $|\sum_{i\in A} f_{i,j}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{dc_2}$, $x \in X$, $A \in \mathcal{F}(I \setminus C_j(\frac{\varepsilon}{dc_2}))$, $j = 1, \dots, d$, to $\|f_A(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$ dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus (C_1(\frac{\varepsilon}{dc_2}) \cup \dots \cup C_d(\frac{\varepsilon}{dc_2})))$.

Przypadek rodziny bezwzględnie jednostajnie sumowalnej jest analogiczny. Mamy

$$c_1\Big(\sum_{i\in A}|f_{i,1}(x)| + \dots + \sum_{i\in A}|f_{i,d}(x)|\Big) \leqslant \sum_{i\in A}\|f_i(x)\| \leqslant c_2\Big(\sum_{i\in A}|f_{i,1}(x)| + \dots + \sum_{i\in A}|f_{i,d}(x)|\Big).$$

Resztę dowodu pozostawiamy jako (Ćwiczenie). □

Twierdzenie 5.7.7. *Załóżmy, że E jest skończenie wymiarową przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$, $E \neq \{0\}$ (np. $E = \mathbb{C}$). Wtedy dla dowolnej rodziny $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$, następujące warunki są równoważne:*

(i) *rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X;*
(ii) *rodzina $(\|f_i\|)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X;*
(iii) *istnieje permutacja $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ taka, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\|f_{\sigma(n)}\|$ jest jednostajnie zbieżny na X.*

Obserwacja 5.7.8. (a) Jeżeli $\dim E = \infty$, to implikacja (i) $\Longrightarrow$ (ii) nie musi być prawdziwa. Dla przykładu, niech $E := \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ z normą supremową, $I := \mathbb{N}$, $f_i := \frac{1}{i}(\delta_{i,j})_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, $i \in I$. Oczywiście, $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \|f_i\| = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i}$, a więc rodzina $(\|f_i\|)_{i\in\mathbb{N}}$ nie jest sumowalna. Z drugiej strony, niech $s := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Jeżeli $A \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ i $\{1, \dots, n\} \subset A$, to $\|f_A - s\| \leqslant \frac{1}{n}$. Oznacza to, że $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest sumowalna i $s = f_I$.

(b) Prawdziwe jest następujące ogólne twierdzenie (zob. [Dvo-Rog 1950]).

Twierdzenie* 5.7.9. *Niech $(E, \|\ \|)$ będzie przestrzenią Banacha. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *dla dowolnego ciągu $(f_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$ następujące warunki są równoważne:*
- *rodzina* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|f_k\| < +\infty$,
- *szereg* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *jest zbieżny bezwarunkowo;*

(ii) $\dim E < +\infty$.

Dowód Twierdzenia 5.7.7. Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (i) wynika z Obserwacji 5.7.4(c).

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Najpierw rozważmy szczególny przypadek, gdy $E = \mathbb{R}$. W tym przypadku twierdzenie udowodnił w roku 1910 Wacław Sierpiński (12). Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ rodzina $(|f_i|)_{i\in I}$ nie spełnia jednostajnego warunku Cauchy'ego. Ustalmy $i_0 \in I$. Zbiór $C(\varepsilon) := \{i_0\}$ nie może być dobry. W takim razie istnieje zbiór $G(1) \in \mathcal{F}(I \setminus \{i_0\})$ taki, że $\sup_{x\in X} \sum\limits_{i\in G(1)} |f_i(x)| > \varepsilon$. Ustalmy, $x_1 \in X$ taki, że $\sum\limits_{i\in G(1)} |f_i(x_1)| > \varepsilon$. Zbiór $G(1)$ możemy podzielić na dwie rozłączne części $F'(1) := \{i \in G(1) : f_i(x_1) \geqslant 0\}$, $F''(1) := G(1) \setminus F'(1)$. Jest oczywiste, że $|f_{F'(1)}(x_1)| > \frac{\varepsilon}{2}$ lub $|f_{F''(1)}(x_1)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Niech $F(1)$ oznacza ten ze zbiorów $F'(1)$, $F''(1)$, dla którego zachodzi powyższa nierówność (jeżeli zachodzi ona dla obu zbiorów, to bierzemy którykolwiek z nich). Zbiór $C(\varepsilon) := F(1)$ też nie może być dobry. Powtarzając powyższe rozumowanie, znajdziemy zbiór $F(2) \in \mathcal{F}(I \setminus F(1))$ taki, że $\sup_{x\in X} |f_{F(2)}(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Teraz bierzemy $C(\varepsilon) := F(1) \cup F(2)$ i znajdujemy $F(3) \in \mathcal{F}(I \setminus (F(1) \cup F(2)))$ taki, że $\sup_{x\in X} |f_{F(3)}(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Rozumując dalej znajdziemy ciąg $(F(k))_{k=1}^{\infty}$ parami rozłącznych skończonych podzbiorów I taki, że $\sup_{x\in X} |f_{F(k)}(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Dalej postępujemy tak, jak w dowodzie implikacji (ii) $\Longrightarrow$ (iii) w Twierdzeniu 5.7.2.

