Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna.*
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna.*
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.*
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona.*
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

(1) Symbolika logiczna. Zbiory. Relacje. Odwzorowania.
(2) Grupy, ciała, ciała uporządkowane. Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych.
(3) Kresy.
(4) Zbiory przeliczalne.
(5) Nieprzeliczalność $\mathbb{R}$.
(6) Funkcje monotoniczne i okresowe.
(7) Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych.
(8) Liczby zespolone.
(9) Ciągi liczbowe.
(10) Pierwiastkowanie i potęgowanie.
(11) Liczba e.
(12) Granice górne i dolne.
(13) Przestrzenie metryczne. Przestrzenie zwarte. Metryka Czebyszewa. Przestrzenie spójne. Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych.
(14) Funkcje ciągłe. Granica w punkcie. Własności funkcji ciągłych. Krzywe. Przestrzenie unormowane.
(15) Podstawowe własności pochodnych.
(16) Twierdzenia o wartościach średnich.
(17) Reguła de L'Hôpitala.
(18) Twierdzenie o przyrostach skończonych
(19) Pochodne wyższych rzędów.
(20) Wzór Taylora.
(21) Różniczkowanie ciągu wyraz po wyrazie.
(22) Funkcje półciągłe.
(23) Funkcje wypukłe.

Kontynuacje

W semestrze letnim będzie wykład z Analizy Matematycznej 2 (60 godzin), zaś w przyszłym roku akademickim — wykłady z Analizy Matematycznej 3 (60 godzin) i 4 (60 godzin).

Zaliczanie ćwiczeń

W semestrze jest 60 godz. ćwiczeń. Limit nieobecności to 20 godzin, w tym limit nieobecności nieusprawiedliwionych to 8 godzin.

W przypadku przekroczenia któregokolwiek z tych limitów student otrzymuje ocenę NZAL i nie jest dopuszczony do egzaminów.

Egzaminy

Student, który uzyskał z zaliczenia ocenę $\geqslant 4,5$ otrzymuje automatycznie taką samą ocenę końcową z egzaminu, z tym że student, który ma 4,5 może z własnej woli pisać egzamin pisemny, aby poprawić sobie ocenę na 5,0.

Terminy egzaminów pisemnych:

- 30.01.2020, godz. 9:00–11:00, sala 1094; termin główny.
- 17.02.2020, godz. 9:00–11:00, sala 1094; termin poprawkowy.

Egzamin będzie się składać z 5 zadań i będzie oceniany w skali 0–50 punktów.

Egzamin 17.02.2020 jest dla osób dopuszczonych do zdawania, które bądź nie zdały egzaminu w głównym terminie, bądź z jakiegoś powodu do niego nie przystąpiły w głównym terminie.

Studenci, którzy uzyskają $\geqslant 26$ pkt i mieli zaliczenie na ocenę $\geqslant 3,0$ otrzymują ocenę końcową według następującej tabeli:

Punkty	Ocena
26–32	3,0
33–37	3,5
38–42	4,0
43–46	4,5
47–50	5,0

Studenci, którzy uzyskają $\geqslant 34$ pkt i mieli zaliczenie na ocenę 2,0 otrzymują ocenę końcową według następującej tabeli:

Punkty	Ocena
34–41	3,0
42–46	3,5
47–50	4,0

— Pozostali piszący egzamin otrzymują ocenę końcową 2,0.

— Studenci, którzy otrzymali z egzaminu 2,0 i mieli zaliczenie na 4,0 mogą się ubiegać o dodatkowy egzamin ustny.

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

1.1. Symbolika logiczna

Podstawy logiki i teorii zbiorów są przedmiotem wykładu *„Elementy logiki i teorii mnogości"*. Z tego też powodu ograniczamy się poniżej do podstawowych definicji i oznaczeń.

Będziemy rozważać zdania, o których możemy zawsze stwierdzić, czy są prawdziwe, czy fałszywe. Z punktu widzenia logiki istotne jest wyłącznie to, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Fakt, iż zdanie p jest prawdziwe zapisujemy $p = 1$, zaś, gdy jest fałszywe piszemy $p = 0$. Jeżeli $p = 1$, to mówimy, że p ma wartość logiczną 1, jeżeli $p = 0$, to p ma wartość logiczną 0.

Zaprzeczenie (negację) zdania p oznaczamy $\sim p$. Oczywiście, $p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sim p = 1$.

Parom zdań (p, q) możemy przy pomocy pewnych reguł (*funktorów*) przyporządkowywać nowe zdania. Podstawowe funktory to:

- *Alternatywa (suma logiczna)* $p \vee q$, inaczej oznaczana „lub".
- *Koniunkcja (iloczyn logiczny)* $p \wedge q$, inaczej oznaczana „i", lub samym przecinkiem.
- *Implikacja (wynikanie)* $p \Longrightarrow q$ (p nazywamy *poprzednikiem*, q nazywamy *następnikiem*).
- *Równoważność (wtedy i tylko wtedy)* $p \Longleftrightarrow q$.

Kwantyfikatory:

- *Kwantyfikator (duży) „dla każdego"* $\forall$, np. $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^2 \geqslant 0$.
- *Kwantyfikator (mały) „istnieje"* $\exists$, np. $\exists_{n\in\mathbb{N}} : n^2 = 4$.
- *Istnieje dokładnie jeden* $\exists!$, np. $\exists!_{n\in\mathbb{N}} : n^2 = 4$.

Przy pomocy funktorów i kwantyfikatorów możemy tworzyć bardziej skomplikowane zdania.

Prawa de Morgana (1) *dla kwantyfikatorów:*

$\sim(\forall_{x\in X} : W(x)) \iff \exists_{x\in X} : \sim W(x)$.

Przy definiowaniu nowych obiektów stosujemy następujące oznaczenia:

„:=" oznacza *równość z definicji*; *obiekt definiowany* := *obiekt definiujący*, np. $f(x) := x^2$, ale też $x^2 =: f(x)$;

„:⟺" oznacza *równoważny z definicji*, np. $A \subset B :\Longleftrightarrow \forall_{x\in A} : x \in B$.

1.2. Zbiory

Pojęcia zbioru oraz należenia do zbioru są pierwotne i nie są definiowane. Zbiór pusty, tzn. zbiór, do którego nie należy żaden element, oznaczamy przez $\varnothing$.

- *Zawieranie (inkluzja) zbiorów:* $A \subset B :\Longleftrightarrow \forall_{x\in A} : x \in B$. Będziemy też pisać $A \supset B$, jeżeli $B \subset A$.
- *Równość zbiorów:* $A = B :\Longleftrightarrow A \subset B,\ B \subset A$. Będziemy pisać $A \subsetneq B$, jeżeli $A \subset B$ i $A \neq B$.
- *Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru (potęga zbioru) X:* $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$.

Jeżeli $X = \{1, 2\}$, to $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots$.

Jeżeli zbiór X ma N elementów, $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, to zbiór $\mathcal{P}(X)$ ma 2^N elementów.

- *Suma zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $\bigcup \mathcal{A} := \{x \in X : \exists_{A\in\mathcal{A}} : x \in A\}$.
- *Iloczyn (przecięcie) zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \cap B := \{x \in X : x \in A,\ x \in B\}$. Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $\bigcap \mathcal{A} := \{x \in X : \forall_{A\in\mathcal{A}} : x \in A\}$.

---

(1) Augustus De Morgan (1806–1871).

• *Różnica zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$;

• *Dopełnienie zbioru A:* Jeżeli $A \subset X$, to $A^c := X \setminus A$.

Prawa de Morgana dla zbiorów:
Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $(\bigcup \mathcal{A})^c = \bigcap \mathcal{A}^c$, gdzie $\mathcal{A}^c := \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$.
Analogicznie, $(\bigcap \mathcal{A})^c = \bigcup \mathcal{A}^c$.

• *Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów:* Jeżeli $A, B \neq \varnothing$, to $A \times B := \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$, gdzie $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Ponadto, $A \times B := \varnothing$ o ile $A = \varnothing$ lub $B = \varnothing$.

Ćwiczenie: Udowodnić, że $(x', y') = (x'', y'') \Longleftrightarrow x' = x'',\ y' = y''$.

Jeżeli $A = B$, to zamiast $A \times A$ piszemy A^2.

• *Zbiory liczbowe:*
$\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych $1, 2, \dots$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant k\}$ $(k \in \mathbb{N})$,
$\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych,
$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych,
$\mathbb{C}$ — zbiór liczb zespolonych.
Oczywiście $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

• $A_* := A \setminus \{0\}$, np. $\mathbb{Q}_*$; $A_+ := \{x \in A : x \geqslant 0\}$, np. $\mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N}_0)$; $A_{>0} := \{x \in A : x > 0\}$, np. $\mathbb{R}_{>0}$. Podobnie definiujemy A_-, $A_{<0}$.

1.3. Relacje

Definicja 1.3.1. *Relacją (dwuargumentową) w zbiorze X* nazywamy dowolny zbiór $R \subset X \times X$. Zamiast pisać $(x, y) \in R$ piszemy zwykle xRy. Relację R nazywamy *równoważnościową*, jeżeli:

(i) (*zwrotność*) $\forall_{x \in X} : xRx$,
(ii) (*symetryczność*) $\forall_{x, y \in X} : (xRy \Longrightarrow yRx)$,
(iii) (*przechodniość*) $\forall_{x, y, z \in X} : ((xRy,\ yRz) \Longrightarrow xRz)$.

Jeżeli $R \subset X \times X$ jest relacją równoważnościową, to dla dowolnego $x \in X$ definiujemy *klasę równoważności (abstrakcji) x względem R*

$$[x]_R := \{y \in X : xRy\}.$$

Rodzinę $X/R := \{[x]_R : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *przestrzenią ilorazową*.

Oczywiście, $x \in [x]_R$ oraz $[x]_R = [y]_R \Longleftrightarrow xRy$ (Ćwiczenie).

Dla przykładu, jeżeli $X = \mathbb{Z}$, $xRy :\Longleftrightarrow 2|(x - y)$, to $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R,\ [1]_R\}$; $[0]_R$ to zbiór wszystkich liczb całkowitych parzystych, zaś $[1]_R$ — nieparzystych.

1.4. Odwzorowania

Definicja 1.4.1. Dane niech będą zbiory X oraz Y. Zbiór $f \subset X \times Y$ nazywamy *odwzorowaniem (funkcją)*, jeżeli $\forall_{x \in X}\ \exists!_{y \in Y} : (x, y) \in f$. Jeżeli $f \subset X \times Y$ jest odwzorowaniem, to piszemy $f : X \longrightarrow Y$. Zamiast pisać $(x, y) \in f$, piszemy $y = f(x)$. Jest to zgodne z tradycyjną definicją odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ jako przyporządkowania każdemu elementowi $x \in X$ pewnego elementu $y = f(x) \in Y$; $X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$.

• Dla $A \subset X$ definiujemy *obraz A poprzez f* jako zbiór $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$. Jest widoczne, że dla $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mamy $f(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup f(\mathcal{A})$, gdzie $f(\mathcal{A}) := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$, oraz $f(\bigcap \mathcal{A}) \subset \bigcap f(\mathcal{A})$.

Ćwiczenie: Znaleźć przykład funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ takich, że $\varnothing = f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B) \neq \varnothing)$.

• Dla $B \subset Y$ definiujemy *przeciwobraz B poprzez f* jako zbiór $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$. Zamiast pisać $f^{-1}(\{b\})$ piszemy $f^{-1}(b)$. Jest widoczne, że dla $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ mamy $f^{-1}(\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{B})$, gdzie $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$, oraz $f^{-1}(\bigcap \mathcal{B}) = \bigcap f^{-1}(\mathcal{B})$.

• Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Y \longrightarrow Z$, to odwzorowanie $g \circ f : X \longrightarrow Z$ dane wzorem $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, $x \in X$, nazywamy*złożeniem odwzorowań f oraz g*.

Ćwiczenie: Składanie odwzorowań jest łączne, tzn. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

• Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$, to dla $A \subset X$ określamy *zacieśnienie (zawężenie, restrykcję) odwzorowania f do A* jako odwzorowanie $f|_A : A \longrightarrow Y$ dane wzorem $f|_A(x) := f(x)$, $x \in A$.

• Jeżeli $f_j : X_j \longrightarrow Y$, $j = 1, 2$, oraz $f_1|_{X_1 \cap X_2} = f_2|_{X_1 \cap X_2}$, to odwzorowanie $f_1 \cup f_2 : X_1 \cup X_2 \longrightarrow Y$ dane wzorem $(f_1 \cup f_2)(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{gdy } x \in X_1 \\ f_2(x), & \text{gdy } x \in X_2 \end{cases}$ nazywamy *sklejeniem odwzorowań f_1 i f_2*. Ogólniej, jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ oraz $f_A : A \longrightarrow Y$, $A \in \mathcal{A}$, są odwzorowaniami takimi, że $f_A|_{A \cap B} = f_B|_{A \cap B}$ dla dowolnych $A, B \in \mathcal{A}$, to definiujemy *sklejenie odwzorowań f_A, $A \in \mathcal{A}$*, jako odwzorowanie $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} f_A : \bigcup \mathcal{A} \longrightarrow Y$ dane wzorem $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} f_A)(x) := f_A(x)$, $x \in A \in \mathcal{A}$.

• Jeżeli $f_j : X \longrightarrow Y_j$, $j = 1, \dots, N$, to odwzorowanie $(f_1, \dots, f_N) : X \longrightarrow Y_1 \times \dots \times Y_N$ dane wzorem $(f_1, \dots, f_N)(x) := (f_1(x) \dots, f_N(x))$ nazywamy *zestawieniem odwzorowań $f_1, \dots, f_N$*. Oczywiście, dla dowolnego odwzorowania $f : X \longrightarrow Y_1 \times \dots \times Y_N$ istnieją $f_j : X \longrightarrow Y_j$, $j = 1, \dots, N$ takie, że $f = (f_1, \dots, f_N)$.

• Jeżeli zbiór $f(X)$ jest jednopunktowy, to mówimy, że f jest *odwzorowaniem stałym*.

• Odwzorowanie $X \ni x \overset{\mathrm{id}_X}{\longmapsto} x \in X$ nazywamy *odwzorowaniem identycznościowym*. Niech $\mathrm{id}_{A,X} := \mathrm{id}_X |_A$, $A \subset X$.

Jeżeli $A \subset X$, to przez $\chi_{A,X} : X \longrightarrow \{0, 1\}$ oznaczamy *funkcję charakterystyczną zbioru A*,

$$\chi_{A,X}(x) := \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in A \\ 0, & \text{gdy } x \in X \setminus A \end{cases}.$$

Jeżeli zbiór X nie budzi wątpliwości, to będziemy pisać χ_A.

• Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy:
— *surjekcją*, jeżeli $Y = f(X)$;
— *injekcją (odwzorowaniem różnowartościowym)*, jeżeli dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z tego, że $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$ (równoważnie: jeżeli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$);
— *bijekcją*, jeżeli jest równocześnie injekcją i surjekcją.

• Dla bijekcji $f : X \longrightarrow Y$ definiujemy *odwzorowanie odwrotne (funkcję odwrotną)* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ przy pomocy przepisu $f^{-1}(y) = x :\Longleftrightarrow y = f(x)$. Innymi słowy: $f^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}$.

• Ćwiczenie: Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $g : Y \longrightarrow X$ takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_X$ oraz $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

• Ćwiczenie: Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ są injekcjami (odp. surjekcjami, bijekcjami), to $g \circ f$ jest injekcją (odp. surjekcją, bijekcją).

• Ćwiczenie: Jeżeli f i g są bijekcjami, to $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

• Ćwiczenie: Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest bijekcją, to $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ jest również bijekcją, $(f^{-1})^{-1} = f$ oraz $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$, gdzie zbiór po lewej stronie rozumiemy jako przeciwobraz zbioru B poprzez f, zaś zbiór po prawej — jako obraz zbioru B poprzez f^{-1}.

Definicja 1.4.2. Każde odwzorowanie $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ nazywamy *ciągiem w X*. Zwykle kładziemy $f_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, i piszemy $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ lub $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, np. $(1/n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$. Podciągiem ciągu $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ jest nazywany dowolny ciąg postaci $f \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$, gdzie $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ jest odwzorowaniem takim, że $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots$ (zauważmy, że φ musi być injekcją). Kładąc $n_k := \varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, piszemy wtedy, że $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest podciągiem ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definicja 1.4.3. Każde odwzorowanie $f : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ nazywamy *indeksowaną rodziną zbiorów* (o zbiorze indeksów I). Rodzinę $\mathcal{A} := \{f(i) : i \in I\}$ będziemy zapisywać wtedy jako $(A_i)_{i \in I}$, gdzie $A_i := f(i)$, $i \in I$. Ponadto, $\bigcup_{i \in I} A_i := \bigcup \mathcal{A}$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i := \bigcap \mathcal{A}$. Oczywiście każda rodzina $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ może być uważana za rodzinę indeksowaną.

Jeżeli $I = \{k, k+1, \dots, N\}$, to piszemy $\bigcup_{j=k}^{N} A_j$. Jeżeli $I = \{k, k+1, \dots\}$, to piszemy $\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$. Podobnie jak dla sumy zbiorów definiujemy $\bigcap_{j=k}^{N} A_j$ i $\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$.

1.5. Grupy, ciała, ciała uporządkowane

Definicja 1.5.1. *Grupą przemienną (abelową)* nazywamy dowolną parę $(G, \bullet)$, gdzie G jest zbiorem niepustym, zaś $\bullet : G \times G \longrightarrow G$ jest *działaniem* spełniającymi następujące warunki:

(a) $\forall_{a,b,c\in G} : (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (łączność),

(b) $\exists_{e\in G}\ \forall_{a\in G} : a \bullet e = e \bullet a = a$ (element neutralny),

(c) $\forall_{a\in G}\ \exists_{a'\in G} : a \bullet a' = a' \bullet a = e$ (element odwrotny; jeżeli spełnione są warunki (a), (b) i (c), to mówimy, że $(G, \bullet)$ jest *grupą*),

(d) $\forall_{a,b\in G} : a \bullet b = b \bullet a$ (przemienność).

Ciałem nazywamy dowolną trójkę $(F, +, \cdot)$, gdzie F jest niepustym zbiorem, zaś

$$+ : F \times F \longrightarrow F, \quad \cdot : F \times F \longrightarrow F$$

są działaniami spełniającymi następujące warunki:

(a) $(F, +)$ jest grupą przemienną (element neutralny względem $+$ oznaczamy przez 0, zaś element odwrotny przez $-a$),

(b) $(F_*, \cdot)$ jest grupą przemienną (element neutralny względem $\cdot$ oznaczamy przez 1, zaś element odwrotny przez a^{-1}),

(c) $\forall_{a,b,c\in F} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Mówimy, że czwórka $(F, +, \cdot, <)$ jest *ciałem uporządkowanym* jeżeli $(F, +, \cdot)$ jest ciałem, zaś $<$ jest relacją w F taką, że:

(P1) $\forall_{a,b\in F}$: zachodzi dokładnie jedna z możliwości: $a < b$, $a = b$, $b < a$ (spójność),

(P2) $\forall_{a,b,c\in F} : ((a < b,\ b < c) \Longrightarrow a < c)$ (przechodniość),

(P3) $\forall_{a,b,c\in F} : (b < c \Longrightarrow a + b < a + c)$ (zgodność relacji z dodawaniem),

(P4) $\forall_{a,b,c\in F} : (0 < a,\ b < c) \Longrightarrow a \cdot b < a \cdot c$ (zgodność relacji z mnożeniem).

Mówimy, że ciało uporządkowane $(F, +, \cdot, <)$ spełnia *aksjomat ciągłości (aksjomat Dedekinda* (2) *)*, jeżeli niemożliwe jest przedstawienie $F = A \cup B$, gdzie

(C1) $A, B \neq \varnothing$,

(C2) $\forall_{a\in A,\ b\in B} : a < b$,

(C3) $\forall_{a\in A}\ \exists_{a'\in A} : a < a'$,

(C4) $\forall_{b\in B}\ \exists_{b'\in B} : b' < b$.

Obserwacja 1.5.2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym, które nie spełnia aksjomatu Dedekinda.

Istotnie, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : (x \leqslant 0) \vee (x > 0,\ x^2 < 2)\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 > 2\}$.

1.6. Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Zakładamy, że znamy ciało uporządkowane $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ wraz ze standardową wartością bezwzględną $|\ | : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$.

Definicja 1.6.1. Mówimy, że ciąg $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ jest *ciągiem Cauchy'ego* (3), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant N} : |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Dla ciągów $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^\infty$, $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=1}^\infty \mathbb{Q}$ definiujemy

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} :\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon.$$

Niech

$$\mathcal{C} := \{\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q} : \boldsymbol{a} \text{ jest ciągiem Cauchy'ego}\}.$$

Łatwo widać, że $\sim$ jest relacją równoważności w $\mathcal{C}$. Definiujemy *zbiór liczb rzeczywistych*

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim .$$

Konstrukcja 1.6.2 (Budowa struktury zbioru liczb rzeczywistych)**.** Poniżej $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^\infty$, $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=1}^\infty$, $\boldsymbol{c} = (c_n)_{n=1}^\infty$, $\boldsymbol{d} = (d_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$.

(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := (a_n + b_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}$. Jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ oraz $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, to $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$.

---

(2) Julius Dedekind (1831–1916).

(3) Augustin Cauchy (1789–1857).

(b) Istnieje $M \in \mathbb{Q}_+$ takie, że $|a_n| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$.

Istotnie, biorąc w definicji ciągu Cauchy'ego, $\varepsilon = 1$ wnioskujemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a_N| \leqslant 1$ dla $n \geqslant N$. w takim razie wystarczy wziąć $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$.

(c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := (a_n b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$.

Istotnie, niech $M \in \mathbb{Q}_+$ będzie takie, że $|a_n|, |b_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - a_m b_m| \leqslant M(|a_n - a_m| + |b_n - b_m|)$.

(d) Jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ oraz $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, to $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d}$.

Istotnie, niech $M \in \mathbb{Q}_+$ będzie takie, że $|b_n|$, $|c_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - c_n d_n| \leqslant M(|a_n - c_n| + |b_n - d_n|)$.

(e) Powyższe własności pozwalają zdefiniować w $\mathcal{C}/\sim$ działania dodawania i mnożenia:

$[\boldsymbol{a}]_\sim + [\boldsymbol{b}]_\sim := [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]_\sim$,

$[\boldsymbol{a}]_\sim \cdot [\boldsymbol{b}]_\sim := [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}]_\sim$.

Jest oczywiste, że działania te są łączne i przemienne. Ponadto, mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

(f) Dla $r \in \mathbb{Q}$ przez $\boldsymbol{r}$ rozumiemy ciąg stały $r_n := r$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}$. Teraz definiujemy $\tau : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tau(r) = [\boldsymbol{r}]_\sim$, $r \in \mathbb{Q}$. Zauważmy, że τ jest injektywne oraz $\tau(r_1 + r_2) = \tau(r_1) + \tau(r_2)$, $\tau(r_1 \cdot r_2) = \tau(r_1) \cdot \tau(r_2)$, czyli τ jest *zgodne z działaniami.*

(g) Elementy $\tau(0) = [\boldsymbol{0}]_\sim$ oraz $\tau(1) = [\boldsymbol{1}]_\sim$ są neutralne odp. względem dodawania i mnożenia. Łatwo też widać, że element $[-\boldsymbol{a}]_\sim$ jest odwrotny do $[\boldsymbol{a}]_\sim$ względem dodawania, gdzie $-\boldsymbol{a} := (-a_n)_{n=1}^{\infty}$. Krótko: $-[\boldsymbol{a}]_\sim = [-\boldsymbol{a}]_\sim$.

(h) $\boldsymbol{a} \not\sim \boldsymbol{b} \iff \exists_{\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}_{>0},\, N \in \mathbb{N}} : (\forall_{n \geqslant N} : a_n \geqslant b_n + \varepsilon_0) \vee (\forall_{n \geqslant N} : b_n \geqslant a_n + \varepsilon_0)$.

Istotnie, implikacja „$\Longleftarrow$" jest oczywista. Dla dowodu implikacji „$\Longrightarrow$" wprost z definicji relacji $\sim$ wnioskujemy, że istnieje $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ oraz ciąg liczb $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ takie, że $n_1 < n_2 < \dots$ i $|a_{n_k} - b_{n_k}| > \varepsilon$. Niech $I_+ := \{k \in \mathbb{N} : a_{n_k} - b_{n_k} > \varepsilon\}$, $I_- := \{k \in \mathbb{N} : b_{n_k} - a_{n_k} > \varepsilon\}$. Co najmniej jeden z tych zbiorów musi być nieskończony. Przyjmijmy, że I_+. Zastępując ciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ stosownym podciągiem, możemy założyć, że $I_+ = \mathbb{N}$. Wobec definicji ciągu Cauchy'ego istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon/3$ i $|b_n - b_m| \leqslant \varepsilon/3$ dla $n, m \geqslant N$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $n_k \geqslant N$. Wtedy dla $n \geqslant N$ mamy

$$a_n - b_n \geqslant a_{n_k} - b_{n_k} - |a_n - a_{n_k}| - |b_n - b_{n_k}| > \varepsilon/3 =: \varepsilon_0.$$

(i) Niech $\boldsymbol{a} \not\sim \boldsymbol{0}$ i niech $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}_{>0}$ oraz $N \in \mathbb{N}$ będą takie, że $|a_n| \geqslant \varepsilon_0$ dla $n \geqslant N$. Zdefiniujmy $\boldsymbol{a}^* = (c_n)_{n=1}^{\infty}$, $c_n := 0$ dla $1 \leqslant n \leqslant N-1$ i $c_n := 1/a_n$ dla $n \geqslant N$. Wtedy $\boldsymbol{a}^* \in \mathcal{C}$ oraz $[\boldsymbol{a}]_\sim \cdot [\boldsymbol{a}^*]_\sim = [\boldsymbol{1}]_\sim$, czyli, że $[\boldsymbol{a}^*]_\sim = [\boldsymbol{a}]_\sim^{-1}$.

Istotnie, dla $m, n \geqslant N$ mamy $|1/a_n - 1/a_m| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^2}|a_n - a_m|$.

(j) Wykazaliśmy, że $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest ciałem.

(k) Wprowadzamy porządek: $[\boldsymbol{a}]_\sim < [\boldsymbol{b}]_\sim :\iff \exists_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0},\, N \in \mathbb{N}} : \forall_{n \geqslant N} : a_n + \varepsilon \leqslant b_n$.

Jest to relacja poprawnie określona, spójna, przechodnia i zgodna z działaniami.

Istotnie, jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, oraz $a_n + \varepsilon \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N$, to dobieramy $N_1 \geqslant N$ takie, że $|a_n - c_n| \leqslant \varepsilon/3$, $|b_n - d_n| \leqslant \varepsilon/3$ dla $n \geqslant N_1$. Wtedy, dla $n \geqslant N_1$ mamy $c_n + \varepsilon/3 \leqslant a_n + 2\varepsilon/3 \leqslant b_n - \varepsilon/3 \leqslant d_n$.

(P1) wynika natychmiast z (h).

(P2): Jeżeli $a_n + \varepsilon_1 \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N_1$ i $b_n + \varepsilon_1 \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N_2$, to biorąc $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dla $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, mamy $a_n + 2\varepsilon \leqslant b_n + \varepsilon \leqslant c_n$.

(P3): Jeżeli $b_n + \varepsilon \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N$, to $a_n + b_n + \varepsilon \leqslant a_n + c_n$ dla $n \geqslant N$.

(P4): Jeżeli $0 + \varepsilon_1 \leqslant a_n$ dla $n \geqslant N_1$ oraz $b_n + \varepsilon_2 \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N_2$, to dla $\varepsilon := \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ i $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ mamy $a_n \cdot b_n + \varepsilon \leqslant a_n(b_n + \varepsilon_2) \leqslant a_n \cdot c_n$ dla $n \geqslant N$.

(l) $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym.

(m) Dla $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mamy $r_1 < r_2 \iff \tau(r_1) < \tau(r_2)$, co oznacza, że τ jest zgodnie z relacjami $<$.

(n) Utożsamiamy $\mathbb{Q}$ z $\tau(\mathbb{Q})$. w szczególności, piszemy 0, 1 zamiast $\tau(0)$, $\tau(1)$.

(o) w $\mathbb{R}$ wprowadzamy relacje $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ oraz *wartość bezwzględną* $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$a \leqslant b :\iff (a = b) \vee (a < b)$,

$a > b :\iff b < a$,

$a \geqslant b :\iff (a = b) \vee (a > b)$,

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{jeżeli } a > 0 \\ 0, & \text{jeżeli } a = 0\,, \\ -a, & \text{jeżeli } a < 0 \end{cases}$$

(p) Oczywiście powyższa wartość bezwzględna zgadza się na $\mathbb{Q}$ z wyjściową wartością bezwzględną dla liczb wymiernych ($|\tau(r)| = |r|$ dla $r \in \mathbb{Q}$). Łatwo można sprawdzić (Ćwiczenie), że dla $a, b \in \mathbb{R}$ mamy $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

(q) Wprowadzamy *przedziały*:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ dla $a \leqslant b$,
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$, $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ dla $a < b$,
$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$, $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ dla $a \in \mathbb{R}$,
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$, $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ dla $b \in \mathbb{R}$,
$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$, $\varnothing$,
$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_{>0} := (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_{<0} := (-\infty, 0)$.

(r) Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, to istnieje $r \in \mathbb{Q}$ takie, że $r \in (a, b)$ (gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$).

Niech $a_n + \varepsilon \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N_1$. Dobieramy N_2 takie, że $|a_n - a_m|$, $|b_n - b_m| \leqslant \varepsilon/4$ dla $n, m \geqslant N_2$. Niech $N = \max\{N_1, N_2\}$, $r := a_N + \varepsilon/2$. Dla $n \geqslant N$ mamy $a_n + \varepsilon/4 \leqslant a_N + \varepsilon/2 = r < r + \varepsilon/4 = (a_N + \varepsilon/2) + \varepsilon/4 \leqslant b_N - \varepsilon/4 \leqslant b_n$.

(s) Spełniony jest aksjomat Dedekinda.

Istotnie, przypuśćmy, że $\mathbb{R} = A \cup B$ is spełnione są (C1) – (C4). Korzystając z tych warunków oraz (r), wnioskujemy, że istnieją liczby $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}$, $r_1 < s_1$, takie, że $r_1 \in A$, $s_1 \in B$. Rozważmy, punkt $q := \frac{1}{2}(r_1 + s_1)$. Leży on albo w A albo w B. Jeżeli w A to definiujemy $r_2 = q$, $s_2 := s_1$. Jeżeli leży w B, to kładziemy $r_2 = r_1$, $s_2 := q$. Powtarzamy procedurę. Dostajemy ciągi $\boldsymbol{r} = (r_n)_{n=1}^\infty$, $\boldsymbol{s} = (s_n)_{n=1}^\infty \mathbb{Q}$ takie, że $r_n \in A$, $s_n \in B$, $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n < s_n \leqslant s_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant s_1$ i $s_n - r_n = \frac{1}{2^{n-1}}(s_1 - r_1)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n, m \geqslant N$ mamy $|r_n - r_m| \leqslant s_N - r_N$. Wynika stąd natychmiast, że $\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}$. Podobnie $\boldsymbol{s} \in \mathcal{C}$. Oczywiście, $\boldsymbol{r} \sim \boldsymbol{s}$, a więc $[\boldsymbol{r}]_\sim = [\boldsymbol{s}]_\sim =: c$. Przypuśćmy, że $c \in A$. Niech $c' \in A$ będzie takie, że $c < c'$. Wobec (r), musi istnieć $t \in \mathbb{Q}$ takie, $c < t < c'$. Oznacza to w szczególności, że istnieją $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ i $N \in \mathbb{N}$ takie, że $r_n + \varepsilon \leqslant t < s_n$ dla $n \geqslant N$, co daje sprzeczność. Przypadek, gdy $c \in B$ jest analogiczny (Ćwiczenie).

(t) $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda.

Można pokazać, że $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest jedynym ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda takim, że istnieje odwzorowanie injektywne $\tau : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, które jest zgodne z działaniami i relacjami. Dokładniej, jeżeli $(\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot}, \widetilde{<})$ jest ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda takim, że istnieje odwzorowanie injektywne $\widetilde{\tau} : \mathbb{Q} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$, które jest zgodne z działaniami i relacjami ($<$, $\widetilde{<}$), to istnieje bijekcja $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ zgodna z działaniami i relacjami ($\widetilde{<}$ i $<$) taka, że $\varphi \circ \widetilde{\tau} = \tau$.

1.7. Kresy

Definicja 1.7.1. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że A jest *ograniczony od góry*, jeżeli istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że $x \leqslant M$ dla dowolnego $x \in A$. Każdą taką liczbę M nazywamy *ograniczeniem górnym (majorantą) zbioru* A. Zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru A oznaczamy (roboczo) $\operatorname{Maj} A$.

Mówimy, że A jest *ograniczony od dołu*, jeżeli istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, że $m \leqslant x$ dla dowolnego $x \in A$. Każdą taką liczbę m nazywamy *ograniczeniem dolnym (minorantą) zbioru* A. Zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A oznaczamy $\operatorname{Min} A$.

Mówimy, że A jest *ograniczony*, jeżeli jest jednocześnie ograniczony od dołu i od góry.

Mówimy, że element $a^* \in A$ jest *maksimum* zbioru A, jeżeli $x \leqslant a^*$ dla dowolnego $x \in A$. Piszemy $a^* = \max A$.

Mówimy, że element $a_* \in A$ jest *minimum* zbioru A, jeżeli $a_* \leqslant x$ dla dowolnego $x \in A$. Piszemy $a_* = \min A$.

Jeżeli zbiór $\operatorname{Maj} A \neq \varnothing$ ma element minimalny, to nazywamy go *supremum (kresem górnym)* zbioru A i oznaczamy $\sup A$. To znaczy, że $\sup A := \min(\operatorname{Maj} A)$.

Jeżeli zbiór $\operatorname{Min} A \neq \varnothing$ ma element maksymalny, to nazywamy go *infimum (kresem dolnym)* zbioru A i oznaczamy $\inf A$. To znaczy, że $\inf A := \max(\operatorname{Min} A)$.

Obserwacja 1.7.2. (a) Jeżeli $a \in \operatorname{Maj} A$ i $b > a$, to $b \in \operatorname{Maj} A$. Jeżeli $a \in \operatorname{Min} A$ i $b < a$, to $b \in \operatorname{Min} A$.

(b) $\operatorname{Maj}\mathbb{R} = \operatorname{Min}\mathbb{R} = \varnothing$.

(c) $\varnothing$ jest ograniczony, ale nie ma kresów.

(d) $\sup A$ i $\inf A$ są wyznaczone jednoznacznie.

(e) Jeżeli $\max A$ (odp. $\min A$) istnieje, to $\max A = \sup A$ (odp. $\min A = \inf A$).

(f) Każdy niepusty zbiór skończony $A \subset \mathbb{R}$ ma maksimum i minimum.

(g) $\max A = -\min(-A)$, $\sup A = -\inf(-A)$, gdzie $-A := \{-x : x \in A\}$. Jeżeli A jest ograniczony od góry (odp. od dołu), to $-A$ jest ograniczony od dołu (odp. od góry).

(h) $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony od góry (odp. od dołu) i $a_0 \in \mathbb{R}$, to następujące warunki są równoważne:

- $a_0 = \sup A$ (odp. $a_0 = \inf A$);
- $a_0 \in \operatorname{Maj} A$ oraz $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a\in A} :\ a > a_0 - \varepsilon$ (odp. $a_0 \in \operatorname{Min} A$ oraz $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a\in A} :\ a < a_0 + \varepsilon$).

Twierdzenie 1.7.3. *Każdy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony od góry (odp. od dołu) ma supremum (odp. infimum).*

Dowód. Załóżmy, że $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry. Niech $P := \mathbb{R} \setminus \operatorname{Maj} A$, $Q := \operatorname{Maj} A$. Wtedy:
$P \cup Q = \mathbb{R}$.
P, $Q \neq \varnothing$. Istotnie, $P \neq \varnothing$ bo $A \neq \varnothing$, zaś $Q \neq \varnothing$ bo A jest ograniczony z góry.
Jeżeli $a \in P$, $b \in Q$, to $a < b$. Istotnie, gdyby $a \geqslant b$, to wtedy $a \in Q$.
Jeżeli $a \in P$, to istnieje $b \in A$ takie, że $a < b$. Istotnie, gdyby $b \leqslant a$ dla dowolnego $b \in A$, to $a \in Q$.
Biorąc $a < a' < b$ dostajemy $a' \in P$ takie, że $a < a'$. Istotnie, gdyby $a' \in Q$, to $a' \geqslant b$.
Z zasady ciągłości wynika, że istnieje $b_0 \in Q$ takie, że $b_0 \leqslant b$ dla dowolnego $b \in Q$, czyli $b_0 = \sup A$.
Przypadek infimum przebiega analogicznie (Ćwiczenie). ☐

Obserwacja 1.7.4. Zbiór $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in I$, $x < y$, mamy $[x, y] \subset I$.

Oczywiście każdy przedział ma wyżej wymienioną własność. Załóżmy teraz, że $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$ ma tę własność.

- Jeżeli I jest ograniczony, to definiujemy $a := \inf I$, $b := \sup I$. Gdy $a = b$, to $I = \{a\} = [a, a]$. Jeżeli $a < b$, to, w zależności od tego, czy a i/lub b należą do I, mamy $I \in \{[a, b],\ (a, b],\ [a, b),\ (a, b)\}$.
- Jeżeli I jest ograniczony od góry, ale nie jest ograniczony od dołu, to definiujemy $b := \sup I$. Wtedy $I \in \{(-\infty, b],\ (-\infty, b)\}$.
- Jeżeli I jest ograniczony od dołu, ale nie jest ograniczony od góry, to definiujemy $a := \inf I$. Wtedy $I \in \{[a, +\infty),\ (a, +\infty)\}$.
- Jeżeli I nie jest ograniczony ani od góry ani od dołu, to $I = \mathbb{R}$.

1.8. Zbiory przeliczalne

Twierdzenie 1.8.1 (Zasada minimum)**.** *Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. Wtedy $\exists_{k_0\in A}\ \forall_{k\in A} : k_0 \leqslant k$, tzn. $k_0 = \min A$.*

Dowód. Zbiór A, jako podzbiór $\mathbb{R}$, jest ograniczony z dołu, a więc ma infimum k_0. Gdyby $k_0 \notin A$, to korzystając z Obserwacji 1.7.2(h), dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mielibyśmy $(k_0, k_0 + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, co daje sprzeczność. ☐

Twierdzenie 1.8.2 (Zasada indukcji matematycznej)**.** *Niech $A \subset \mathbb{N}_0$. Jeżeli $0 \in A$ oraz*

$$\forall_{k\in\mathbb{N}_0}\ (k \in A \Longrightarrow k + 1 \in A),$$

to $A = \mathbb{N}_0$.

Dowód. Przypuśćmy, że $A \subsetneq \mathbb{N}_0$ i niech $k_0 := \min(\mathbb{N} \setminus A)$ (na podstawie zasady minimum). Wobec definicji k_0 musi być $k_0 - 1 \in A$. Stąd, korzystając z założeń, wnioskujemy, że $k_0 \in A$; sprzeczność. ☐

Definicja 1.8.3. Dwa zbiory X oraz Y nazywamy *równolicznymi*, jeżeli istnieje bijekcja $\varphi : X \longrightarrow Y$. Zbiór A nazywamy *skończonym*, jeżeli $A = \varnothing$ lub A jest równoliczny ze zbiorem $\{1, \dots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ (wtedy mówimy, że A jest *n-elementowy*). Zbiory *nieskończone* to takie, które nie są skończone. Mówimy, że A jest *przeliczalny*, jeżeli A jest równoliczny z $\mathbb{N}$; zapisujemy to jako $\#A = \aleph_0$. Zbiór A nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeżeli jest skończony lub przeliczalny; zapisujemy to jako $\#A \leqslant \aleph_0$. Zbiór A nazywamy *nieprzeliczalnym*, jeżeli nie jest co najwyżej przeliczalny.