W przypadku ogólnym, niech $e_1, \dots, e_d$ oznacza bazę E. Mamy $f_i(x) = f_{i,1}(x)e_1 + \dots + f_{i,d}(x)e_d$. Dostajemy w ten sposób d rodzin funkcji rzeczywistych $(f_{i,j})_{i\in I}$, $j = 1, \dots, d$. Stosujemy teraz Wniosek 5.7.6.

Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (iii) wynika z Twierdzenia 5.7.2.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Wobec Twierdzenia 5.7.2 wystarczy pokazać, że (iii) zachodzi dla dowolnej permutacji σ. W tym celu wystarczy skorzystać z Twierdzenia 5.4.8. $\square$

Twierdzenie 5.7.10 (Twierdzenie o grupowaniu wyrazów). *Niech $I = \bigcup\limits_{j\in J} I(j)$, gdzie $I(j) \neq \varnothing$ i $I(j) \cap I(k) = \varnothing$ dla $j \neq k$* (13) (14). *Jeżeli rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X, to rodzina $(f_{I(j)})_{j\in J}$ jest jednostajnie sumowalna na X* (15). *Ponadto,*

$$\sum_{j\in J} f_{I(j)} = f_I, \ \text{czyli} \ \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I(j)} f_i\Big) = \sum_{i\in I} f_i.$$

Odnotujmy, że oczywiście twierdzenie odwrotne nie zachodzi, np. $E := \mathbb{R}$, $I = J := \mathbb{N}$, $I(j) := \{2j-1, 2j\}$, $f_i := (-1)^i$. Wtedy $f_{I(j)} = 0$ dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$, ale rodzina $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nie jest sumowalna.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $B(\varepsilon) := \{j \in J : I(j) \cap S(\frac{\varepsilon}{2}) \neq \varnothing\}$, gdzie $S(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{F}(I)$ jest takie, jak w Twierdzeniu 5.7.2(i). Ponieważ zbiory $I(j)$, $j \in J$, są parami rozłączne mamy $B(\varepsilon) \in \mathcal{F}(J)$.

---

(12) Wacław Sierpiński (1882–1969).

(13) Pewne rodziny $I(j)$ mogą być skończone.

(14) Zauważmy, że $\#J \leqslant \aleph_0$. Zbiór J może być skończony.

(15) Na podstawie Obserwacji 5.7.4(b), $f_{I(j)} = \sum\limits_{i\in I(j)} f_i$ jest poprawnie określone dla dowolnego $j \in J$.

Pokażemy, że z punktu widzenia rodziny $(f_{I(j)})_{j\in J}$ zbiór $B(\varepsilon)$ będzie pełnić rolę zbioru $S(\varepsilon)$, tzn. $\|f_I(x)-\sum_{j\in B} f_{I(j)}(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $B \in \mathcal{F}(J)$ takiego, że $B(\varepsilon) \subset B$.

Ustalmy B i niech $N := \#B$. Dla dowolnego $j \in J$ niech $D(j) \in \mathcal{F}(I(j))$ będzie takie, że

$$A \in \mathcal{F}(I(j)),\ D(j) \subset A \Longrightarrow \|f_A(x) - f_{I(j)}(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2N}, \quad x \in X. \quad (^{16})$$

Możemy oczywiście założyć, że $S(\frac{\varepsilon}{2}) \cap I(j) \subset D(j)$. Niech $A := \bigcup_{j\in B} D(j)$. Zauważmy, $S(\frac{\varepsilon}{2}) \subset A$, a więc $\|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in X$. Mamy:

$$\begin{aligned}\Big\|f_I(x) - \sum_{j\in B} f_{I(j)}(x)\Big\| &\leqslant \Big\|f_I(x) - \sum_{j\in B} f_{D(j)}(x)\Big\| + \sum_{j\in B} \|f_{D(j)}(x) - f_{I(j)}(x)\| \\ &\leqslant \|f_I(x) - f_A(x)\| + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon, \quad x \in X.\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.7.11 (Twierdzenie o mnożeniu rodzin sumowalnych)**.** *Niech $(f_i)_{i\in I}$ będzie jednostajnie sumowalną rodziną odwzorowań ograniczonych $f_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $i \in I$, i niech $(g_j)_{j\in J}$ będzie jednostajnie sumowalną rodziną odwzorowań ograniczonych $g_j : X \longrightarrow E$, $j \in J$. Jeżeli co najmniej jedna z tych rodzin jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna, to rodzina $(f_i g_j)_{(i,j)\in I\times J}$ jest jednostajnie sumowalna oraz $\sum_{(i,j)\in I\times J} f_i g_j = f_I g_J$. Jeżeli obie rodziny są bezwzględnie jednostajnie sumowalne, to rodzina $(f_i g_j)_{(i,j)\in I\times J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna.*

Dowód. Załóżmy, że rodzina $(g_j)_{j\in J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna. Pozostały przypadek pozostawiamy jako Ćwiczenie. Jeżeli już będziemy wiedzieć, że rodzina $(f_i g_j)_{(i,j)\in I\times J}$ jest jednostajnie sumowalna, to wzór na sumę będzie natychmiast wynikał z twierdzenia o grupowaniu rodzin sumowalnych. Istotnie, biorąc $I(j) := I \times \{j\}$, dostajemy

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} f_i g_j = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} f_i g_j\Big) = \sum_{j\in J} f_i\Big(\sum_{i\in I} g_j\Big) = \sum_{j\in J} f_i g_J = f_I g_J.$$

Przechodzimy do dowodu jednostajnej sumowalności rodziny $(f_i g_j)_{(i,j)\in I\times J}$. Wiemy, że istnieje stała $M > 0$ taka, że dla dowolnych $A \in \mathcal{F}(I)$, $B \in \mathcal{F}(J)$ mamy: $|f_A(x)| \leqslant M$, $\sum_{j\in B} \|g_j(x)\| \leqslant M$, $x \in X$. W szczególności, $|f_I(x)| \leqslant M$ oraz $\sum_{j\in J} \|g_j(x)\| \leqslant M$, $x \in X$.

Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech zbiory $S(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$, $C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(J)$ będą takie, że $|f_A(x) - f_I(x)| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $A \in \mathcal{F}(I)$ takiego, że $S(\varepsilon) \subset A$ oraz $\sum_{j\in B} \|g_j(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $B \in \mathcal{F}(J \setminus C(\varepsilon))$.

Niech teraz $D \in \mathcal{F}(I \times J)$ będzie taki, że $S(\varepsilon) \times C(\varepsilon) \subset D$. Dla dowolnego $j \in J$ niech $D(j) := \{i \in I : (i,j) \in D\}$ $(^{17})$. Mamy

$$\sum_{(i,j)\in D} f_i g_j - f_I g_J = \sum_{(i,j)\in D} f_i g_j - \sum_{j\in J} f_I g_j = \sum_{j\in J} (f_{D(j)} - f_I) g_j$$

$(f_\varnothing := 0)$. Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{(i,j)\in D} f_i g_j - f_I g_J\Big\| &\leqslant \sum_{j\in C(\varepsilon)} |f_{D(j)} - f_I|\|g_j\| + \sum_{j\notin C(\varepsilon)} |f_{D(j)} - f_I|\|g_j\| \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{j\in C(\varepsilon)} \|g_j\| + 2M \sum_{j\notin C(\varepsilon)} \|g_j\| \leqslant 3M\varepsilon.\end{aligned}$$

Jeżeli obie rodziny są bezwzględnie jednostajnie sumowalne, to na podstawie pierwszej części dowodu rodzina $(|f_i|\|g_j\|)_{(i,j)\in I\times J}$ jest jednostajnie sumowalna, co oznacza, że rodzina $(f_i g_j)_{(i,j)\in I\times J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna. □

$(^{16})$ Tzn. zbiór $D(j)$ pełni względem rodziny $(f_i)_{i\in I(j)}$ rolę zbioru $S(\frac{\varepsilon}{2N})$. W przypadku, gdy rodzina $I(j)$ jest skończona przyjmujemy $D(j) := I(j)$.