Obserwacja 1.8.4. (a) Relacja równoliczności zbiorów jest relacją równoważnościową.

(b) Zbiór jest przeliczalny, jeżeli wszystkie wyrazy tego zbioru można ustawić w ciąg różnowartościowy.

(c) $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ są przeliczalne.

Lemat 1.8.5. (a) *Każdy nieskończony zbiór $C \subset \mathbb{N}$ można ustawić w ciąg ściśle rosnący $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$, tzn. $a(n) < a(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Dowolny nieskończony podzbiór B zbioru przeliczalnego A jest przeliczalny.*

(c) *Jeżeli A jest przeliczalny, zaś $f : A \longrightarrow B$ jest surjekcją, to B jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. (a) Korzystając z zasady minimum definiujemy

$$a(1) := \min C, \qquad a(n) := \min(C \setminus \{a(1), \dots, a(n-1)\}), \quad n \geqslant 2.$$

Trzeba tylko pokazać, że $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$ jest odwzorowaniem surjektywnym. Oczywiście $a(1) < a(2) < \dots$. Przypuśćmy, że $c_0 \in C \setminus a(\mathbb{N}) \subset C \setminus \{a(1), \dots, a(n-1)\}$. Wtedy $n \leqslant a(n) \leqslant c_0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, co daje sprzeczność.

(b) Ponieważ A jest przeliczalny, istnieje bijekcja $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Niech $C := \varphi^{-1}(B)$; jest to zbiór nieskończony oraz $\varphi|_C : C \longrightarrow B$ jest bijekcją. Wiemy, że C można ustawić w ciąg ściśle rosnący $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$. Teraz $\psi := \varphi \circ a$ jest bijekcją $\mathbb{N} \longrightarrow B$.

(c) Możemy założyć, że $A = \mathbb{N}$ oraz, że B jest nieskończony. Zauważmy, że rodzina $\{f^{-1}(b) : b \in B\}$ składa się z niepustych zbiorów parami rozłącznych. Dla $b \in B$ niech $g(b) := \min f^{-1}(b)$ (zasada minimum). Wtedy $g : B \longrightarrow \mathbb{N}$ jest injekcją, a więc B jest przeliczalny. $\square$

Twierdzenie 1.8.6. (a) *Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny.*

(b) *Zbiór $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny.*

Dowód. (a) Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ustawiamy w nieskończoną tablicę

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & \longrightarrow & (1,2) & & (1,3) & \longrightarrow & (1,4) & & \dots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \dots \\
(2,1) & \longleftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & \dots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \dots \\
(3,1) & \longrightarrow & (3,2) & \longrightarrow & (3,3) & & (3,4) & & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \dots \\
(4,1) & \longleftarrow & (4,2) & \longleftarrow & (4,3) & \longleftarrow & (4,4) & & \dots \\
\downarrow & & & & & & & & \dots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

i teraz wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ustawimy w ciąg zgodnie ze strzałkami.

(b) Wobec (a) zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. Odwzorowanie $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ni (\ell, m) \longmapsto \frac{\ell}{m} \in \mathbb{Q}$ jest surjekcją. Teraz korzystamy z Lematu 1.8.5(c). $\square$

Definicja 1.8.7. *Iloczynem kartezjańskim* $A_1 \times \dots \times A_n$ zbiorów $A_1, \dots, A_n$ nazywamy zbiór wszystkich odwzorowań $a : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ takich, że $a(j) \in A_j$, $j = 1, \dots, n$. Odwzorowanie a utożsamiamy ze skończonym ciągiem $(a_1, \dots, a_n)$, czyli $A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$. Jeżeli $A_1 = \dots = A_k = A$, to zamiast $\underbrace{A \times \dots \times A}_{k\times}$ piszemy A^k.

Zauważmy, że dla $n = 2$ powyższa definicja zgadza się z definicją z podrozdziału 1.2 (Ćwiczenie).

Twierdzenie 1.8.8. (a) *Załóżmy, że rodzina $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ jest taka, że $I \neq \varnothing$, $\#I \leqslant \aleph_0$ oraz $\#A_i \leqslant \aleph_0$, $i \in I$. Wtedy zbiór $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ jest co najwyżej przeliczalny.*

(b) *Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ są co najwyżej przeliczalne, to $X_1 \times \dots \times X_n$ jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. (a) Jeżeli zbiór I jest skończony, to możemy przyjąć $I = \{1, \dots, N\}$. Jeżeli I jest przeliczalny, to możemy przyjąć, że $I = \mathbb{N}$. Niech $\varphi_i : B_i \longrightarrow A_i$ będzie bijekcją dla pewnego $B_i \subset \mathbb{N}$, $i \in I$. Na podstawie Twierdzenia 1.8.6(a) zbiór $C := \bigcup_{i \in I} \{i\} \times B_i \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. Ponieważ odwzorowanie $\varphi : C \longrightarrow A$, $\varphi(i, a) := \varphi_i(a)$, jest surjektywne, zbiór A jest co najwyżej przeliczalny (Lemat 1.8.5(c)).

(b) Indukcja względem n. Przypadek $n = 1$ jest oczywisty. Przechodzimy do kroku indukcyjnego $n \rightsquigarrow n+1$. Wtedy

$$X_1 \times \dots \times X_{n+1} = \bigcup_{x_{n+1} \in X_{n+1}} X_1 \times \dots \times X_n \times \{x_{n+1}\}$$

i możemy zastosować (a) $\square$

1.9. Nieprzeliczalność $\mathbb{R}$

Twierdzenie 1.9.1 (Twierdzenie Cantora (4)). *Niech $I_n := [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, $I_{n+1} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$.*

Dowód. Dla dowolnych m, n mamy $a_n \leqslant b_m$. Niech $A := \{a_1, a_2, \dots\}$. Jest to zbiór ograniczony z góry. Niech $a := \sup A$. Wtedy $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ dla dowolnego n. Stąd $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. $\square$

Ćwiczenie 1.9.2. Jeżeli w twierdzeniu Cantora $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} :\ b_N - a_N \leqslant \varepsilon$, to $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ musi być jednopunktowy.

Twierdzenie 1.9.3. *Dowolny przedział $I \subset \mathbb{R}$ taki, że $\#I \geqslant 2$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.*

Dowód. Przypuśćmy, że $I = \{c_1, c_2, \dots\}$. Ustalmy $a, b \in I$, $a < b$. Jeżeli $c_1 \notin I_0 := [a, b]$, to kładziemy $I_1 := I_0$. Jeżeli $c_1 \in I_0$, to dobieramy mniejszy przedział $I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0$ taki, że $a_1 < b_1$ i $c_1 \notin I_1$. Jeżeli $c_2 \notin I_1$, to kładziemy $I_2 := I_1$. Jeżeli $c_2 \in I_1$, to dobieramy mniejszy przedział $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ taki, że $a_2 < b_2$ i $c_2 \notin I_2$. Powtarzamy rozumowanie. Dostajemy zstępujący ciąg przedziałów $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$ taki, że $c_1, \dots, c_n \notin I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$ — sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 1.9.4 (Cantor). *Zbiór $\mathcal{X}$ wszystkich ciągów $\mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Oczywiście $\mathcal{X}$ jest nieskończony. Przypuśćmy, że ustawiliśmy go w ciąg $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{X}$. Teraz zdefiniujemy pewien element $x \in \mathcal{X}$:

$$x(n) := 1 - a(n)(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ, $x \notin a(\mathbb{N})$ dostajemy sprzeczność. $\square$

Powyższa metoda dowodu nosi nazwę *metody przekątniowej.*

Ćwiczenie 1.9.5. Udowodnić Twierdzenie 1.9.3 w oparciu o Twierdzenie 1.9.4.

1.10. Funkcje monotoniczne i okresowe

Definicja 1.10.1. Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ i $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *rosnąca* (odp. *silnie rosnąca*), jeżeli dla dowolnych $x, y \in A$ stąd, że $x < y$ wynika, że $f(x) \leqslant f(y)$ (odp. $f(x) < f(y)$).

Mówimy, że f jest *malejąca* (odp. *silnie malejąca*), jeżeli dla dowolnych $x, y \in A$ stąd, że $x < y$ wynika, że $f(x) \geqslant f(y)$ (odp. $f(x) > f(y)$).

Funkcje rosnące lub malejące nazywamy *monotonicznymi.* Funkcje silnie rosnące lub silnie malejące nazywamy *silnie monotonicznymi.*

Oczywiście, powyższe definicje dotyczą też ciągów $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja $f : A \longrightarrow B$ jest *okresowa* jeżeli istnieje liczba $\omega > 0$ (zwana *okresem*) taka, że:
- $\forall_{x\in A} : x + \omega,\ x - \omega \in A$,
- $\forall_{x\in A} : f(x + \omega) = f(x)$.

Jeżeli istnieje okres minimalny, to nazywamy go *okresem zasadniczym (podstawowym).*

Widać, że f jest rosnąca (odp. silnie rosnąca) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $-f$ jest malejąca (odp. silnie malejąca).

Przykład 1.10.2. Funkcja $f := \chi_{\mathbb{Q},\mathbb{R}}$ jest okresowa (dowolna liczba $\omega \in \mathbb{Q}_{>0}$ jest jej okresem), ale f nie posiada okresu zasadniczego.

---

(4) Georg Cantor (1845–1918).

1.11. Uzupełniony (rozszerzony) zbiór liczb rzeczywistych

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, gdzie $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$ i $-\infty \neq +\infty$. Dodawanie i mnożenie rozszerzamy na $\overline{\mathbb{R}}$ tylko częściowo:

$$a, b \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow a + b =$$

$b \backslash a$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$$a, b \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow a \cdot b =$$

$b \backslash a$	$-\infty$	$\mathbb{R}_{<0}$	0	$\mathbb{R}_{>0}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}_{<0}$	$+\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$\mathbb{R}_{>0}$	$-\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Dalej rozszerzamy relację $<$ na $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$:
$x < y :\Longleftrightarrow (x, y \in \mathbb{R},\ x < y) \vee (x = -\infty, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}) \vee (x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ y = +\infty)$.

Dostajemy relację spójną i przechodnią (Ćwiczenie). Możemy więc rozszerzyć na $\overline{\mathbb{R}}$ relacje $\leqslant$, $>$ i $\geqslant$. Dla dowolnych $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, definiujemy przedziały $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b). Ponadto, definiujemy $|\pm\infty| := +\infty$.

Pojęcia $\operatorname{Maj} A$, $\operatorname{Min} A$, $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$ przenosimy na $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ponieważ $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ dla dowolnego $x \in \overline{\mathbb{R}}$, zatem wszystkie zbiory $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ są ograniczone. Ponadto, jeżeli $A \neq \varnothing$, to $\sup A$ i $\inf A$ istnieją. Istotnie:

jeżeli zbiór $A \cap \mathbb{R}$ jest niepusty i ograniczony od góry, to przyjmujemy $\sup A := \sup(A \cap \mathbb{R})$ (po prawej stronie bierzemy supremum w „starym” sensie);

jeżeli zbiór $A \cap \mathbb{R}$ jest niepusty i nieograniczony od góry, to przyjmujemy $\sup A := +\infty$;

jeżeli $+\infty \in A$, to $\sup A := +\infty$;

jeżeli $A = \{-\infty\}$, to $\sup A := -\infty$.

Podobnie dla infimum (Ćwiczenie). Odnotujmy, że $\sup \varnothing := -\infty$, $\inf \varnothing := +\infty$.

Ćwiczenie 1.11.1. Odwzorowanie $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}$$

jest ściśle rosnącą bijekcją.

1.12. Liczby zespolone

W zbiorze $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzamy działania:

- dodawanie: $(x, y) = (u, v) := (x + u, y + v)$,
- mnożenie: $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$.

Ćwiczenie 1.12.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem, przy czym:

- $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dla dodawania.
- $-(x, y) = (-x, -y)$.
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym dla mnożenia.
- $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ jest injekcją zgodną z działaniami, co pozwala utożsamiać $\mathbb{R}$ z podzbiorem $\mathbb{C}$. w konsekwencji $x = (x, 0)$ dla $x \in \mathbb{R}$, np. $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$.
- Niech $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$; i nazywamy *jednostką urojoną*. Wtedy $i^2 = -1$ oraz $(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$.

- $i^k =?$ (proszę ustalić wzór).

Jeżeli $z = x + iy$ to:
$x =: \operatorname{Re} z$ nazywamy *częścią rzeczywistą* z,
$y =: \operatorname{Im} z$ — *częścią urojoną* z,
$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ — *modułem (wartością bezwzględną)* z,
$\overline{z} := x - iy$ — *liczbą sprzężoną z* z.

Ćwiczenie 1.12.2. Niech $w, z = x + iy \in \mathbb{C}$. Wtedy:
(a) $\overline{\overline{z}} = z$.
(b) $z = \overline{z} \iff z = x \in \mathbb{R}$.
(c) $x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
(d) $|\overline{z}| = |z|$.
(e) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
(f) operator sprzężenia $\mathbb{C} \ni z \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ jest zgodny z działaniami, tzn. $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ oraz $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$; ponadto, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ dla $z \neq 0$.
(g) $|wz| = |w||z|$.
(h) $|z| \leqslant |x| + |y|$.
(i) $\max\{|x|, |y|\} \leqslant |z| \leqslant \sqrt{2}\max\{|x|, |y|\}$.
(j) (*Nierówność trójkąta*) $||w| - |z|| \leqslant |w + z| \leqslant |w| + |z|$.
(k) Funkcja $\varrho(z, w) := |z - w|$ jest odległością Euklidesową na $\mathbb{C}$.
(l) Zbiór $K(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ jest kołem otwartym o środku w punkcie a i promieniu r.
(m) Zbiór $\overline{K}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$ jest kołem domkniętym o środku w punkcie a i promieniu r.

Standardowe oznaczenia: $K(r) := K(0, r)$, $\overline{K}(r) := \overline{K}(0, r)$, $\mathbb{D} := K(1)$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
Dla $z = x + iy \in \mathbb{C}$ zbiór $\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} : x = |z| \cos\varphi,\ y = |z| \sin\varphi\}$ nazywamy *argumentem* z (5).

Obserwacja 1.12.3. (a) $\arg 0 = \mathbb{R}$.
(b) $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; jest to tzw. *postać trygonometryczna* z.
(c) Jeżeli $z \neq 0$, to $\varphi_1, \varphi_2 \in \arg z \iff \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. w konsekwencji, jeżeli $z \neq 0$, to istnieje dokładnie jedna liczba $\varphi \in \arg z \cap (-\pi, \pi]$. Nazywamy ją *argumentem głównym* z i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$. Mamy $\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Ponadto przyjmujemy $\operatorname{Arg} 0 := 0$.
(d) $a \cdot b = |a||b|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \arg a$, $\beta \in \arg b$.
(e) (*Wzór de Moivre'a* (6)) $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \arg z$, $n \in \mathbb{N}$.

Dla $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$, zbiór $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$ nazywamy *pierwiastkiem zespolonym z liczby* z.

Ćwiczenie 1.12.4. (a) $\sqrt[n]{0} = \{0\}$.
(b) $\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) : k = 0, \dots, n - 1\right\}$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi := \operatorname{Arg} z$, $n \in \mathbb{N}$. (7)
(c) Dla $n \geqslant 3$ zbiór $\sqrt[n]{1}$ to wierzchołki n-kąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy $\mathbb{T}$.
(d) Czy prawdziwa jest równość $\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[nm]{z}$, tzn. $\bigcup\limits_{w \in \sqrt[n]{z}} \sqrt[m]{w} = \sqrt[nm]{z}$?

Twierdzenie 1.12.5 (Nierówność Schwarza (8)). *Dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ mamy*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b}_j\Big|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $(a_1, \dots, a_n)$ oraz $(b_1, \dots, b_n)$ są $\mathbb{C}$-liniowo zależne.

(5) Uwaga: precyzyjne definicje funkcji trygonometrycznych zostaną podane w podrozdziale 6.7.
(6) Abraham de Moivre (1667–1754).
(7) Uwaga: istnienie *pierwiastka arytmetycznego* $\sqrt[n]{a}$, $a \geqslant 0$, zostanie wykazane w Twierdzeniu 2.2.1.
(8) Hermann Schwarz (1789–1857).

Dowód. Niech $A := \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|^2$, $B := \sum\limits_{j=1}^{n} |b_j|^2$, $C := \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\overline{b}_j$. Jeżeli $AB = 0$, to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $AB > 0$. Mamy:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |Ba_j - Cb_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a}_j - \overline{Cb}_j) = \\
&= B^2 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 - B\overline{C} \sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b}_j - CB \sum_{j=1}^{n} b_j\overline{a}_j + |C|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 = \\
&= B^2 A - BC\overline{C} - CB\overline{C} + |C|^2 B = B^2 A - B|C|^2 = B(BA - |C|^2).
\end{aligned}$$

Wynika stąd natychmiast, że $|C|^2 \leqslant AB$ oraz, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $Ba_j = Cb_j$, $j = 1, \ldots, n$. $\square$

ROZDZIAŁ 2

Ciągi liczbowe

2.1. Ciągi liczbowe

W tym rozdziale będziemy rozważać tylko ciągi liczbowe $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. W przypadku, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mówimy o *ciągach zespolonych*, zaś w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — o *ciągach rzeczywistych*.

Obserwacja 2.1.1. W praktyce ciąg możemy zadać na następujące sposoby:

- *Wzorem ogólnym*, np. $a_n := 1/n$ lub $a_n := n$.
- *Wzorem rekurencyjnym*, np.

$a_1 := a$, $a_{n+1} := a_n + r$, $n \in \mathbb{N}$ (ciąg arytmetyczny), lub
$a_1 := a$, $a_{n+1} := a_n q$, $n \in \mathbb{N}$ (ciąg geometryczny), lub
$a_1 := 0$, $a_2 := 1$, $a_{n+1} := a_{n-1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}_2$ (ciąg Fibonacciego [1], $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$).

Oczywiście, bardzo często ciąg dany wzorem rekurencyjnym może być również zadany wzorem ogólnym (np. $a_n := a + (n-1)r$, czy $a_n := aq^{n-1}$), choć wzór rekurencyjny jest na ogół prostszy.

Ćwiczenie: Znaleźć wzór ogólny dla ciągu Fibonacciego.

- Poprzez opis, np. $a_n :=$ n-ta liczba pierwsza.

Definicja 2.1.2. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ jest *zbieżny* do liczby $a \in \mathbb{C}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : |a_n - a| \leqslant \varepsilon. \quad [2] \qquad (*)$$

Piszemy wtedy $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ lub $a_n \longrightarrow a$, a liczbę a nazywamy *granicą ciągu*.

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geqslant N} : |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Obserwacja 2.1.3. Jest rzeczą widoczną, iż skończona liczba początkowych wyrazów ciągu nie ma wpływu na jego zbieżność (i na granicę) oraz na to, czy ciąg jest Cauchy'ego. Mówimy, że własność W zachodzi *dla prawie wszystkich wyrazów ciągu* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że a_n ma własność W dla $n \geqslant N$. Z tego też powodu poniżej, gdy zakładamy, że jakaś własność zachodzi dla wszystkich wyrazów ciągu, możemy założyć, że zachodzi dla prawie wszystkich wyrazów.

Obserwacja 2.1.4 (Ćwiczenie). (a) Ciąg może być zbieżny tylko do jednej granicy.

(b) Jeżeli $a_n = c = \text{const}$, $n \in \mathbb{N}$, to $a_n \longrightarrow c$.

(c) $1/n \longrightarrow 0$.

(d) Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.
Istotnie, $|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a|$.