$(^{17})$ Odnotujmy, że $S(\varepsilon) \subset D(j)$ dla $j \in C(\varepsilon)$.

5.8. Funkcje analityczne I

Definicja 5.8.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{K}$ będzie zbiorem otwartym. Powiemy, że funkcja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ jest *analityczna* na Ω ($f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$), jeżeli dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieje szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, o dodatnim promieniu zbieżności taki, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ dla z z pewnego otoczenia punktu a.

W przypadku, gdy $\Omega \subset \mathbb{C}$ będziemy równoważnie mówić o *funkcji holomorficznej* i będziemy pisać $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Obserwacja 5.8.2. (a) $\mathcal{C}^\omega(\Omega)$ jest przestrzenią wektorową.

(b) Przypomnijmy, że każdy szereg potęgowy jest zbieżny niemal normalnie w swoim kole zbieżności (Twierdzenie 5.6.2). W szczególności, $\mathcal{C}^\omega(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$.

(c) Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$, to $fg \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$. Istotnie, jeżeli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ oraz $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r)$, to korzystając z iloczynu Cauchy'ego szeregów mamy:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)(z-a)^n, \quad z \in K(a,r).$$

(d) Funkcja $\mathbb{C}_* \ni z \longmapsto \frac{1}{z}$ jest analityczna.

Istotnie, dla $a \neq 0$ i dla $|z-a| < |a|$ mamy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{z-a}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-a}{a}\Big)^n.$$

(e) Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, to $f|_{\Omega\cap\mathbb{R}} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \cap \mathbb{R})$.

Twierdzenie 5.8.3 (Zasada identyczności dla funkcji analitycznych)**.** *Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{K}$ jest* obszarem *(tzn. zbiorem otwartym i spójnym) i $f = g$ na pewnym niepustym zbiorze mającym punkt skupienia w Ω, to $f \equiv g$.*

Dowód. Zastępując f, g przez $f-g, 0$, sprowadzamy dowód do przypadku $g \equiv 0$. Wiemy, że istnieje punkt $a \in \Omega$ oraz ciąg $(z_s)_{s=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{a\}$ taki, że $z_s \longrightarrow a$ i $f(z_s) = 0$, $s \in \mathbb{N}$. Wiemy, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $x \in K(a,r) \subset \Omega$. W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ rozumiemy, że $K(a,r) := (a-r, a+r)$. Oczywiście, $f(a) = a_0 = 0$. Gdyby $f \not\equiv 0$ w $K(a,r)$, to dla pewnego $p \in \mathbb{N}$ mielibyśmy $f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r)$, przy czym $a_p \neq 0$. Wynika stąd, że $f(z) = (z-a)^p \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-a)^{n-p} =: (z-a)^p h(z)$ i $h(a) = a_p \neq 0$. Funkcja h jako dana szeregiem potęgowym musi być ciągła w $K(a,r)$. Ponieważ $z_s \neq a$, wnioskujemy, że $h(z_s) = 0$, $s \gg 1$ — sprzeczność. Tak więc $f = 0$ w $K(a,r)$.

Niech $\Omega_0 := \{z_0 \in \Omega : f = 0$ w pewnym otoczeniu otwartym punktu $z_0\}$. Wiemy, że $\Omega_0 \neq \varnothing$. Wprost z definicji wynika, że Ω_0 jest otwarty. Pierwsza część dowodu pokazuje, że każdy punkt skupienia zbioru Ω_0 w Ω należy do Ω_0. Znaczy to, że Ω_0 jest domknięty w Ω. Ponieważ Ω jest spójny, musi być $\Omega_0 = \Omega$. $\square$

Ćwiczenie 5.8.4. Jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r)$, to $a_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Znaczy to, że lokalne rozwinięcia funkcji analitycznych są wyznaczone jednoznacznie.

Twierdzenie 5.8.5. *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ i załóżmy, że promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest dodatni. Niech*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in K(a,R).$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(K(R))$.

Dowód. Ustalmy $b \in K(a,R)$. Niech $0 < r < R - |b-a|$ i niech $z \in K(b,r)$. Policzmy formalnie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b+b-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a_n(z-b)^s(b-a)^{n-s}$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=s}^{\infty} a_n \binom{n}{s} a_n(b-a)^{n-s} \Big)(z-b)^s.$$

Niech $I := \{(n,s) \in \mathbb{N}_0^2,\ n \geqslant s\}$ i niech $c_{n,s} := a_n\binom{n}{s}(z-b)^s(b-a)^{n-s}$, $(n,s) \in I$. Aby powyższy rachunek formalny był poprawny wystarczy (na podstawie twierdzenia o grupowaniu wyrazów w rodzinach sumowalnych), aby rodzina $(c_{n,s})_{(n,s)\in I}$ była sumowalna. Wiemy, że wystarczy znaleźć bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ taką, że $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_{\sigma(k)}| < +\infty$. Jako σ przyjmijmy następujące ustawienie zbioru I w ciąg: $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1}, \dots, c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,n}, \dots)$. Wtedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{\varphi(k)}| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} |a_n| \binom{n}{s} |z-b|^s|b-a|^{n-s} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z-b| + |b-a|)^n < +\infty$$

(korzystamy tu z tego, że $|b-a| + |z-b| < R$). $\square$

Wniosek 5.8.6. (a) *Każdy wielomian jest funkcją holomorficzną na* $\mathbb{C}$.
(b) $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Twierdzenie 5.8.7 (Twierdzenie o złożeniu funkcji analitycznych)**.** *Niech $\Omega, U \subset \mathbb{K}$ będą otwarte i niech $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(U)$ będą takie, że $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\omega(U)$.*

Dowód. Ustalmy $t_0 \in U$ i niech $a := \varphi(t_0)$. Niech $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r) \subset \Omega$, oraz $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(t-t_0)^k$, $t \in K(t_0,\tau) \subset U$. Możemy założyć, że $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k||t-t_0|^k < r$ dla $t \in K(t_0,\tau)$. W szczególności, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k||t-t_0|^k)^n < +\infty$, $t \in K(t_0,\tau)$.

Cały problem polega na poprawności następującego rachunku formalnego dla $t \in K(t_0,\tau)$:

$$f(\varphi(t)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t-t_0)^k\Big)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{s_1,\dots,s_n \in \mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}} b_{s_1}\cdots b_{s_n}\Big)(t-t_0)^k$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} a_n \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n \in \mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}} b_{s_1}\cdots b_{s_n}\Big)(t-t_0)^k.$$

Aby wykazać poprawność tego grupowania wyrazów wystarczy sprawdzić, że rodzina

$$\big(a_n b_{s_1}\cdots b_{s_n}(t-t_0)^k\big)_{\substack{k,n\in\mathbb{N},\ n\leqslant k,\ s_1,\dots,s_n\in\mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}}$$

jest sumowalna. Tak jest, bowiem (por. metoda dowodu Twierdzenia 5.8.5):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n \in \mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}} |a_n b_{s_1}\cdots b_{s_n}||t-t_0|^k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k||t-t_0|^k\Big)^n < +\infty.$$ $\square$

Wniosek 5.8.8. *Niech $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$, $M := g^{-1}(0)$. Wtedy $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \setminus M)$. W szczególności:*
- *funkcje wymierne są analityczne,*
- *funkcje* tg, ctg, tgh *są analityczne.*

Dowód. Korzystając z analityczności funkcji $z \longmapsto \frac{1}{z}$ i z Twierdzenia 5.8.7, wnioskujemy, że $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \setminus M)$. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z analityczności iloczynu funkcji analitycznych. $\square$

Twierdzenie 5.8.9 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej do funkcji analitycznej)**.** *Niech $\Omega, U \subset \mathbb{K}$ będą otwarte i niech $f : \Omega \longrightarrow U$ będzie bijekcją taką, że $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$. Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in \Omega$ mamy $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r) \subset \Omega$, przy czym $a_1 \neq 0$. Niech $a := g(t_0)$. Wtedy funkcja $g := f^{-1}$ jest analityczna w otoczeniu t_0.*

Obserwacja 5.8.10. Cały czas pamiętajmy o bijekcji $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^3 \in \mathbb{R}$, dla której odwzorowanie odwrotne nie jest analityczne.