(e) Każdy ciąg Cauchy'ego jest *ograniczony*, tzn. istnieje $C > 0$ takie, że $|a_n| \leqslant C$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Istotnie, jeżeli $|a_n - a_m| \leqslant 1$ dla $n, m \geqslant N$, to $|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(f) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $|a_n| \longrightarrow |a|$.
Istotnie, $\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|$.

(g) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$ oraz $|a_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$, to $|a| \leqslant C$.
Istotnie, $|a| \leqslant |a_n| + |a_n - a| \leqslant C + |a_n - a|$.

---

[1] Leonardo Fibonacci (1175–1250).

[2] Innymi słowy: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : a_n \in \overline{K}(a, \varepsilon)$. Zauważmy, że warunek (*) jest równoważny warunkowi $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : |a_n - a| < \varepsilon$.

(h) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $\alpha a_n \longrightarrow \alpha a$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$.
Istotnie, $|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha||a_n - a|$.

(i) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow a$, to $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.
Istotnie, $|a_n + b_n - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$.

(j) Dla $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ mamy: $a_n + ib_n \longrightarrow a + ib \iff a_n \longrightarrow a,\ b_n \longrightarrow b$.
Podobnie, ciąg $(a_n + ib_n)_{n=1}^{\infty}$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$ jest ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ są ciągami Cauchy'ego.
Istotnie, $|a_n + ib_n - (a + ib)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$ oraz $\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} \leqslant |a_n + ib_n - (a + ib)|$.

(k) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow a$, to $a_n b_n \longrightarrow ab$.
Istotnie, wiemy, że ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ są ograniczone. Niech $|a_n|, |b_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leqslant C(|a_n - a| + |b_n - b|)$.

(l) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$ i $a \neq 0$, to $1/a_n \longrightarrow 1/a$.
Istotnie, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n| \geqslant |a|/2$, $n \geqslant N$. Wtedy dla $n \geqslant N$ mamy $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n a|} \leqslant \frac{4}{|a|^2}|a_n - a|$.

(m) Dla $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ i $a < b$, to $a_n < b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(n) Dla $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ i $a_n \leqslant b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $a \leqslant b$.

(o) (Twierdzenie o trzech ciągach) Jeżeli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_n \longrightarrow g$ i $c_n \longrightarrow g$, to $b_n \longrightarrow g$.

(p) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ jest rosnący i ograniczony od góry, to jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$.

(q) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ jest malejący i ograniczony od dołu, to jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_1, a_2, \dots\}$.

(r) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $a_{n_k} \longrightarrow a$ dla dowolnego podciągu $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.
Istotnie, jeżeli $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$, to $|a_{n_k} - a| \leqslant \varepsilon$ dla $k \geqslant N$ (ponieważ $n_k \geqslant k$).

(s) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ jest monotoniczny, to następujące warunki są równoważne:
- (i) ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny;
- (ii) ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony;
- (iii) istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbieżny;
- (iv) istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ograniczony.

(t) Podciąg ciągu Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego.

(u) Jeżeli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego oraz $a_{n_k} \longrightarrow a$, to $a_n \longrightarrow a$.
Istotnie, jeżeli $|a_n - a| \leqslant \varepsilon/2$ dla $n \geqslant N$ i $|a_{n_k} - a| \leqslant \varepsilon/2$ dla $k \geqslant N$, to $|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - a| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$.

(v) Jeżeli $\mathbb{N} = A \cup B$, gdzie $A \cap B = \varnothing$, $A = \{n_1, n_2, \dots\}$, $n_1 < n_2 < \dots$, $B = \{m_1, m_2, \dots\}$, $m_1 < m_2 < \dots$, oraz $a_{n_k} \longrightarrow a$ i $a_{m_k} \longrightarrow a$, to $a_n \longrightarrow a$.

Obserwacja 2.1.5 (Ćwiczenie)**.** Rozważmy *ciąg geometryczny* $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $q \in \mathbb{C}$. Wtedy:
- dla $|q| < 1$ ciąg jest zbieżny do 0,
- dla $|q| > 1$ ciąg jest rozbieżny,
- dla $q = 1$ ciąg jest zbieżny do 1,
- dla $q = -1$ ciąg jest rozbieżny.

Ćwiczenie* 2.1.6. Niech $q \in \mathbb{T}$. Kiedy zbiór $\{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$ jest gęsty w $\mathbb{T}$, tzn. dla dowolnych $z_0 \in \mathbb{T}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $|q^n - z_0| \leqslant \varepsilon$.

Twierdzenie 2.1.7 (Twierdzenie Bolzano ([3])–Weierstrassa ([4]))**.** *Z dowolnego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.*

W szczególności, każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Dowód. Wystarczy rozważyć *ciąg rzeczywisty* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Istotnie, załóżmy, że to wiemy i niech $(a_n + ib_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie zespolonym ciągiem Cauchy'ego. Wiemy, że $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ są rzeczywistymi ciągami

---

([3]) Bernhard Bolzano (1781–1848).
([4]) Karl Weierstrass (1815–1897).

Cauchy'ego. W takim razie $a_{n_k} \longrightarrow a$ dla pewnego podciągu $(n_k)_{k=1}^\infty$. Ciąg $(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ jest również ciągiem Cauchy'ego. w takim razie istnieje jego podciąg $(b_{n_{k_\ell}})_{\ell=1}^\infty$ zbieżny do pewnego b. Oczywiście, $a_{n_{k_\ell}} \longrightarrow a$. Ostatecznie, $a_{n_{k_\ell}} + ib_{n_{k_\ell}} \longrightarrow a + ib$.

Wracamy do ciągu rzeczywistego. Możemy założyć, że $-c \leqslant a_n \leqslant c$, $n \in \mathbb{N}$, dla pewnego $c > 0$. Niech $I_1 = [p_1, q_1] := [-c, c]$, $n_1 := 1$. Któryś z przedziałów $[-c, 0]$ lub $[0, +c]$ musi zawierać nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczamy go przez $I_2 = [p_2, q_2]$ i wybieramy $n_2 > 1$ takie, że $a_{n_2} \in I_2$. Teraz dzielimy I_2 na pół i powtarzamy rozumowanie. Dostajemy zstępujący ciąg przedziałów $I_k = [p_k, q_k]$, $k \in \mathbb{N}$, i podciąg $p_k \leqslant a_{n_k} \leqslant q_k$, $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że ciąg $(p_k)_{k=1}^\infty$ jest rosnący i ograniczony, zaś ciąg $(q_k)_{k=1}^\infty$ jest malejący i ograniczony. Wiemy, że $p_k \longrightarrow p$, $q_k \longrightarrow q$ oraz $q_k - p_k = \frac{c}{2^{k-2}}$. Stąd $p = q$. Teraz z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że $a_{n_k} \longrightarrow p$. □

Definicja 2.1.8. Niech $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest *zbieżny do* $+\infty$ (odp. $-\infty$), jeżeli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : a_n \geqslant M \text{ (odp. } a_n \leqslant M);$$

piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (odp. $-\infty$), lub $a_n \longrightarrow +\infty$ (odp. $-\infty$).

Obserwacja 2.1.9. Korzystając z Obserwacji 1.7.2(h) dostajemy następujący ważny wynik.

Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry (odp. z dołu). Wtedy istnieje ciąg rosnący (odp. malejący) $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ taki, że $a_n \longrightarrow \sup A$ (odp. $a_n \longrightarrow \inf A$).

Niech $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $a_n \longrightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_n \longrightarrow b \in \overline{\mathbb{R}}$. Pojawiają się naturalne pytania, czy i do czego są zbieżne ciągi $a_n + b_n$, $a_n b_n$, a_n/b_n.

Obserwacja 2.1.10. (a) Jeżeli $a + b$ ma sens, to $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

Istotnie, przypadek $a = b = \pm\infty$ jest oczywisty. Przypadek $a, b \in \mathbb{R}$ jest nam już znany. Przyjmijmy, że np. $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$. Wtedy $a + b = +\infty$. Ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ musi być ograniczony, $|a_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $b_n \geqslant 2M$ dla $n \geqslant N$ i dla pewnego $M \geqslant C$, to $a_n + b_n \geqslant 2M - C \geqslant M$, $n \geqslant N$, a wiec $a_n + b_n \longrightarrow +\infty$.

Podobnie postępujemy w przypadkach ($a = +\infty$, $b \in \mathbb{R}$), ($a \in \mathbb{R}$, $b = -\infty$), ($a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$) — Ćwiczenie.

Jeżeli $a = \pm\infty$, $b = \mp\infty$ dostajemy *symbol nieoznaczony* $\infty - \infty$. Nieoznaczoność tego symbolu rozumiemy w ten sposób, że:

— dla dowolnego $g \in \overline{\mathbb{R}}$ istnieją ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ takie, że $a_n \longrightarrow +\infty$, $b_n \longrightarrow -\infty$ i $a_n + b_n \longrightarrow g$,

— istnieją ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ takie, że $a_n \longrightarrow +\infty$, $b_n \longrightarrow -\infty$ i ciąg $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ nie jest zbieżny (ani do granicy skończonej, ani nieskończonej).

Ćwiczenie: Zilustrować powyższe przypadki konkretnymi przykładami.

(b) Jeżeli $a \cdot b$ ma sens, to $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$.

Jeżeli ($a = 0$, $b = \pm\infty$) lub ($a = \pm\infty$, $b = 0$) dostajemy *symbol nieoznaczony* $0 \cdot \infty$.

(c) Jeżeli $\frac{a}{b}$ ma sens, to $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Jeżeli $a = b = 0$, dostajemy *symbol nieoznaczony* $\frac{0}{0}$. Jeżeli $a, b \in \{-\infty, +\infty\}$, dostajemy

Ćwiczenie: w (b) i (c) uzupełnić dowody oraz zilustrować „nieoznaczoność" stosownymi przykładami.

2.2. Pierwiastkowanie i potęgowanie

Twierdzenie 2.2.1. *Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}_+$ i $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $p \in \mathbb{R}_+$ taka, że $a = p^n$.*

Piszemy $p =: \sqrt[n]{a}$ i nazywamy p *pierwiastkiem n-tego stopnia z a.*

Dowód. Przypadek $a = 0$ jest oczywisty. Zakładamy, że $a > 0$ oraz $n \geqslant 2$. Jedyność wynika z tego, że jeżeli $0 < p_1 < p_2$, to $p_1^n < p_2^n$ (korzystamy z (P4)). Przypadek $a = 1$ jest oczywisty, więc zakładamy dalej, że $a \neq 1$. Zauważmy, że możemy również założyć, że $a > 1$. Istotnie, jeżeli przyjmiemy, że umiemy już obliczać pierwiastek n-tego stopnia dla $a > 1$ i weźmiemy $0 < a < 1$, to wtedy wiemy, że istnieje $q \in \mathbb{R}_{>0}$ takie, że $q^n = 1/a$, a stąd $(1/q)^n = a$. Niech więc $a > 1$. Aby wykazać istnienie p definiujemy

$$A := \{q \in \mathbb{R}_{>0} : q^n \leqslant a\}.$$

Oczywiście, $1 \in A$. Ponadto, jeżeli $q \in A$, to $q \leqslant a$ (dla $q > a$, na podstawie (P4) mamy $q^n > a^n > a$), a więc A jest ograniczony z góry. Niech $p := \sup A$. Wiemy, że istnieje rosnący ciąg $(q_s)_{s=1}^\infty \subset A$ taki, że

$q_s \longrightarrow p$. Stąd $q_s^n \longrightarrow p^n \leqslant a$, a więc $p \in A$. Pokażemy, że gdyby było $p^n < a$, to wtedy dla pewnego $h > 0$ mielibyśmy $(p+h)^n < a$, co prowadzi do sprzeczności. Istotnie,

$$(p+h)^n - p^n = h\big((p+h)^{n-1} + (p+h)^{n-2}p + \dots + p^{n-1}\big) < nh(p+h)^{n-1}.$$

Biorąc $h := \min\left\{1, \frac{a-p^n}{n(p+1)^{n-1}}\right\}$, dostajemy $(p+h)^n < p^n + hn(p+h)^{n-1} \leqslant a$. □

Obserwacja 2.2.2 (Ćwiczenie). Dla $a, b \geqslant 0$ oraz $m, n \in \mathbb{N}$ mamy:

(a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

(b) $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

(c) Jeżeli $b > 0$, to $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

(d) Jeżeli $a < b$, to $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

(e) Jeżeli $\mathbb{R}_+ \ni a_s \longrightarrow a$, to $\sqrt[n]{a_s} \longrightarrow \sqrt[n]{a}$.

Istotnie, przypadek $a = 0$ jest elementarny (Ćwiczenie). Jeżeli $a > 0$, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_s \geqslant a/2$ dla $s \geqslant N$. Wtedy dla $s \geqslant N$ mamy

$$|\sqrt[n]{a_s} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|a_s - a|}{(\sqrt[n]{a_s})^{n-1} + (\sqrt[n]{a_s})^{n-2}\sqrt[n]{a} + \dots + (\sqrt[n]{a})^{n-1}} \leqslant \frac{|a_s - a|}{n(\sqrt[n]{a/2})^{n-1}}.$$

(f) Jeżeli $0 < a < 1$, to $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a}$.

(g) Jeżeli $a > 1$, to $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$.

Obserwacja 2.2.3. Jeżeli n jest nieparzyste, to definicję $\sqrt[n]{a}$ można rozszerzyć do $a < 0$, kładąc $\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}$. Istotnie, $(-\sqrt[n]{-a})^n = (-1)^n \cdot (-a) = a$. Nie będziemy korzystać z tego rozszerzenia.

Definicja 2.2.4. Dla $a > 0$ i $q := \ell/m \in \mathbb{Q}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, kładziemy $a^q := (\sqrt[m]{a})^\ell$.

Łatwo sprawdzić (Ćwiczenie), że definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od przedstawienia liczby q w postaci ułamka.

Obserwacja 2.2.5 (Ćwiczenie). Dla $a, b > 0$ i $q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mamy:

(a) $1^q = 1$.

(b) $a^0 = 1$.

(c) $(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q$.

(d) $a^{q_1+q_2} = a^{q_1} \cdot a^{q_2}$; w szczególności, $a^{-q} = 1/a^q$.

(e) $(a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 q_2}$.

(f) Jeżeli $q > 0$ i $a < b$, to $a^q < b^q$; w szczególności, dla $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^q \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca.

(g) Jeżeli $q < 0$ i $a < b$, to $a^q > b^q$; w szczególności, dla $q \in \mathbb{Q}_{<0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^q \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

(h) Jeżeli $a > 1$ i $q_1 < q_2$, to $a^{q_1} < a^{q_2}$; w szczególności, dla $a > 1$, funkcja $\mathbb{Q} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca.

(i) Jeżeli $0 < a < 1$ i $q_1 < q_2$, to $a^{q_1} > a^{q_2}$; w szczególności, dla $0 < a < 1$, funkcja $\mathbb{Q} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

Obserwacja 2.2.6. Teraz stoimy przed pewnym wyborem dotyczącym definicji a^x dla $x \in \mathbb{R}$. Mamy dwie drogi:

- Odłożyć definicję a^x do momentu wprowadzenia funkcji eksponens w podrozdziale 6.7 i zdefiniować $a^x := e^{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Zdefiniować już teraz a^x, być może mniej elegancko, ale za to uzyskując już teraz możliwość korzystania z takich potęg.

Wybieramy drugą drogę.

Definicja 2.2.7. Dla liczb $a \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$ definiujemy

$$a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} : q \leqslant x\}$$

(Ćwiczenie: zbiór po prawej stronie jest niepusty i ograniczony od góry). Dla $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R}$, definiujemy $a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

W wyrażeniu a^x liczbę a nazywamy *podstawą*, zaś liczbę x *wykładnikiem* potęgi a^x.

Obserwacja 2.2.8. (a) Jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to powyższe a^x zgadza się z poprzednią definicją.

(b) $1^x = 1$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

(c) Dla $a > 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ taki, że $q_n \nearrow x$ oraz $a^{q_n} \nearrow a^x$.

Istotnie, przypadek $x \in \mathbb{Q}$ jest trywialny. Jeżeli $x \notin \mathbb{Q}$, to, wobec definicji a^x, istnieje ciąg $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ taki, że $a^{q_n} \nearrow a^x$. Wobec, Obserwacji 2.2.5(h) musi być $q_n \leqslant q_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Gdyby $q_n \longrightarrow x^* < x$, to dla $b, c \in \mathbb{Q}$, $x^* < b < c < x$ mielibyśmy $a^c > a^b > a^{q_n}$, $n \in \mathbb{N}$, a więc $a^b > a^c \geqslant a^x$; sprzeczność.

Twierdzenie 2.2.9. *Niech $a > 0$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$.*

(a) $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$.

(b) *Jeżeli $b_n \longrightarrow \pm\infty$, to $a^{1/b_n} \longrightarrow 1$.*

(c) *Jeżeli $b_n \longrightarrow 0$, to $a^{b_n} \longrightarrow 1$.*

(d) *Jeżeli $b_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}$, to $a^{b_n} \longrightarrow a^x$.*

Dowód. (a) Przypadek $a = 1$ jest trywialny. Transformacja $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$ sprowadza dowód do przypadku $a > 1$. Niech $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Chcemy pokazać, że $\delta_n \longrightarrow 0$. Mamy $a = (1 + \delta_n)^n \geqslant 1 + n\delta_n$. Wynika stąd, że $0 < \delta_n \leqslant (a - 1)/n$, $n \in \mathbb{N}$, i teraz wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(b) Możemy założyć, że $a > 1$, $b_n \longrightarrow +\infty$. Możemy również założyć, że $b_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $k_n \leqslant b_n < k_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $k_n \longrightarrow +\infty$. Wobec (a) dostajemy $a^{1/k_n} \longrightarrow 1$. Ponieważ $1 < a^{1/b_n} \leqslant a^{1/k_n}$, wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(c) Wynika z (b) — wyrazy ciągu $(b_n)_{n=1}^\infty$ dzielimy na trzy grupy: wyrazy dodatnie, równe zero i ujemne. Jeżeli grupa dodatnia jest nieskończona, to stosujemy do niej (b). Jeżeli grupa ujemna jest nieskończona, to korzystamy z (b) dla wyrazów przeciwnych — zob. Obserwacja 2.1.4(v).

(d) Wobec definicji a^x możemy założyć, że $a > 1$. Niech $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ będzie taki, jak w Obserwacji 2.2.8(c). Wtedy, na podstawie (c), mamy $a^{b_n} = a^{q_n} \cdot a^{b_n - q_n} \longrightarrow a^x$. $\square$

Przykład 2.2.10. Niech $a_1, \dots, a_k \geqslant 0$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$.

Istotnie, możemy założyć, że $\max\{a_1, \dots, a_k\} = a_k$. Wtedy

$$a_k \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{k a_k^n} = \sqrt[n]{k} a_k \longrightarrow a_k.$$

W kolejnym kroku uogólnimy Twierdzenie 2.2.9 na dowolne ciągi $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.2.11. *Niech $a > 0$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$.*

(a) *Dla dowolnego ciągu $(b_n)_{n=1}^\infty$, jeżeli $b_n \longrightarrow +\infty$, to $a^{1/b_n} \longrightarrow 1$.*

(b) *Dla dowolnego ciągu $(b_n)_{n=1}^\infty$, jeżeli $b_n \longrightarrow 0$, to $a^{b_n} \longrightarrow 1$.*

(c) *Jeżeli $b_n \longrightarrow b$, to $a^{b_n} \longrightarrow a^b$.*

(d) *Jeżeli ciąg $(b_n)_{n=1}^\infty$ jest ograniczony i $a_n \longrightarrow 1$, to $a_n^{b_n} \longrightarrow 1$.*

(e) *Jeżeli $b_n \longrightarrow b$, $a_n \longrightarrow a$, to $a_n^{b_n} \longrightarrow a^b$.*

Dowód. (a) Możemy założyć, że $a > 1$ i $b_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $k_n \leqslant b_n < k_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $k_n \longrightarrow +\infty$. Ponieważ $1 < a^{1/b_n} \leqslant a^{1/k_n}$, wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(b) wynika z (a).