Dowód Twierdzenia 5.8.9. Bez szkody dla ogólności, po stosownych translacjach, możemy założyć, że $a = 0 = t_0$ (stąd $a_0 = 0$). Zastępując funkcję f funkcją $z \longmapsto f(\frac{z}{a_1})$, możemy założyć, że $a_1 = 1$. Zmieniając znak przy współczynnikach a_n, $n \geqslant 2$, możemy założyć, że $f(z) = z - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n =: \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$.

Przypuśćmy, że $g(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n t^n$, $t \in K(\tau)$. Mamy $f(g(t)) = t$, $\in K(\tau)$. A stąd:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n \in \mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}} b_{s_1}\cdots b_{s_n}\Big)t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n \in \mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}} c_n b_{s_1}\cdots b_{s_n}\Big)t^k,$$

czyli $b_1 = 1$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{k} \sum\limits_{\substack{s_1,\dots,s_n \in \mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}} c_n b_{s_1}\cdots b_{s_n} = 0$ dla $k \geqslant 2$. Zapiszmy ostatnie równanie w innej postaci:

$$b_k = \sum_{n=2}^{k} \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n \in \mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}} a_n b_{s_1}\cdots b_{s_n} =: P_k(a_2,\dots,a_k,b_1,\dots,b_{k-1}), \quad k = 2,3,\dots,$$

co daje rekurencyjny wzór na współczynniki b_k, $k \geqslant 2$. Zauważmy, że współczynniki wielomianu P_k są naturalne oraz, że $b_k = P_k(a_2,\dots,a_k,b_1,\dots,b_{k-1}) \geqslant 0$ dla $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 2$.

Umiemy więc wyznaczyć formalnie współczynniki szeregu funkcji g. Pozostaje sprawdzić, że szereg ten jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera. Zastosujemy *metodę majoranty analitycznej*.

Ustalmy $C > 1$ takie, że $|a_n| \leqslant C^n$, $n \in \mathbb{N}$ (por. Twierdzenie 5.6.2) i niech $F(z) := z - \sum_{n=2}^{\infty} C^n z^n = z - \frac{C^2z^2}{1-Cz}$, $|z| < 1/C$. Mamy $F(0) = 0$. Równanie $F(z) = t$, tzn. $(C^2+C)z^2 - (1+Ct)z + t = 0$ ma dla małych $|t|$ jednoznaczne rozwiązanie $G(t) = \frac{(1+Ct)-\sqrt{(1+Ct)^2-4t(C^2+C)}}{2(C^2+C)}$ takie, że $G(0) = 0$. Przypuśćmy na chwilę, że wiemy, że G jest analityczna, $G(t) = B_1 t + \sum\limits_{n=2}^{\infty} B_n t^n$, $|t| < \tau$. Powtarzając poprzednie formalne rozumowanie, mamy $B_1 = 1$ oraz

$$B_k = \sum_{n=2}^{k} \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n \in \mathbb{N} \\ s_1+\dots+s_n=k}} C^n B_{s_1}\cdots B_{s_n} = P_k(C^2,\dots,C^k,B_1,\dots,B_{k-1}), \quad k = 2,3,\dots,$$

przy czym $B_k \geqslant 0$ oraz $|b_k| \leqslant B_k$, $k \geqslant 2$. W konsekwencji, szereg $z - \sum\limits_{k=2}^{\infty} b_k t^k$ jest zbieżny dla $|t| < \tau$. Wracamy do problemu analityczności G. Zapiszmy $G(t) = \frac{(1+Ct)\Big(1-\sqrt{1-\frac{4t(C^2+C)}{(1+Ct)^2}}\Big)}{2(C^2+C)}$. Pamiętając o twierdzeniu o składaniu funkcji analitycznych, wnioskujemy, że problem leży w pokazaniu, że funkcja $u \longmapsto \sqrt{1+u}$ jest analityczna w otoczeniu $u = 0$. Pokażemy, że $\sqrt{1+u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} u^n$ dla $u \in K(1)$, gdzie $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ dla $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \alpha$).