(c) Możemy założyć, że $a > 1$. Niech $q_n \in \mathbb{Q}$, $|q_n - b_n| \leqslant 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $q_n \longrightarrow b$. Wobec Twierdzenia 2.2.9(d) mamy $a^{q_n} \longrightarrow a^b$. Teraz, na podstawie (b), $a^{b_n} = a^{q_n} \cdot a^{b_n - q_n} \longrightarrow a^b$.

(d) Wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty$ dzielimy na trzy grupy: wyrazy > 1, wyrazy $= 1$ i wyrazy < 1. Wystarczy zająć się wyrazami pierwszej grupy. Niech $b_n \in [k, \ell]$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Wtedy $a_n^k \leqslant a_n^{b_n} \leqslant a_n^\ell$, $n \in \mathbb{N}$, i korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.

(e) Korzystamy z (c) i (d): $a_n^{b_n} = (a_n/a)^{b_n} \cdot a^{b_n} \longrightarrow a^b$. $\square$

Teraz, korzystając z Twierdzeń 2.2.9(d) i 2.2.11(e), przenosimy Obserwację 2.2.5 na dowolne potęgi rzeczywiste.

Obserwacja 2.2.12 (Ćwiczenie)**.** Dla $a, b > 0$ i $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mamy:

(a) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,

(b) $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$; w szczególności, $a^{-x} = 1/a^x$,

(c) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$,

(d) jeżeli $x > 0$ i $a < b$, to $a^x < b^x$; w szczególności, $p \in \mathbb{R}_{>0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^p \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca,

(e) jeżeli $x < 0$ i $a < b$, to $a^x > b^x$; w szczególności, dla $p \in \mathbb{R}_{<0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^p \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca,

(f) jeżeli $a > 1$ i $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} < a^{x_2}$; w szczególności, dla $a > 1$, funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca,

(g) jeżeli $0 < a < 1$ i $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} > a^{x_2}$; w szczególności, dla $0 < a < 1$, funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

W kontekście Twierdzenia 2.2.11(e), powstaje naturalne pytanie

$$\Big((x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0},\ x_n \longrightarrow x \in \overline{\mathbb{R}},\ a_n \longrightarrow a \in [0,+\infty]\Big) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n^{x_n} = ?$$

Prowadzi ono do kolejnych trzech symboli nieoznaczonych 1^∞, 0^0 i ∞^0:

$x \backslash a$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1^∞	0	0
$(-\infty,0)$	$+\infty$	a^x	1	a^x	0
0	0^0	1	1	1	∞^0
$(0,+\infty)$	0	a^x	1	a^x	$+\infty$
$+\infty$	0	0	1^∞	$+\infty$	$+\infty$

Twierdzenie 2.2.13. (a) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$.

(b) *Jeżeli $a_n \longrightarrow +\infty$, to $a_n^{1/a_n} \longrightarrow 1$.*

Dowód. (a) Niech $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Chcemy pokazać, że $\delta_n \longrightarrow 0$. Mamy $n = (1+\delta_n)^n \geqslant 1 + \binom{n}{2}\delta_n^2$, a stąd $0 \leqslant \delta_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}$.

(b) Możemy założyć, że $a_n > 1$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \leqslant a_n < k_n + 1$. Wtedy, korzystając z (a) oraz Twierdzenia 2.2.11(e) dostajemy.

$$1 \leqslant a_n^{1/a_n} \leqslant \Big((k_n+1)^{\frac{1}{k_n+1}}\Big)^{\frac{k_n+1}{k_n}} \longrightarrow 1^1 = 1. \qquad \square$$

Ćwiczenie 2.2.14. Znaleźć przykłady ilustrujące „nieoznaczoność" symboli 1^∞, 0^0 i ∞^0.

2.3. Liczba e

Twierdzenie 2.3.1. (a) *Niech*

$$e_n := \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $e_n < e_{n+1} < 3$, $n \in \mathbb{N}$. w konsekwencji, na mocy Obserwacji 2.1.4(p)*, ciąg $(e_n)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy przez e.*

(b) *Niech*

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wtedy $s_n \longrightarrow e$.

(c) *Dla dowolnego $n \geqslant 2$ istnieje $t_n \in (0,1)$ takie, że*

$$e = s_n + \frac{t_n}{n!n}.$$

(d) $e \notin \mathbb{Q}$.

(e) *Jeżeli $a_n \longrightarrow \pm\infty$, to $(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \longrightarrow e$.*

(f) *Jeżeli $0 \neq a_n \longrightarrow 0$, to $(1 + a_n)^{1/a_n} \longrightarrow e$.*

(g) $(1 + \frac{x}{n})^n \longrightarrow e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(h) $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $x \geqslant 0$. (5)

(i) *Dla dowolnego ciągu* $(h_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_*$ *takiego, że* $h_k \longrightarrow 0$ *mamy* $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{e^{x+h_k}-e^x}{h_k} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. (a) Wobec wzoru Newtona dostajemy

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \dots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n}).$$

Wynika stąd, że jest to ciąg silnie rosnący. Ponadto,

$$2 \leqslant e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

(b) Wiemy, że $e_n < s_n$ oraz dla $n \geqslant k$ dostajemy

$$e_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \dots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big),$$

co przy $n \longrightarrow +\infty$, daje $e \geqslant s_k$.

(c) Mamy

$$s_{n+k} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)\dots(n+k)}\Big)$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}}\Big) < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1},$$

co przy $k \longrightarrow +\infty$ daje

$$e - s_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!n}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Pozostaje zauważyć, że $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$.

(d) Jest oczywiste, że $e \notin \mathbb{N}$. Gdyby $e = \frac{m}{n}$ ($n \geqslant 2$), to na podstawie (c) mielibyśmy $n!e - n!s_n = \frac{t_n}{n}$, przy czym lewa strona jest liczbą całkowitą, zaś prawa — liczbą z przedziału $(0,1)$; sprzeczność.

(e) Jeżeli $a_n \longrightarrow +\infty$, to możemy założyć, że $a_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie taki, że $k_n \leqslant a_n < k_n + 1$; oczywiście $k_n \longrightarrow +\infty$. Mamy

$$e = \frac{e}{1} \longleftarrow \frac{\Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{k_n+1}}{1+\frac{1}{k_n+1}} \leqslant \Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)^{a_n} \leqslant \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big)^{k_n} \cdot \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big) \longrightarrow e \cdot 1 = e.$$

Jeżeli $a_n = -b_n \longrightarrow -\infty$, to korzystamy z przekształcenia

$$\Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)^{a_n} = \frac{1}{\Big(1-\frac{1}{b_n}\Big)^{b_n}} = \Big(\Big(1+\frac{1}{b_n-1}\Big)^{b_n-1}\Big)^{\frac{b_n}{b_n-1}}.$$

(f) Wynika z (e).

(g) Korzystamy z (f) z $a_n := x/n$: $e_n(x) := (1+\frac{x}{n})^n = \big((1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}\big)^x \longrightarrow e^x$.

(h) Niech $s_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Podobnie jak w dowodach (a) i (b), mamy:

$$e_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)x^2 + \dots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)x^k + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big)x^n \leqslant s_n(x), \quad x \geqslant 0.$$

Z drugiej strony, dla $n \geqslant k$ dostajemy:

$$e_n(x) \geqslant 1 + x + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)x^2 + \dots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)x^k,$$

(5) Uwaga: w przyszłości dowiemy się, że wzór ten zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ — Przykład 5.6.11(a).

co przy $n \longrightarrow +\infty$ i użyciu (g), daje $e^x \geqslant s_k(x)$, $x \geqslant 0$.

(i) Ponieważ $\frac{e^{x+h_k}-e^x}{h_k} - e^x \frac{e^{h_k}-1}{h_k}$, wystarczy tylko rozważyć przypadek $x = 0$, czyli pokazać, że $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{e^{h_k}-1}{h_k} = 1$. Możemy założyć, że $0 < h_k \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$. Korzystając z (g), (h) oraz (b), dla $h = h_k$ mamy:

$$0 \leqslant \frac{e^h - 1}{h} - 1 = \frac{1}{h}\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{h^\ell}{\ell!} - 1 - h\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=2}^{n} \frac{h^{\ell-1}}{\ell!} \leqslant h \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell!} = h \lim_{n\to\infty}(s_n - 2) \leqslant h(e-2),$$

skąd natychmiast wynika teza. □

Obserwacja 2.3.2. (a) $e \approx 2.718281828$.

(b) s_n przybliża e z błędem mniejszym niż $\frac{1}{n!n}$. Np. dla $n = 6$ mamy $\frac{1}{6!6} = \frac{1}{720\cdot 6} < 0.001$ i $s_6 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.7181$.

Ćwiczenie: Dla jakiego n liczba e_n daje przybliżenie e z błędem < 0.001?

2.4. Granice górne i dolne

Niech $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ będzie dowolny i niech $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) := \{g \in \overline{\mathbb{R}} : \exists_{(a_{n_k})_{k=1}^\infty} : a_{n_k} \longrightarrow g\}$. Zauważmy, że:

— jeżeli ciąg jest nieograniczony od góry, to $+\infty \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$,
— jeżeli jest nieograniczony od dołu, to $-\infty \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$,
— jeżeli jest ograniczony, to na podstawie Twierdzenia Bolzano–Weierstrassa 2.1.7, $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) \neq \varnothing$.

Definiujemy *granicę górną i dolną* ciągu $\boldsymbol{a}$ jako

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \sup \mathcal{S}(\boldsymbol{a}), \quad \liminf_{n\to+\infty} a_n := \inf \mathcal{S}(\boldsymbol{a}).$$

Czasami używa się symboli $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ i $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$.

Obserwacja 2.4.1. (a) $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(b) Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = g$.

(c) $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$.

Istotnie, niech $g := \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. Jeżeli $g = -\infty$, to $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) = \{-\infty\}$ i wtedy $a_n \longrightarrow g$.

Jeżeli $g \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $s \in \mathbb{N}$ znajdziemy $g' \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ takie, że $g - 1/s \leqslant g' \leqslant g$. Wiemy, że istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ taki, że $a_{n_k} \longrightarrow g'$. Znajdziemy więc wiec $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_{n_k} - g'| \leqslant 1/s$ dla $k \geqslant k_0$. Biorąc $s = 1, 2, \dots$, budujemy podciąg $(a_{\ell_s})_{s=1}^\infty$ taki, że $|a_{\ell_s} - g| \leqslant 2/s$, $s \in \mathbb{N}$.

Jeżeli $g = +\infty$, dla dowolnego $s \in \mathbb{N}$ znajdziemy $g' \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ takie, że $g' \geqslant 2s$. Wiemy, że istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ taki, że $a_{n_k} \longrightarrow g'$. Znajdziemy więc wiec $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_{n_k} \geqslant s$ dla $k \geqslant k_0$. Biorąc $s = 1, 2, \dots$, budujemy podciąg $(a_{\ell_s})_{s=1}^\infty$ taki, że $a_{\ell_s} \geqslant s$, $s \in \mathbb{N}$.

Dowód dla $\liminf$ przebiega analogicznie.

(d) Jeżeli $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n =: g$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$.

(e) Jeżeli $g := \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n < +\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M > g$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant M$ dla $n \geqslant N$.

(f) Jeżeli $g := \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n > -\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M < g$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \geqslant M$ dla $n \geqslant N$.

Twierdzenie 2.4.2. *Niech* $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$. *Wtedy*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

W szczególności, jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow g \in [0, +\infty]$, *to* $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow g$.

Dowód. Jeżeli $g_- := \liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$, to ustalamy dowolnie $0 < g_1 < g_2 < g_-$. Wiemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant g_2$ dla $n \geqslant N$. Stąd $a_{N+k} \geqslant a_N g_2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, a więc $a_n \geqslant a_N g_2^{n-N}$, $n \geqslant N$. Wynika stąd, że $\sqrt[n]{a_n} \geqslant g_2 \sqrt[n]{\frac{a_N}{g_2^N}}$, $n \geqslant N$. Ponieważ $\sqrt[n]{\frac{a_N}{g_2^N}} \longrightarrow 1$, zatem istnieje $N_1 \geqslant N$ takie, że $\sqrt[n]{a_n} \geqslant g_1$, $n \geqslant N_1$.

Jeżeli $g_+ := \limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < +\infty$, to ustalamy dowolnie $g_+ < g_2' < g_1' < +\infty$ i rozumując jak powyżej wnioskujemy, że $\sqrt[n]{a_n} \leqslant g_1'$, $n \geqslant N_1'$. $\square$

Przykład 2.4.3. (a) Jeżeli $a_n := \frac{2+(-1)^n}{2^n}$, to $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{2}$, ale ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n=1}^\infty$ jest rozbieżny.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Istotnie, bierzemy $a_n := \frac{n^n}{n!}$ i mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1 + \frac{1}{n})^n \longrightarrow e$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = 1$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, gdzie $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Istotnie, $\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \longrightarrow 1$.

ROZDZIAŁ 3

Przestrzenie metryczne

3.1. Przestrzenie metryczne

Definicja 3.1.1. *Przestrzenią metryczną* nazywamy parę (X, ϱ), gdzie X jest zbiorem, zaś $\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją taką, że:

(a) (*oznaczoność*) $\forall_{x,y \in X} : (\varrho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$,
(b) (*symetria*) $\forall_{x,y \in X} : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
(c) (*nierówność trójkąta*) $\forall_{x,y,z \in X} : \varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Funkcję ϱ nazywamy *metryką (odległością)*. Jeżeli wiadomo o jaką metrykę chodzi, to piszemy X zamiast (X, ϱ).

Obserwacja 3.1.2. (a) $(\mathbb{R}, \varrho_{\mathbb{R}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\mathbb{R}}(x, y) := |x - y|$.

(b) $(\overline{\mathbb{R}}, \varrho_{\overline{\mathbb{R}}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$, zaś $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$ jest bijekcją daną wzorem (zob. Ćwiczenie 1.11.1).

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}.$$

Dla $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ i $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mamy:

$$\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(a_n, a) \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_n \longrightarrow a, & \text{jeżeli } a \in \mathbb{R} \\ a_n \longrightarrow \pm\infty, & \text{jeżeli } a = \pm\infty \end{cases}.$$

(c) $(\mathbb{C}, \varrho_{\mathbb{C}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\mathbb{C}}(z, w) := |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$.
(d) Dowolny zbiór można zamienić w przestrzeń metryczną przy pomocy *metryki dyskretnej*

$$\varrho_d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = y \\ 1, & \text{jeżeli } x \neq y \end{cases}.$$

Przykład 3.1.3 (Sfera Riemanna)**.** Jako zbiór *sfera Riemanna* to $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Rozszerzamy działania na $\widehat{\mathbb{C}}$:
$\infty + a = a + \infty := \infty$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$,
$a \cdot \infty = \infty \cdot a := \infty$ dla dowolnego $a \in \widehat{\mathbb{C}}_*$,
$1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$.
Sfera Riemanna $\widehat{\mathbb{C}}$ jest bijektywna z dwuwymiarową sferą euklidesową

$$\boldsymbol{S} := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + (w - \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2\}$$

poprzez *rzut stereograficzny* $R : \boldsymbol{S} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$,

$$R(u, v, w) := \Big(\frac{u}{1 - w}, \frac{v}{1 - w}\Big), \quad (u, v, w) \in \boldsymbol{S} \setminus \{\boldsymbol{N}\}, \qquad R(\boldsymbol{N}) := \infty,$$

gdzie $\boldsymbol{N} := (0, 0, 1)$. Istotnie (Ćwiczenie),

$$R^{-1}(z) = \Big(\frac{x}{1 + |z|^2}, \frac{y}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}\Big), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \qquad R^{-1}(\infty) := \boldsymbol{N}.$$

W szczególności, $\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}}(a,b) := \varrho_{\mathbb{R}^3}(R^{-1}(a), R^{-1}(b))$, $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$, gdzie $\varrho_{\mathbb{R}^3}$ oznacza odległość euklidesową w $\mathbb{R}^3$ (1), jest metryką w $\widehat{\mathbb{C}}$. Nosi ona nazwę *metryki sferycznej*. Można pokazać (Ćwiczenie), że

$$\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}}(a,b) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } a = b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}, & \text{jeżeli } a \in \mathbb{C},\ b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a = \infty,\ b \in \mathbb{C} \\ \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a, b \in \mathbb{C} \end{cases}, \quad a, b \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Dla ciągu $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ oraz $z_0 \in \mathbb{C}$ mamy (Ćwiczenie):
$\varrho_{\hat{\mathbb{C}}}(z_n, z_0) \longrightarrow 0 \iff z_n \longrightarrow z_0$ (w zwykłym sensie).
$\varrho_{\hat{\mathbb{C}}}(z_n, \infty) \longrightarrow 0 \iff |z_n| \longrightarrow +\infty$.

Definicja 3.1.4. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Dla $a \in X$ i $r > 0$ definiujemy:
- *kulę otwartą* $B_\varrho(a,r) = B(a,r) := \{x \in X : \varrho(a,x) < r\}$,
- *kulę domkniętą* $\overline{B}_\varrho(a,r) = \overline{B}(a,r) := \{x \in X : \varrho(a,x) \leqslant r\}$.

Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *otwarty*, jeżeli dla dowolnego $a \in A$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(a,r) \subset A$. Rodzinę wszystkich podzbiorów otwartych nazywamy *topologią* i oznaczamy $\operatorname{top} \varrho$ lub $\operatorname{top} X$, gdy metryka jest znana. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *domkniętym*, jeżeli zbiór $X \setminus A$ jest otwarty. Rodzinę wszystkich podzbiorów domkniętych oznaczamy $\operatorname{cotop} \varrho$ lub $\operatorname{cotop} X$, gdy metryka jest znana.

Obserwacja 3.1.5 (Ćwiczenie). (a) W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}, \varrho_{\mathbb{R}})$ mamy: $B(a,r) = (a-r, a+r)$, $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$.

(b) Dla $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ mamy: $A \in \operatorname{top} \varrho_{\overline{\mathbb{R}}} \iff A \cap \mathbb{R} \in \operatorname{top} \varrho_{\mathbb{R}}$ oraz
$+\infty \in A \Longrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}} : (M, +\infty] \subset A$,
$-\infty \in A \Longrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}} : [-\infty, M) \subset A$.

(c) W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{C}, \varrho_{\mathbb{C}})$ mamy: $B(a,r) = K(a,r) =$ koło otwarte o środku w punkcie a i promieniu r; $\overline{B}(a,r) = \overline{K}(a,r) =$ koło domknięte o środku w punkcie a i promieniu r.

(d) W przestrzeni $(\widehat{\mathbb{C}}, \varrho_{\widehat{\mathbb{C}}})$ mamy $B(\infty, r) = \begin{cases} \widehat{\mathbb{C}}, & \text{jeżeli } r > 1 \\ \{\infty\} \cup \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}\Big\}, & \text{jeżeli } 0 < r \leqslant 1 \end{cases}$.
Jak wyglądają kule $B(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$?

(e) W przestrzeni z metryką dyskretną mamy

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{jeżeli } r \leqslant 1 \\ X, & \text{jeżeli } r > 1 \end{cases}, \quad \overline{B}(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{jeżeli } r < 1 \\ X, & \text{jeżeli } r \geqslant 1 \end{cases}.$$

(f) W dowolnej przestrzeni metrycznej (X, ϱ), dla dowolnych $a, b \in X$, $a \neq b$, jeżeli $r := \frac{\varrho(a,b)}{3}$, to $B(a,r) \cap B(b,r) = \varnothing$.

Istotnie, dla $x \in B(a,r)$ i $y \in B(b,r)$ mamy $\varrho(x,y) \geqslant \varrho(a,b) - \varrho(a,x) - \varrho(b,y) > \frac{r}{3}$.

(g) W dowolnej przestrzeni metrycznej (X, ϱ) kule otwarte są otwarte, zaś kule domknięte są domknięte.

Istotnie, jeżeli $x_0 \in B(a,r)$, to dla $x \in B(x_0, r - \varrho(a,x_0))$ mamy $\varrho(a,x) \leqslant \varrho(a,x_0) + \varrho(x_0,x) < r$, czyli $B(x_0, r - \varrho(a,x_0)) \subset B(a,r)$.

Jeżeli $x_0 \in X \setminus \overline{B}(a,r)$, to dla $x \in B(x_0, \varrho(a,x_0) - r)$ mamy $\varrho(a,x) \geqslant \varrho(a,x_0) - \varrho(x_0,x) > r$, czyli $B(x_0, \varrho(a,x_0) - r) \subset X \setminus \overline{B}(a,r)$.

(h) Rodzina $\mathcal{T} := \operatorname{top} \varrho$ ma następujące własności:
- $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
- $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{T} \Longrightarrow U_1 \cap \dots \cap U_N \in \mathcal{T}$,
- $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(i) Rodzina $\mathcal{F} := \operatorname{cotop} \varrho$ ma następujące własności:
- $\varnothing, X \in \mathcal{F}$,
- $F_1, \dots, F_N \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cup \dots \cup F_N \in \mathcal{F}$,

---

(1) $\varrho_{\mathbb{R}^3}(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

- $(F_i)_{i\in I} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$.

(j) Jeżeli ϱ jest metryką, to $d := \min\{1, \varrho\}$ jest również metryką oraz $\operatorname{top}\varrho = \operatorname{top} d$.

(k) W *topologii dyskretnej* (tzn. topologii generowanej przez metrykę dyskretną) mamy $\operatorname{top}\varrho_d = \mathcal{P}(X) = \operatorname{cotop}\varrho_d$.

(l)* Niech $d := \varphi \circ \varrho$, gdzie $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest dowolną funkcją rosnącą taką, że:

- $\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
- φ jest *wklęsła* (zob. § 5.9), tzn. $\varphi(tx + (1-t)y) \geqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ i $t \in [0, 1]$ (np. $\varphi(x) := \sqrt{x}$).

Wtedy d jest metryką. Kiedy $\operatorname{top}\varrho = \operatorname{top} d$?

Definicja 3.1.6. (1) Dla dowolnego zbioru $A \subset X$ definiujemy:

$$\begin{aligned} \textit{wnętrze } A\text{:} &\quad \operatorname{int} A = A^\circ := \bigcup_{U\in\operatorname{top} X:\ U\subset A} U,\\ \textit{domknięcie } A\text{:} &\quad \operatorname{cl} A = \overline{A} := \bigcap_{F\in\operatorname{cotop} X:\ A\subset F} F,\\ \textit{brzeg } A\text{:} &\quad \partial A := \overline{A} \setminus \operatorname{int} A. \end{aligned}$$

(2) Każdy zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $a \in U$ nazywamy *otoczeniem otwartym punktu a*. Każdy zbiór $A \subset X$ taki, że $a \in \operatorname{int} A$ nazywamy *otoczeniem punktu a*.

(3) Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest

- *gęsty*, jeżeli $\overline{A} = X$,
- *brzegowy*, jeżeli $\operatorname{int} A = \varnothing$,
- *nigdziegęsty*, jeżeli $\operatorname{int}\overline{A} = \varnothing$,
- *ograniczony*, jeżeli istnieją $a \in X$ i $r > 0$ takie, że $A \subset B(a, r)$.

(4) Dla zbioru $A \subset X$ definiujemy jego *średnicę* $\operatorname{diam} A := \sup \varrho(A \times A)$, przy czym $\operatorname{diam}\varnothing := 0$.

(5) Dla $\varnothing \neq A \subset X$ i $x \in X$ kładziemy $\varrho(x, A) := \inf\{\varrho(x, a) : a \in A\}$.

(6) Mówimy, że punkt a jest *punktem skupienia zbioru A*, jeżeli dla dowolnego otoczenia U tego punktu mamy $A \cap (U \setminus \{a\}) \neq \varnothing$. Zbiór wszystkich punktów skupienia oznaczamy A'. Punkty z $A \setminus A'$ nazywamy *punktami izolowanymi zbioru A*.

(7) Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset X$ jest zbieżny do punktu $a \in X$, jeżeli dla dowolnego otoczenia U punktu a istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \in U$ dla $n \geqslant N$. Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, lub $a_n \xrightarrow{\varrho} a$, lub $a_n \longrightarrow a$.

(8) Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geqslant N} : \varrho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon.$$

(9) Mówimy, że (X, ϱ) jest przestrzenią zupełną, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

(10) Mówimy, że dwie metryki $\varrho_1, \varrho_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *równoważne* ($\varrho_1 \sim \varrho_2$), jeżeli $\operatorname{top}\varrho_1 = \operatorname{top}\varrho_2$. Jest to relacja równoważności. Własności niezmiennicze względem metryk równoważnych (np. zbieżność, ciągłość) nazywamy *własnościami topologicznymi* przestrzeni metrycznej (X, ϱ).

(11) Mówimy, że dwie metryki $\varrho_1, \varrho_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *porównywalne*, jeżeli $\varrho_1 \leqslant c_1\varrho_2^{\alpha_1}$ i $\varrho_2 \leqslant c_2\varrho_1^{\alpha_2}$ dla pewnych stałych $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$. Porównywalność metryk jest również relacją równoważnościową. Własności niezmiennicze względem metryk porównywalnych (np. ograniczoność, jednostajna ciągłość) nazywamy *własnościami metrycznymi* przestrzeni (X, ϱ).

Obserwacja 3.1.7. (a) Dla dowolnych $a, b \in X$, $a \neq b$, istnieją otoczenia otwarte U_a, U_b takie, że $U_a \cap U_b = \varnothing$, czyli każda przestrzeń metryczna jest *przestrzenią Hausdorffa* (2).

(b) $A \in \operatorname{top} X \Longleftrightarrow A = \operatorname{int} A$.

(c) $a \in \operatorname{int} A \Longleftrightarrow \exists_{r>0} :\ B(a, r) \subset A$.

(d) $A \in \operatorname{cotop} X \Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

(e) $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall_{r>0} :\ B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

Istotnie, przypuśćmy, że $B(a, r) \cap A = \varnothing$ dla pewnego $a \in \overline{A}$. Wtedy $X \setminus B(a, r)$ jest zbiorem domkniętym zawierającym zbiór A. Stąd $\overline{A} \subset X \setminus B(a, r)$ — sprzeczność. Niech teraz a będzie punktem

(2) Felix Hausdorff (1868–1942).

mającym własność po prawej stronie i przypuśćmy, że $a \notin \overline{A}$. Wtedy istnieje zbiór domknięty $F \supset A$ taki, że $a \notin F$. Musi więc istnieć $r > 0$ takie, że $B(a,r) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$ — sprzeczność.

(f) $x_n \longrightarrow a \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : a_n \in B(a,\varepsilon) \iff \varrho(x_n,a) \longrightarrow 0$.

(g) Ciąg może mieć tylko jedną granicę.

(h) $a \in \overline{A} \iff \exists_{(x_n)_{n=1}^\infty\subset A} :\ x_n \longrightarrow a$.

(i) $a \in A' \iff \exists_{(x_n)_{n=1}^\infty\subset A\setminus\{a\}} :\ x_n \longrightarrow a$.

(j) Następujące warunki są równoważne:

(i) $\operatorname{top}\varrho_1 \subset \operatorname{top}\varrho_2$;

(ii) $\forall_{a\in X}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} : B_{\varrho_2}(a,\delta) \subset B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$;

(iii) $\forall_{(x_n)_{n=0}^\infty\subset X} : (x_n \xrightarrow{\varrho_2} x_0 \Longrightarrow x_n \xrightarrow{\varrho_1} x_0)$.

Istotnie, jest oczywiste, że (i) $\iff$ (ii). Przypuśćmy, że (ii) zachodzi oraz $x_n \xrightarrow{\varrho_2} a$. Niech $\delta > 0$ będzie dobrane do $\varepsilon > 0$ przy pomocy warunku (ii). Wtedy $x_n \in B_{\varrho_2}(a,\delta)$ dla $n \geqslant N$, co daje $x_n \in B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$ dla $n \geqslant N$. Oznacza to, że $x_n \xrightarrow{\varrho_1} a$.

Teraz załóżmy, że (iii) zachodzi. Przypuśćmy, że dla pewnych $a \in X$ i $\varepsilon > 0$ warunek (ii) nie zachodzi, tzn. istnieje ciąg $x_n \in B_{\varrho_2}(a,1/n) \setminus B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$. Znaczy to, że $x_n \xrightarrow{\varrho_2} a$, ale $x_n \not\xrightarrow{\varrho_1} a$; sprzeczność.

(k) Metryki porównywalne są równoważne (ale nie odwrotnie — np. $\varrho \sim \min\{\varrho,1\}$, ale metryki te nie muszą być porównywalne).

(l) Niech $\varnothing \neq A \subset X$. Wtedy $x \in \overline{A} \iff \varrho(x,A) = 0$.

(m) $|\varrho(x,A) - \varrho(y,A)| \leqslant \varrho(x,y)$, $x,y \in X$.

Istotnie, na podstawie nierówności trójkąta dla $a \in A$ mamy: $\varrho(x,A) \leqslant \varrho(x,a) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,a)$. Stąd $\varrho(x,A) \leqslant \varrho(x,a) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,A)$. Teraz wystarczy zamienić miejscami x i y.

(n) $|\varrho(a,b) - \varrho(a',b')| \leqslant \varrho(a,a') + \varrho(b,b')$, $a,a',b,b' \in X$.

(o) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$, to $\varrho(a_n,b_n) \longrightarrow \varrho(a,b)$.

(p) Zbiór A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{diam} A < +\infty$.

(q) Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.

(r) Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

(s) Jeżeli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to jest cały zbieżny.

(t) $(\mathbb{K}, \varrho_{\mathbb{K}})$ jest przestrzenią zupełną.

Definicja 3.1.8. Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Z dowolnego zbioru $Y \subset X$ robimy przestrzeń metryczną z *metryką indukowaną* $\varrho|_{Y\times Y}$.

Obserwacja 3.1.9. (a) Dla $a \in Y$ mamy $B_{\varrho|_{Y\times Y}}(a,r) = B_\varrho(a,r) \cap Y$.

(b) $A \in \operatorname{top}(\varrho|_{Y\times Y}) \iff \exists_{U\in\operatorname{top}\varrho} :\ A = U \cap Y$.

(c) $A \in \operatorname{cotop}(\varrho|_{Y\times Y}) \iff \exists_{F\in\operatorname{cotop}\varrho} :\ A = F \cap Y$.

(d) Jeżeli $(Y, \varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zupełną, to Y jest domknięte w X.

(e) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zupełną i Y jest domknięte w X, to $(Y,\varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zupełną.

(f) Jeżeli $F \subset \mathbb{R}$ jest domknięty, to jest przestrzenią zupełną.

3.2. Przestrzenie zwarte

Definicja 3.2.1. Mówimy, że przestrzeń metryczna (X,ϱ) jest *zwarta* jeżeli dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty \subset X$ istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ oraz punkt $a \in X$ takie, że $a_{n_k} \longrightarrow a$.

Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X,ϱ), jeżeli $(Y,\varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zwartą, to mówimy, że Y jest *zwartym podzbiorem* X.

Obserwacja 3.2.2. (a) Dowolna przestrzeń zwarta jest zupełna.

(b) Jeżeli $Y \subset X$ jest zbiorem zwartym, to Y jest domknięte w X.

(c) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zwartą i Y jest domknięte w X, to Y jest zbiorem zwartym.

(d) Jeżeli X jest przestrzenią zwartą to dla dowolnych ciągów $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset X$ istnieją podciągi $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$, $(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ oraz $a,b \in X$ takie, że $a_{n_k} \longrightarrow a$, $b_{n_k} \longrightarrow b$.

(e) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zwartą, to $\operatorname{diam} X = \max \varrho(X\times X) < +\infty$.

(f) $(\overline{\mathbb{R}}, \varrho_{\overline{\mathbb{R}}})$ jest przestrzenią zwartą.

(g) $(\widehat{\mathbb{C}}, \varrho_{\widehat{\mathbb{C}}})$ jest przestrzenią zwartą.

Twierdzenie 3.2.3 (Cantor). *Niech $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niepustych zbiorów zwartych w przestrzeni metrycznej (X, ϱ) takim, że $K_{n+1} \subset K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy zbiór $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ jest niepustym zbiorem zwartym oraz* $\operatorname{diam} K_n \longrightarrow \operatorname{diam} K$. *W szczególności, jeżeli* $\operatorname{diam} K_n \longrightarrow 0$, *to K musi być jednopunktowy.*

Dowód. Oczywiście K jest zwarty. Niech $a_n, b_n \in K_n$ będą takie, że $\operatorname{diam} K_n = \varrho(a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wobec zwartości K_1 istnieją podciągi $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ oraz $a, b \in K_1$ takie, że $a_{n_k} \longrightarrow a$, $b_{n_k} \longrightarrow b$. Ponieważ $a_n, b_n \in K_N$ dla $n \geqslant N$, zatem musi być $a, b \in K$. Oznacza to w szczególności, że $K \neq \varnothing$. Ponadto, $\operatorname{diam} K \geqslant \varrho(a, b) = \lim_{n \to +\infty} \varrho(a_{n_k}, b_{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{diam} K_n \geqslant \operatorname{diam} K$. □

Przykład 3.2.4 (Zbiór Cantora). Niech $C_0 := [0, 1]$. Dzielimy C_0 na trzy równe przedziały domknięte i wyrzucamy wnętrze środkowego. Niech $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. W kolejnym kroku, z każdego z dwóch przedziałów tworzących C_1 wyrzucamy wnętrze środkowego z trzech równych przedziałów, na które dzielimy ten przedział, tzn. $C_2 := [0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, \frac{9}{3^2}]$. Kontynuujemy: $C_n := \bigcup_{j=1}^{2^n} C_{n,j}$, gdzie $C_{n,j}$, $j = 1, \dots, 2^n$, są przedziałami domkniętymi, parami rozłącznymi, każdy o długości $\frac{1}{3^n}$. Oczywiście, $C_n \neq \varnothing$ oraz $C_{n+1} \subset C_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Teraz *zbiór Cantora* definiujemy jako $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Na podstawie Twierdzenia Cantora 3.2.3, C jest niepustym zbiorem zwartym.

Twierdzenie 3.2.5. *Przestrzeń metryczna (X, ϱ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy z dowolnego pokrycia otwartego $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ tej przestrzeni (tzn. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$) można wybrać podpokrycie skończone.*

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że X jest zbiorem nieskończonym.

($\Longleftarrow$): Przypuśćmy, że $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest ciągiem, z którego nie da się wybrać podciągu zbieżnego. Możemy założyć, że $a_n \neq a_m$ dla dowolnych $n \neq m$. Niech $U_n := X \setminus \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $U_n \subset U_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$ oraz $\bigcup_{n=1}^{N} U_n = U_N \subsetneq X$ dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$. Wystarczy jeszcze zauważyć, że każdy zbiór U_n jest otwarty, co da sprzeczność. Istotnie, przypuśćmy, że dla pewnych $n \in \mathbb{N}$ i $a \in U_n$ mamy $B(a, r) \not\subset U_n$ dla dowolnego $r > 0$. W szczególności, istnieje $n_1 \geqslant n$ takie, że $a_{n_1} \in B(a, 1)$. Niech $0 < r_2 < \min\{\frac{1}{2}, \varrho(a, \{a_n, \dots, a_{n_1}\})\}$. Wtedy znajdziemy $a_{n_2} \in B(a, r_2)$. Musi być $n_2 > n_1$. Ogólnie, niech $0 < r_s < \min\{\frac{1}{s}, \varrho(a, \{a_n, \dots, a_{n_{s-1}}\})\}$ i $a_{n_s} \in B(a, r_s)$, $n_s > n_{s-1}$. Zbudowaliśmy podciąg $(a_{n_s})_{s=1}^{\infty}$ taki, że $a_{n_s} \longrightarrow a$ — sprzeczność.

($\Longrightarrow$): Przypuśćmy, iż z pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ nie da się wybrać podpokrycia skończonego. Przypuśćmy na chwilę, że udało się nam wykazać następujący warunek

$$\exists_{\delta > 0} \ \forall_{a \in X} \ \exists_{i \in I} : \ B(a, \delta) \subset U_i. \tag{*}$$

Największą liczbę $\delta > 0$ o powyższej własności nazywamy *liczbą Lebesgue'a* (3) dla pokrycia $\mathcal{U}$. Zauważmy, że dla dowolnych $a_1, \dots, a_N \in X$ mamy $\bigcup_{n=1}^{N} B(a_n, \delta) \subsetneq X$.

Niech $a_1 \in X$ będzie dowolne. Wybierzmy $a_2 \in X \setminus B(a_1, \delta)$ i dalej $a_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B(a_j, \delta)$, $n \in \mathbb{N}_3$. Oczywiście $\varrho(a_n, a_m) \geqslant \delta$ dla dowolnych $n \neq m$. Z takiego ciągu nie da się wybrać podciągu zbieżnego.

Pozostaje wykazać (*). Przypuśćmy, że takiego δ nie ma. Wtedy istnieje ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ taki, że kula $B(a_n, \frac{1}{n})$ nie jest zawarta w żadnym zbiorze U_i. Z ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg zbieżny $a_{n_k} \longrightarrow a$. Niech $a \in U_{i_0}$. Z otwartości U_{i_0} wynika, że $B(a, r) \subset U_{i_0}$ dla pewnego $r > 0$. Niech $a_{n_k} \in B(a, \frac{r}{2})$ dla $k \geqslant N$. Wtedy dla dostatecznie dużych k mamy $B(a_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(a, \frac{r}{2} + \frac{1}{n_k}) \subset B(a, r) \subset U_{i_0}$ — sprzeczność. □

(3) Henri Lebesgue (1875–1941).

3.3. Metryka Czebyszewa

Definicja 3.3.1. Niech X będzie dowolnym (niepustym) zbiorem i niech (Y, ϱ_Y) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Zdefiniujmy $\mathcal{B}(X,Y) := \{f : X \longrightarrow Y : \text{zbiór } f(X) \text{ jest ograniczony}\}$. W zbiorze $\mathcal{B}(X,Y)$ wprowadzamy *metrykę Czebyszewa* (4)

$$\delta(f,g) := \sup\{\varrho_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Twierdzenie 3.3.2. *Niech $f_n : X \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że przestrzeń Y jest zupełna. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $f_n \longrightarrow f_0$ jednostajnie na X, *tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_0(x)) \leqslant \varepsilon,$$

dla pewnej funkcji , $f_0 : X \longrightarrow Y$.

(ii) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *spełnia* warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej*, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant N}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon.$$

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Jeżeli spełniony jest warunek (i), to

$$\forall_{m,n\geqslant N}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_m(x)) \leqslant 2\varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Jeżeli spełniony jest warunek (ii), to dla dowolnego $x \in X$ ciąg $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \subset Y$ spełnia zwykły warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. Definiujemy $f_0(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in X$. Jeżeli $m \longrightarrow +\infty$ w warunku (ii), to dostajemy $\varrho_Y(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, $n \geqslant N$, co oznacza, że (i) zachodzi. $\square$

Obserwacja 3.3.3. (a) Ćwiczenie: δ jest metryką na $\mathcal{B}(X,Y)$.

(b) $f_n \xrightarrow{\delta} f_0 \Longleftrightarrow f_n \longrightarrow f_0$ jednostajnie na X, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_0(x)) \leqslant \varepsilon. \quad (5) \tag{†}$$

(c) Przestrzeń $\mathcal{B}(X,Y)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń Y jest zupełna.

Istotnie, każdy ciąg Cauchy'ego $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ możemy utożsamiać z ciągiem Cauchy'ego odwzorowań stałych $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Stąd, jeżeli $\mathcal{B}(X,Y)$ jest zupełna, to Y jest zupełna. W drugą stronę korzystamy z Twierdzenia 3.3.2 i dostajemy $f_0 : X \longrightarrow Y$ takie, że $f_n \longrightarrow f_0$ jednostajnie. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że f jest odwzorowaniem ograniczonym: niech $f_N(X) \subset B(y_0, R)$. Wtedy $f_0(X) \subset B(y_0, R+\varepsilon)$.