Istotnie, mamy $\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} = \frac{\alpha-n}{n+1} \longrightarrow -1$ (dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$). Stąd, wobec Twierdzenia 2.4.2, $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\binom{\alpha}{n}|} = 1$. W szczególności, szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} u^n$ jest zbieżny w kole $K(1)$. Pozostaje wykazać, że $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{\frac12}{k}\binom{\frac12}{n-k} = \begin{cases}1, & \text{jeżeli } n\leqslant 1\\ 0, & \text{jeżeli } n\geqslant 2\end{cases}$. Wynika to natychmiast z *identyczności Chu* [18] – *Vandermonde'a* [19]

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}_0. \tag{*}$$

W naszym przypadku $\alpha=\beta=\frac12$, a więc $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{\frac12}{k}\binom{\frac12}{n-k}=\binom{1}{n}=\begin{cases}1, & \text{jeżeli } n\leqslant 1\\ 0, & \text{jeżeli } n\geqslant 2\end{cases}$.

W przypadku, gdy $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ powyższa identyczność (*) jest elementarna [20]. W przypadku ogólnym niech

$$W(\alpha,\beta):=\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\Big)-\binom{\alpha+\beta}{n},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

Wiemy, że $W(\alpha,\beta)=0$ dla $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$. Dla dowolnego $\alpha\in\mathbb{N}$ funkcja $W(\alpha,\cdot)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który zeruje się na $\mathbb{N}$. W takim razie $W(\alpha,\beta)=0$ dla $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{C}$. Dla dowolnego $\beta\in\mathbb{C}$ funkcja $W(\cdot,\beta)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który zeruje się na $\mathbb{N}$. Stąd $W(\alpha,\beta)=0$ dla $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. $\square$

Ćwiczenie 5.8.11. Udowodnić następującą *uogólnioną identyczność Vandermonde'a*

$$\sum_{\substack{s_1,\dots,s_N\in\mathbb{N}_0\\ s_1+\dots+s_N=n}}\binom{\alpha_1}{s_1}\cdots\binom{\alpha_N}{s_N}=\binom{\alpha_1+\dots+\alpha_N}{n},\quad N\in\mathbb{N},\ \alpha_1,\dots,\alpha_N\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Wniosek 5.8.12. $\log_a\in\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}_{>0})$ *($a>0$, $a\neq 1$)*, $\arcsin\in\mathcal{C}^\omega((-1,1))$, $\arccos\in\mathcal{C}^\omega((-1,1))$, $\operatorname{arctg}\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$, $\operatorname{arcctg}\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$.

Dowód. $\log_a$: Wiemy, że $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$. Wystarczy więc udowodnić, że $\ln x\in\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}_{>0})$. Chcemy skorzystać z Twierdzenia 5.8.9. W tym celu wystarczy sprawdzić, że jeżeli $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, $x\in\mathbb{R}$, to $a_1\neq 0$. Skorzystamy z Obserwacji 5.6.5(d): $a_1=\lim\limits_{z\to a}\frac{e^z-e^a}{z-a}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{a+z}-e^a}{z}=e^a\neq 0$.

arcsin: Ten sam problem, co poprzednio. Korzystamy z Obserwacji 5.6.7(g): $a_1=\lim\limits_{z\to a}\frac{\sin z-\sin a}{z-a}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin(a+z)-\sin a}{z}=\frac{2\cos(a+\frac z2)\sin\frac z2}{z}=\cos a\neq 0$, $a\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

arccos: $a_1=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos(a+z)-\cos a}{z}=\frac{-2\sin(a+\frac z2)\sin\frac z2}{z}=-\sin a\neq 0$, $a\in(0,\pi)$.

arctg: $a_1=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+z)-\operatorname{tg}a}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z\cos(a+z)\cos z}=\frac{1}{\cos^2 a}\neq 0$, $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

arcctg: Ćwiczenie. $\square$

Obserwacja 5.8.13. W przyszłości dowiemy się, że jeżeli $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, $|x-a|<r$, to $a_1=f'(a)$, co oczywiście znacznie uprości powyższe dowody.

---

[18] Chu Shih–chieh (1260–1320).

[19] Alexandre–Théophile Vandermonde (1735–1796).

[20] Na ile sposobów z grupy liczącej α mężczyzn i β kobiet można wybrać podgrupę liczącą n osób.