3.4. Przestrzenie spójne

Definicja 3.4.1. Przestrzeń metryczną (X, ϱ) nazywamy *spójną*, jeżeli z tego, że $X = U \cup V$, gdzie U i V są zbiorami otwartymi takimi, że $U \cap V = \varnothing$ wynika, że $U = \varnothing$ lub $V = \varnothing$.

Zbiór $Y \subset X$ nazywamy *spójnym*, jeżeli Y z metryką indukowaną jest przestrzenią spójną.

Twierdzenie 3.4.2. *Niech $\varnothing \neq P \subset \mathbb{R}$. Wtedy zbiór P jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy P jest przedziałem.*

Dowód. ($\Longrightarrow$): Przypuśćmy, że P nie jest przedziałem. Wtedy istnieją $a, b \in P$, $a < b$, oraz $c \in (a,b) \setminus P$. Biorąc $U := P \cap (-\infty, c)$, $V := P \cap (c, +\infty)$, dostajemy sprzeczność ze spójnością.

($\Longleftarrow$): Przypuśćmy, że przedział P nie jest spójny, czyli istnieją otwarte w P, niepuste zbiory A oraz B takie, że $A \cap B = \varnothing$ oraz $P = A \cup B$. Niech $a \in A$, $b \in B$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a < b$. Zdefiniujmy $c := \sup\{x \in A : x < b\}$. Oczywiście, $a \leqslant c \leqslant b$, a więc $c \in P$. Mamy dwie możliwości:

- $c \in A$. Wtedy $c < b$. Z otwartości zbioru A w P istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $[c, c+\varepsilon) \subset A$ oraz $c+\varepsilon < b$ — sprzeczność.
- $c \in B$. Wtedy, podobnie jak poprzednio, dostajemy istnienie $\varepsilon > 0$ takiego, że $(c-\varepsilon, c] \subset B$ i $c - \varepsilon > a$ — sprzeczność. $\square$

---

(4) Pafnutij Czebyszew (1821–1894).

(5) Zauważmy, że pojęcie zbieżności jednostajnej jest ogólniejsze i może dotyczyć dowolnych odwzorowań $X \longrightarrow Y$ (które nie muszą być ograniczone).

3.5. Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych

Definicja 3.5.1. Niech (X_1, ϱ_1), ..., (X_N, ϱ_N) będą *niepustymi* przestrzeniami metrycznymi i niech $X := X_1 \times \cdots \times X_N$. Dla $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in X$ niech

$$\varrho(x, y) := \varrho_1(x_1, y_1) + \cdots + \varrho_N(x_N, y_N).$$

Obserwacja 3.5.2. (a) (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną.

(b) Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$, $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,N})$, mamy:

$$a_n \xrightarrow{\varrho} a_0 \iff a_{n,j} \xrightarrow{\varrho_j} a_{0,j},\ j = 1, \dots, N.$$

(c) Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,N})$, mamy:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(X, \varrho) \iff (a_{n,j})_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w (X_j, ϱ_j), $j = 1, \dots, N$.

(d) Niech $\varphi : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będzie taka, że dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathbb{R}_+^N$ mamy:
 (i) $\varphi(\xi) = 0 \iff \xi = 0$,
 (ii) $\xi \leqslant \eta \implies \varphi(\xi) \leqslant \varphi(\eta)$, [6]
 (iii) $\varphi(\xi + \eta) \leqslant \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$.

Zdefiniujmy

$$d(x, y) := \varphi(\varrho_1(x_1, y_1), \dots, \varrho_N(x_N, y_N)), \quad x = (x_1, \dots, x_N),\ y = (y_1, \dots, y_N) \in X.$$

Wtedy (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną. Istotnie, jedyną wątpliwość może budzić nierówność trójkąta. Mamy

$$\begin{aligned} d(x, z) + d(z, y) &= \varphi(\varrho_1(x_1, z_1), \dots, \varrho_N(x_N, z_N)) + \varphi(\varrho_1(z_1, y_1), \dots, \varrho_N(z_N, y_N)) \\ &\overset{\text{(iii)}}{\geqslant} \varphi(\varrho_1(x_1, z_1) + \varrho_1(z_1, y_1), \dots, \varrho_N(x_N, z_N) + \varrho_N(z_N, y_N)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{\geqslant} \varphi(\varrho_1(x_1, y_1), \dots, \varrho_N(x_N, y_N)) = d(x, y). \end{aligned}$$

ĆWICZENIE: Kiedy $d \sim \varrho$? Kiedy d i ϱ są porównywalne?

Twierdzenie 3.5.3. *Niech*

$$\varphi_p(\xi) := \Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^p\Big)^{\frac{1}{p}},\ \varphi_\infty(\xi) := \max\{\xi_1, \dots, \xi_N\}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}_+^N, \quad p \in [1, +\infty).$$

Wtedy

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_j \eta_j \leqslant \varphi_p(\xi)\varphi_q(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}_+^N,\ p, q \in [1, +\infty],\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \ \text{(nierówność Höldera)},$$

$$\varphi_p(\xi + \eta) \leqslant \varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}_+^N,\ p \in [1, +\infty] \ \ \text{(nierówność Minkowskiego)}.$$

Ponadto:

- *dla $1 < p, q < +\infty$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}_{>0}^N$ równość w nierówności Höldera zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $t > 0$ mamy $\xi_j^p = t\eta_j^q$, $j = 1, \dots, N$.*
- *dla $1 < p < +\infty$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}_{>0}^N$ równość w nierówności Minkowskiego zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $t > 0$ mamy $\xi = t\eta$.*

Obserwacja 3.5.4. (a) $\lim\limits_{p \to +\infty} \varphi_p(\xi) = \varphi_\infty(\xi)$ (por. Przykład 2.2.10).

(b) Z nierówności Höldera dla $p = q = 2$ wynika nierówność Schwarza (por. Twierdzenie 1.12.5).

Dowód Twierdzenia 3.5.3. Nierówność Höldera: Nierówność jest oczywista jeżeli $(p, q) \in \{(1, +\infty), (+\infty, 1)\}$. Możemy więc założyć, że $1 < p, q < +\infty$. Ponadto możemy założyć, że $\xi_j > 0$ i $\eta_j > 0$, $j = 1, \dots, N$ (ĆWICZENIE). Zastępując ξ przez $\frac{\xi}{\varphi_p(\xi)}$ oraz η przez $\frac{\eta}{\varphi_q(\eta)}$, sprowadzamy dowód do przypadku $\varphi_p(\xi) = \varphi_q(\eta) = 1$. Poniżej skorzystamy z dwóch własności funkcji $x \longmapsto e^x$, które poznamy w przyszłości:

— funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x \in (0, +\infty)$ jest surjektywna (Wniosek 4.4.20),

---

[6] $(\xi_1, \dots, \xi_N) \leqslant (\eta_1, \dots, \eta_N) :\iff \xi_j \leqslant \eta_j,\ j = 1, \dots, N$.

— funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x$ jest silnie wypukła (Twierdzenie 5.9.9), tzn.

$$e^{\mu x+(1-\mu)y} < \mu e^x + (1-\mu)e^y, \quad x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y,\ \mu \in (0,1). \tag{*}$$

Niech $\xi_j = e^{t_j/p}$, $\eta_j = e^{u_j/q}$, $j = 1, \dots, N$. Mamy więc

$$\sum_{j=1}^N \xi_j\eta_j = \sum_{j=1}^N e^{t_j/p+u_j/q} \leqslant \sum_{j=1}^N \Big(\frac{1}{p}e^{t_j} + \frac{1}{q}e^{u_j}\Big) = \sum_{j=1}^N \Big(\frac{1}{p}\xi_j^p + \frac{1}{q}\eta_j^q\Big) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Rozważmy teraz problem równości w nierówności Höldera. Jeżeli spełniony jest warunek $\xi_j^p = t\eta_j^q$, $j = 1, \dots, N$, to wtedy

$$\sum_{j=1}^N \xi_j\eta_j = \sum_{j=1}^N t^{1/p}\eta_j^{q/p+1} = t^{1/p}\sum_{j=1}^N \eta_j^q.$$

Z drugiej strony,

$$\varphi_p(\xi)\varphi_q(\eta) = \Big(\sum_{j=1}^N t\eta_j^q\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^N \eta_j^q\Big)^{1/q} = t^{1/p}\sum_{j=1}^N \eta_j^q.$$

W drugą stronę, jeżeli w nierówności Höldera zachodzi równość, to na podstawie (*) w postaci zredukowanej musi być $t_j = u_j$, $j = 1, \dots, N$. Oznacza to, że $\xi_j^p = \eta_j^q$, $j = 1, \dots, N$, dla postaci zredukowanej. Stąd $\frac{\xi_j^p}{\varphi_p(\xi)} = \frac{\eta_j^q}{\varphi_q(\eta)}$, $j = 1, \dots, N$, dla postaci wyjściowej.

Nierówność Minkowskiego: Po pierwsze zauważmy, że dla $p = 1$ nierówność Minkowskiego jest oczywista. Możemy więc założyć, że $p > 1$ oraz $\sum\limits_{j=1}^N (\xi_j + \eta_j)^p > 0$. Niech $q := \frac{p}{p-1}$. Wtedy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Na podstawie nierówności Höldera mamy więc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N (\xi_j+\eta_j)^p &= \sum_{j=1}^N \xi_j(\xi_j+\eta_j)^{p-1} + \sum_{j=1}^N \eta_j(\xi_j+\eta_j)^{p-1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \Big(\sum_{j=1}^N \xi_j^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^N (\xi_j+\eta_j)^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{j=1}^N \eta_j^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^N (\xi_j+\eta_j)^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^N \xi_j^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^N (\xi_j+\eta_j)^p\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{j=1}^N \eta_j^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^N (\xi_j+\eta_j)^p\Big)^{1/q}. \qquad (**)
\end{aligned}$$

Dzieląc obie strony przez $\big(\sum_{j=1}^N (\xi_j+\eta_j)^p\big)^{1/q}$ dostajemy żądaną nierówność Minkowskiego.

Przechodzimy do problemu równości w nierówności Minkowskiego. Jeżeli $\xi = t\eta$, to

$$\varphi_p(\xi+\eta) = (1+t)\varphi_p(\eta) = \varphi_p(t\eta) + \varphi_p(\eta) = \varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta).$$

W drugą stronę, jeżeli w nierówności Minkowskiego zachodzi równość, to w (**) w obu miejscach, w których stosowaliśmy nierówność Höldera musi być równość, a więc $\xi_j^p = t_1(\xi_j+\eta_j)^{(p-1)q}$ oraz $\eta_j^p = t_2(\xi_j+\eta_j)^{(p-1)q}$, $j = 1, \dots, N$, dla pewnych $t_1, t_2 > 0$. Wynika stąd natychmiast, że $\xi = t\eta$ dla pewnego $t > 0$. $\square$

Ćwiczenie 3.5.5. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na równość w nierówności Höldera (odp. Minkowskiego) bez założenia, że $\xi_j, \eta_j > 0$, $j = 1, \dots, N$.

Wniosek 3.5.6. *Niech (X_1, ϱ_1), ..., (X_N, ϱ_N) będą niepustymi przestrzeniami metrycznymi i niech $X := X_1 \times \dots \times X_N$. Wtedy funkcje*

$$d_p(x,y) := \Big(\sum_{j=1}^N (\varrho_j(x_j,y_j))^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty),$$
$$d_\infty(x,y) := \max\{\varrho_1(x_1,y_1), \dots, \varrho_N(x_N,y_N)\}, \quad x = (x_1,\dots,x_N),\ y = (y_1,\dots,y_N) \in X,$$

są metrykami na X. Ponadto:

- $d_\infty \leqslant d_p \leqslant N^{1/p}d_\infty$, $p \in [1, +\infty)$. *w szczególności, metryki d_p i d_∞ są porównywalne.*

• *$d_1 = \varrho$ (zob. Definicja 3.5.1). W szczególności, metryki d_p i d_∞ zadają topologię iloczynu kartezjańskiego.*

Obserwacja 3.5.7. (a) Metryka d_p nosi nazwę *metryki ℓ^p*.

(b) Metryka d_∞ nosi nazwę *metryki ℓ^∞* lub też *metryki maksimum*.

(c) Jeżeli $(X_j, \varrho_j) = (\mathbb{K}, \varrho_{\mathbb{K}})$, $j = 1, \dots, N$, to

$$d_p(x,y) := \Big(\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$d_\infty(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_N - y_N|\}, \quad x = (x_1, \dots, x_N),\ y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{K}^N.$$

(d) Szczególnie ważna jest metryka d_2. Dla przykładu, w przypadku, gdy $(X_j, \varrho_j) = (\mathbb{K}, \varrho_{\mathbb{K}})$, $j = 1, \dots, N$, standardową metryką w $\mathbb{K}^N$ jest *metryka euklidesowa* $d_2(x,y) := \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^2}$.

Dowód Wniosku 3.5.6. Stosujemy Obserwację 3.5.2(d). □

Twierdzenie 3.5.8. (a) *(X, ϱ) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy (X_j, ϱ_j) jest zupełna, $j = 1, \dots, N$. W szczególności, $\mathbb{R}^N$ jest przestrzenią zupełną.*

(b) *(X, ϱ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy (X_j, ϱ_j) jest zwarta, $j = 1, \dots, N$.*

(c) *(X, ϱ) jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy (X_j, ϱ_j) jest spójna, $j = 1, \dots, N$.*

Dowód. (a), (b) — Ćwiczenie.
(c) — Ćwiczenie*. □

3.6. Metryka Hausdorffa

Dla przestrzeni metrycznej (X, ϱ), niech $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów X. Zdefiniujmy *metrykę Hausdorffa*

$$\boldsymbol{h}(A,B) := \max\Big\{\sup\{\varrho(x,B) : x \in A\},\ \sup\{\varrho(y,A) : y \in B\}\Big\}, \quad A, B \in \mathcal{F}.$$

Obserwacja 3.6.1. Poniżej $A, B, C \in \mathcal{F}$.

(a) Przypomnijmy, że $a \in C \iff \operatorname{dist}(a, C) = 0$.

(b) Jeżeli $\boldsymbol{h}(A,B) = 0$, to $A \subset \overline{B}$ oraz $B \subset \overline{A}$, to oznacza, że $A = B$.

(c) $\boldsymbol{h}(A,B) = \boldsymbol{h}(B,A)$.

(d) $\boldsymbol{h}(A,B) < +\infty$.

Istotnie, jeżeli $A, B \subset B(a,r)$, to dla $x \in A$ mamy $\varrho(x,B) = \inf\{\varrho(x,z) : z \in B\} \leqslant \inf\{\varrho(x,a) + \varrho(a,z) : z \in B\} \leqslant 2r$. Podobnie, $\varrho(x,A) \leqslant 2r$, $x \in B$.

(e) $\boldsymbol{h}(A,B) = \sup\{|\varrho(x,A) - \varrho(x,B)| : x \in X\}$.

Istotnie, wystarczy pokazać, że $\sup\{\varrho(x,A) - \varrho(x,B) : x \in X\} = \sup\{\varrho(y,A) : y \in B\}$. Nierówność „$\geqslant$" jest oczywista. Ustalmy $x_0 \in X$ oraz weźmy dowolne $a \in A$, $b \in B$. Wtedy $\varrho(x_0,a) - \varrho(x_0,b) \leqslant \varrho(a,b)$. Biorąc $\inf_{a \in A}$ dostajemy $\varrho(x_0,A) - \varrho(x_0,b) \leqslant \varrho(b,A) \leqslant \sup\{\varrho(y,A) : y \in B\}$. Biorąc teraz $\inf_{b \in B}$ dostajemy poszukiwaną nierówność.

(f) $\boldsymbol{h}(A,B) \leqslant \boldsymbol{h}(A,C) + \boldsymbol{h}(C,B)$. W szczególności, $(\mathcal{F}, \boldsymbol{h})$ jest przestrzenią metryczną.

(g) $\boldsymbol{h}(A,B) \leqslant r \iff A \subset B^{(r)}$ oraz $B \subset A^{(r)}$, gdzie $C^{(r)} := \{z \in X : \operatorname{dist}(z,C) \leqslant r\}$.

Ćwiczenie: Czy $C^{(r)}$ jest zwarty dla C zwartego? Czy $C^{(r)} \in \mathcal{F}$ dla $C \in \mathcal{F}$?

(h) $|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)| \leqslant 2\boldsymbol{h}(A,B)$.

Istotnie, wystarczy pokazać, że $\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B) \leqslant 2\boldsymbol{h}(A,B)$. Ustalmy $x, y \in A$. Wtedy

$$\begin{aligned}\varrho(x,y) - \operatorname{diam}(B) &= \inf_{u,v \in B}(\varrho(x,y) - \varrho(u,v)) \overset{3.1.7(n)}{\leqslant} \inf_{u,v \in B}(\varrho(x,u) + \varrho(y,v)) \\ &\leqslant \varrho(x,B) + \varrho(y,B) \leqslant 2\sup_{z \in A}\varrho(z,B) \leqslant 2\boldsymbol{h}(A,B).\end{aligned}$$

Teraz wystarczy wziąć $\sup_{x,y \in A}$.

(i) Ćwiczenie*. Niech $K \subset X$ będzie ustalonym niepustym zbiorem zwartym i niech $\mathfrak{K} := \{A \in \mathcal{F} : A \subset K\}$. Wtedy $(\mathfrak{K}, \boldsymbol{h})$ jest przestrzenią zwartą.

ROZDZIAŁ 4

Ciągłość

4.1. Funkcje ciągłe

Definicja 4.1.1. Niech (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \longrightarrow Y$ i $a \in X$. Powiemy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} : f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon).$$

Równoważnie:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in X} : \varrho_X(x,a) < \delta \Longrightarrow \varrho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Jest to tzw. *definicja Cauchy'ego ciągłości*. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$ — *jest to oznaczenie niestandardowe, dla potrzeb naszego wykładu.*

Mówimy, że $f : X \longrightarrow Y$ jest *ciągła*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Ponadto, $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Mówimy, że f jest *jednostajnie ciągła*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in X} : \varrho_X(x,y) < \delta \Longrightarrow \varrho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Mówimy, że f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 0$, jeżeli istnieje stała $M \geqslant 0$ taka, że

$$\varrho_Y(f(x), f(y)) \leqslant M(\varrho_X(x,y))^\alpha, \quad x, y \in X.$$

Dla $\alpha = 1$, warunek Höldera nosi nazwę *warunku Lipschitza* (1).

Mówimy, że odwzorowanie bijektywne $f : X \longrightarrow Y$ jest *homeomorfizmem*, jeżeli $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $f^{-1} \in \mathcal{C}(Y, X)$.

Obserwacja 4.1.2. (a) Każde odwzorowanie jednostajnie ciągłe jest ciągłe.

(b) Każde odwzorowanie spełniające warunek Höldera jest jednostajnie ciągłe.

Ćwiczenie 4.1.3. (a) Znaleźć przykład odwzorowania ciągłego, które nie jest jednostajnie ciągłe.

(b) Znaleźć przykład odwzorowania jednostajnie ciągłego, które dla dowolnego $\alpha > 0$ nie spełnia warunku Höldera z wykładnikiem α.

(c) Udowodnić, że odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup\left\{\frac{\varrho_Y(f(x), f(y))}{(\varrho_X(x,y))^\alpha} : x, y \in X,\ x \neq y\right\} < +\infty.$$

(d) Znaleźć przykład ciągłego odwzorowania bijektywnego $f : X \longrightarrow Y$ takiego, że f^{-1} nie jest ciągłe.

Twierdzenie 4.1.4. *Niech $f : X \longrightarrow Y$, $a \in X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$;

(ii) *dla dowolnego otoczenia V punktu $f(a)$ istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(U) \subset V$;*

(iii) *dla dowolnego otoczenia V punktu $f(a)$ zbiór $f^{-1}(V)$ jest otoczeniem punktu a;*

(iv) *dla dowolnego ciągu $x_n \longrightarrow a$ mamy $f(x_n) \longrightarrow f(a)$; jest to tzw.* definicja Heinego (2) ciągłości.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $B(f(a),\varepsilon) \subset V$ i niech $\delta > 0$ będzie dobrane zgodnie z (i). Wtedy $U := B(a,\delta)$ jest otoczeniem punktu a oraz $f(U) \subset B(f(a),\varepsilon) \subset V$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Oczywiste.

---

(1) Rudolf Lipschitz (1832–1903).

(2) Eduard Heine (1821–1881).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ kule $V := B(f(a), \varepsilon)$ jest otoczeniem $f(a)$. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Niech $x_n \in B(a, \delta)$ dla $n \geqslant N$. Wtedy $f(x_n) \in B(f(a), \varepsilon)$ dla $n \geqslant N$, czyli $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ nie istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Wtedy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in B(a, 1/n)$, $\varrho_Y(f(x_n), f(a)) \geqslant \varepsilon$; sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 4.1.5 (Składanie odwzorowań ciągłych)**.** *Jeżeli* $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z; f(a))$*, to* $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z; a)$.

Dowód. Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 4.1.6. *Niech* $f : X \longrightarrow Y$*. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{C}(X, Y)$*;*

(ii) *dla dowolnego zbioru otwartego* $V \subset Y$ *zbiór* $f^{-1}(V)$ *jest otwarty;*

(iii) *dla dowolnego* $a \in X$ *oraz dla dowolnego ciągu* $x_n \longrightarrow a$ *mamy* $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Dowód. Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 4.1.7 (Składanie odwzorowań ciągłych)**.** *Jeżeli* $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$*, to* $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z)$.

Dowód. Ćwiczenie. $\square$

Wniosek 4.1.8. *Niech* $f : X \longrightarrow Y$ *i niech* $g : Y \longrightarrow Z$ *będzie homeomorfizmem. Wtedy* $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z; a) \iff f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$.

Ćwiczenie 4.1.9 (Zob. Obserwacja 3.1.2(b))**.** Niech $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}.$$

Udowodnić, że φ jest homeomorfizmem. W szczególności, na podstawie Wniosku 4.1.8 mamy $f \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a) \iff \varphi \circ f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1]; a)$.

Twierdzenie 4.1.10. *Niech* $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$.

(a) *Jeżeli dodawanie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x + y \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*

(b) *Jeżeli mnożenie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x \cdot y \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*

(c) *Jeżeli dzielenie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto \frac{x}{y} \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*

(d) *Jeżeli* $A \subset \mathbb{R}_{>0}$ *and* $B \subset \mathbb{R}$*, to potęgowanie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x^y \in \mathbb{R}_{>0}$ *jest odwzorowaniem ciągłym. W szczególności:*

- *Funkcja* $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x$ *jest ciągła dla dowolnego* $a > 0$.
- *Funkcja* $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^\alpha$ *jest ciągła dla dowolnego* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dowód. Por. § 2.2. $\square$

Twierdzenie 4.1.11. (a) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $f(x) + g(x)$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$*, to* $f + g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.

(b) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $f(x) \cdot g(x)$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$*, to* $f \cdot g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.

(c) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$*, to* $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.

(d) *Jeżeli* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ *i* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *są ciągłe w punkcie* a*, to* $f^g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}; a)$.

Dowód. Jest wniosek z Twierdzeń 4.1.7 i 4.1.10. $\square$

Przykład 4.1.12. (a) Dowolny wielomian $p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $p(z) := a_0 + \dots + a_n z^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, jest ciągły.

(b) Dla dowolnych wielomianów $p, q : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $q \not\equiv 0$, *funkcja wymierna* $\frac{p}{q}$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{K} \setminus q^{-1}(0)$.

(c) Funkcje trygonometryczne są ciągłe [3]. Mamy $0 < \sin t < t$ dla $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Stąd funkcja sin jest ciągła w zerze i w konsekwencji wszystkie funkcje trygonometryczne są ciągłe — Ćwiczenie.

(d) Funkcja *signum (znak)* $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \{-1, 0, +1\}$,

$$\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ -1, & \text{jeżeli } x < 0 \end{cases},$$

jest ciągła w każdym punkcie poza zerem.

(e) *Funkcja Dirichleta* [4] $d := \chi_{\mathbb{Q},\mathbb{R}}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie.

(f) Niech $h(x) := xd(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy h jest ciągła tylko w $x = 0$.

(g) Funkcja *moduł*, $\mathbb{K} \ni z \longmapsto |z| \in \mathbb{R}_+$, jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza.

(h) Funkcja *cecha* (lub *część całkowita*) $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor := \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$, $x \in \mathbb{R}$, jest ciągła w każdym punkcie zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ale nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $\mathbb{Z}$.

(i) Niech $\lceil x \rceil := \inf\{k \in \mathbb{Z} : k \geqslant x\}$. Gdzie jest ciągła funkcja $x \longrightarrow \lceil x \rceil$? — Ćwiczenie.

(j) *Funkcja Riemanna* [5] $r : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$,

$$r(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z},\ (p,q) = 1 \end{cases},$$

jest ciągła w punktach zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ale nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $\mathbb{Q}$.

4.2. Granica w punkcie

Definicja 4.2.1. Niech $A \subset X$, $f : A \longrightarrow Y$, $a \in A'$, $b \in Y$. Wtedy mówimy, że f ma w punkcie a granicę b, jeżeli dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\}$ mamy $f(x_n) \longrightarrow b$. Piszemy wtedy $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Obserwacja 4.2.2. (a) $\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \widetilde{f} \in \mathcal{C}(A \cup \{a\}, Y; a)$, gdzie $\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{jeżeli } x \in A \setminus \{a\} \\ b, & \text{jeżeli } x = a \end{cases}$.

(b) Dla $f : X \longrightarrow Y$ i $a \in X$ mamy $f \in \mathcal{C}(X, Y; a) \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Twierdzenie 4.2.3. *Jeżeli* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z; b)$, *to* $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g(b)$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Ćwiczenie 4.2.4. Pokazać, że następujące twierdzenie nie jest prawdziwe.

Niech $f : A \longrightarrow B \subset Y$, $a \in A'$, $b \in B'$, $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{y \to b} g(y) = c$. Wtedy $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Definicja 4.2.5. W przypadku $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ można również mówić o *granicy górnej i dolnej funkcji f w punkcie a*:

$$\limsup_{x \to a} f(x) := \sup \mathcal{S}(f, a), \quad \liminf_{x \to a} f(x) := \inf \mathcal{S}(f, a),$$

gdzie

$$\mathcal{S}(f, a) := \{g \in \overline{\mathbb{R}} : \exists_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\}} :\ x_n \longrightarrow a,\ f(x_n) \longrightarrow g\}.$$

Obserwacja 4.2.6. (a) Niech $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy powyższe pojęcia redukują się do poprzednio wprowadzonych $\limsup_{n \to +\infty} f(n)$ i $\liminf_{n \to +\infty} f(n)$.

(b) $\liminf_{x \to a} f(x) \leqslant \limsup_{x \to a} f(x)$.

(c) Jeżeli $\lim_{x \to a} f(x) = g \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\liminf_{x \to a} f(x) = \limsup_{x \to a} f(x) = g$.

(d) $\limsup_{x \to a} f(x), \liminf_{x \to a} f(x) \in \mathcal{S}(f, a)$.

(e) Jeżeli $\liminf_{x \to a} f(x) = \limsup_{x \to a} f(x) =: g$, to $\lim_{x \to a} f(x) = g$.

---

[3] Uwaga: precyzyjne definicje funkcji trygonometrycznych zostaną podane w podrozdziale 6.7.

[4] Peter Dirichlet (1805–1859).

[5] Bernhard Riemann (1826–1866).

(f) Jeżeli $g := \limsup_{x\to a} f(x) < +\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M > g$ istnieje $r > 0$ takie, że $f(x) \leqslant M$ dla $x \in A \cap (B(a,r) \setminus \{a\})$.

(g) Jeżeli $g := \liminf_{x\to a} f(x) > -\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M < g$ istnieje $r > 0$ takie, że $f(x) \geqslant M$ dla $x \in A \cap (B(a,r) \setminus \{a\})$.

Definicja 4.2.7. Jeżeli $X = \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset [-\infty, a]$, $f : A \longrightarrow Y$ i $a \in A'$, to $\lim_{x\to a-} f(x)$ nosi nazwę *granicy lewostronnej* i piszemy wtedy $\lim_{x\to a-} f(x)$. Analogicznie definiujemy *granicę prawostronną* $\lim_{x\to a+} f(x)$, gdy $A \subset [a, +\infty]$ i $a \in A'$.

Definicja 4.2.8 (Moduł ciągłości)**.** Dla $f : X \longrightarrow Y$ definiujemy *moduł ciągłości* funkcji f:

$$\omega_f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow [0, +\infty], \quad \omega_f(\delta) := \sup\{\varrho_Y(f(x), f(y)) : x, y \in X,\ \varrho_X(x, y) \leqslant \delta\}.$$

Zauważmy, że jeżeli f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α (Definicja 4.1.1), to $\omega_f(\delta) \leqslant M\delta^\alpha$.

Ćwiczenie 4.2.9. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{\delta\to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

4.3. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Twierdzenie 4.3.1 (Banach (6))**.** *Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $f : X \longrightarrow X$ będzie odwzorowaniem* zwężającym, *tzn. takim, że $d(f(x), f(y)) \leqslant \theta d(x, y)$, $x, y \in X$, gdzie $\theta \in [0, 1)$. Wtedy dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ ciąg $(x_n)_{n=0}^\infty$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorem $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, jest zbieżny do jedynego* punktu stałego *odwzorowania f, tzn. do punktu $x^* \in X$ takiego, że $f(x^*) = x^*$.*

Dowód. Odwzorowanie f spełnia warunek Lipschitza ze stałą θ. Jest więc w szczególności ciągłe. Jeżeli ciąg $(x_n)_{n=0}^\infty$ jest zbieżny do pewnego $x^* \in X$, to musi to być punkt stały, co wynika ze związku $x_{n+1} = f(x_n)$ oraz ciągłości f. Punkt stały jest jedyny. Jeżeli bowiem $a, b \in X$ byłyby dwoma różnymi punktami stałymi, to $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leqslant \theta d(a, b) < d(a, b)$, co daje sprzeczność. Pozostaje więc pokazać, że ciąg $(x_n)_{n=0}^\infty$ jest zbieżny. Ponieważ przestrzeń jest zupełna wystarczy pokazać, że spełnia warunek Cauchy'ego. Mamy

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \theta d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \theta^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \dots \leqslant \theta^n d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

W takim razie

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leqslant d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (\theta^{n+k-1} + \theta^{n+k-2} + \dots + \theta^n) d(x_1, x_0) = \frac{1-\theta^k}{1-\theta}\theta^n d(x_1, x_0) \leqslant \frac{1}{1-\theta}\theta^n d(x_1, x_0), \quad n, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

skąd natychmiast wynika, że $(x_n)_{n=0}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego. $\square$

Przykład 4.3.2. Niech $X := (0, \frac{1}{4}) \subset \mathbb{R}$ i niech $f : X \longrightarrow X$, $f(x) = x^2$; X nie jest przestrzenią zupełną! Wtedy f jest odwzorowaniem zwężającym ($|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$) bez punktu stałego.

4.4. Własności funkcji ciągłych

Twierdzenie 4.4.1. *Niech $f_n : X \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $f : X \longrightarrow Y$. Załóżmy, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X. Wtedy:*

(a) *Jeżeli $f_n \in \mathcal{C}(X, Y; a)$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$.*
(b) *Jeżeli $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.*

Dowód. (a) Wykorzystamy nierówność

$$\varrho_Y(f(x), f(a)) \leqslant \varrho_Y(f(x), f_{n_0}(x)) + \varrho_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + \varrho_Y(f_{n_0}(a), f(a)).$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wiemy, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\varrho_Y(f_n(x), f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnych $n \geqslant n_0$ i $x \in X$. Korzystając z ciągłości funkcji f_{n_0} w punkcie a otrzymujemy istnienie $\delta > 0$ takiego, że

(6) Stefan Banach (1892–1945).

$\varrho_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $x \in B_X(a,\delta)$. A stąd $\varrho_Y(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego $x \in B_X(a,\delta)$.

(b) wynika natychmiast z (a). $\square$

Ćwiczenie 4.4.2. Niech $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie. Wtedy, jeżeli f_n jest jednostajnie ciągła dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to f jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie 4.4.3 (Dini [7])**.** *Załóżmy, że (X,ϱ) jest przestrzenią zwartą, $f_n \in \mathcal{C}(X)$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Niech $f \in \mathcal{C}(X)$ i niech $f_n \longrightarrow f$* punktowo na *X, tzn. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. Wtedy $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X.*

Dowód. Zastępując f_n przez $f_n - f$ sprowadzamy problem do przypadku $f \equiv 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $K_n := \{x \in X : f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy K_n jest zbiorem zwartym oraz $K_{n+1} \subset K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Gdyby $K_n \neq \varnothing$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to z Twierdzenia Cantora 3.2.3 istnieje punkt $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Wtedy $f_n(a) \geqslant \varepsilon$ dla dowolnego n, co przeczy zbieżności punktowej. W takim razie istnieje n_0 takie, że $K_n = \varnothing$ dla $n \geqslant n_0$, co oznacza, że $0 \leqslant f_n \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego $n \geqslant n_0$ i $x \in X$. $\square$

Obserwacja 4.4.4. Wszystkie założenia twierdzenia Diniego są istotne.

(a) f nie jest ciągła: Niech $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $f_n(x) := x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0,1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$. Wtedy $f_n \searrow f$ punktowo, ale nie jednostajnie.

(b) X nie jest zwarta: Niech $f_n : [0,1) \longrightarrow [0,1)$, $f_n(x) := x^n$. Wtedy $f_n \searrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

(c) Ciąg nie jest monotoniczny: Niech $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Wtedy $f_n \longrightarrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

(d) Funkcje f_n nie są ciągłe: Niech $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. Zdefiniujmy $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{q_1, \dots, q_n\}, \\ 1, & \text{jeżeli } x \in \{q_{n+1}, q_{n+2}, \dots\} \end{cases}.$$

Wtedy $f_n \searrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

Twierdzenie 4.4.5. *Niech X będzie przestrzenią zwartą i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy $f(X)$ jest przestrzenią zwartą (z metryką indukowaną z Y).*

Dowód. Niech $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset f(X)$, $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ X jest zwarta, istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ oraz $x_0 \in X$ takie, że $x_{n_k} \longrightarrow x_0$. Wobec ciągłości f mamy $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$. $\square$

Obserwacja 4.4.6. Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem zwartym. Wtedy $\inf K, \sup K \in K$.

Jako wniosek dostajemy.

Twierdzenie 4.4.7 (Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów)**.** *Niech X będzie niepustą przestrzenią zwartą oraz niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieją punkty $x_\pm \in X$ takie, że $f(x_+) = \sup f(X)$, $f(x_-) = \inf f(X)$.*

Obserwacja 4.4.8. Niech $\mathcal{C}_b(X,Y) := \mathcal{C}(X,Y) \cap \mathcal{B}(X,Y)$.

(a) $\mathcal{C}_b(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$, gdy X jest przestrzenią zwartą.
(b) $\mathcal{C}_b(X,Y)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{B}(X,Y)$.
(c) Przestrzeń $\mathcal{C}_b(X,Y)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest zupełna.

Twierdzenie 4.4.9. *Jeżeli $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, to dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ spełniony jest warunek: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{a\in K} :\ f(\overline{B}_\varrho(a,\delta)) \subset \overline{B}_d(f(a),\varepsilon)$. W szczególności, jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to f jest jednostajnie ciągłe.*

Dowód. Ponieważ f jest ciągła, zatem dla dowolnego $a \in K$ istnieje $r(a) > 0$ takie, że $f(\overline{B}_\varrho(a, r(a))) \subset \overline{B}_d(f(a), \frac{1}{2}\varepsilon)$. Wobec zwartości zbioru K, istnieje skończona liczba punktów $a_1, \dots, a_N \in K$ takich, że $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\varrho(a_i, \frac{1}{2}r(a_i))$. Niech $\delta := \frac{1}{2}\min\{r(a_1), \dots, r(a_N)\}$. Weźmy dowolny punkt $a \in K$, $a \in$

[7] Ulisse Dini (1845–1918).

$B_\varrho(a_{i_0}, \frac{1}{2}r(a_{i_0}))$, i niech $x \in \overline{B}_\varrho(a, \delta)$. Mamy $\varrho(x, a_{i_0}) \leqslant \varrho(x, a) + \varrho(a, a_{i_0}) \leqslant \delta + \frac{1}{2}r(a_{i_0}) \leqslant r(a_{i_0})$. Wynika stąd, że $d(f(x), f(a_{i_0})) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ i ostatecznie $d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f(a_{i_0})) + d(f(a), f(a_{i_0})) \leqslant \varepsilon$. $\square$

Twierdzenie 4.4.10. *Niech X będzie przestrzenią zwartą i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie ciągłą bijekcją. Wtedy f^{-1} jest ciągła, czyli f jest homeomorfizmem.*

Dowód. Niech $y_n \longrightarrow y_0$, $x_n := f^{-1}(y_n)$, $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Chcemy pokazać, że $x_n \longrightarrow x_0$. Przypuśćmy, że $x_n \not\longrightarrow x_0$, co oznacza, że istnieje $\varepsilon_0 > 0$ oraz podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ takie, że $\varrho_X(x_{n_k}, x_0) \geqslant \varepsilon_0$, $k \in \mathbb{N}$. Wobec zwartości X możemy założyć, że $x_{n_k} \longrightarrow x^*$. Wynika, stąd, że $\varrho_X(x^*, x_0) \geqslant \varepsilon_0$. Z drugiej strony $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x^*)$, skąd wynika, że $f(x^*) = f(x_0)$ — sprzeczność. $\square$

Wniosek 4.4.11. *Rzut stereograficzny $R : \boldsymbol{S} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest homeomorfizmem (por. Przykład 3.1.3).*

Twierdzenie 4.4.12. *Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy $f(X)$ jest przestrzenią spójną (z metryką indukowaną z Y).*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(X) = U \cup V$, gdzie U, V są niepuste, rozłączne i otwarte. Wtedy $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, gdzie $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ są niepuste, rozłączne i otwarte (wobec ciągłości) — sprzeczność. $\square$

Definicja 4.4.13. Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma *własność Darboux* (8), jeżeli dla dowolnych $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, $\alpha < \beta$, i dla dowolnego $\gamma \in (\alpha, \beta)$ istnieje $c \in X$ takie, że $f(c) = \gamma$; innymi słowy: f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie.

Twierdzenie 4.4.14. *Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy f ma własność Darboux.*

Obserwacja 4.4.15. Istnieją funkcje nieciągłe, posiadające własność Darboux (zob. Przykład 5.2.13).

Ćwiczenie 4.4.16. Wykazać, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego posiada miejsce zerowe.

Obserwacja 4.4.17. Niech $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, będzie funkcją rosnącą. Wtedy $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \sup f((a, b))$ oraz $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \inf f((a, b))$.

Twierdzenie 4.4.18. *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, będzie funkcją monotoniczną. Wtedy:*

(a) *funkcja f nie jest ciągła w co najwyżej przeliczalnej liczbie punktów;*
(b) *jeżeli f nie jest ciągła, to zbiór $f(P)$ nie jest spójny.*

Dowód. Możemy założyć, że f jest rosnąca.

(a) Niech
$$N(f) := \{x \in P : f \text{ nie jest ciągła w } x\}.$$
Dla dowolnego punktu $c \in \operatorname{int} P$ niech $L(c) := \lim\limits_{x\to c-} f(x)$, $R(c) := \lim\limits_{x\to c+} f(x)$. Jeżeli lewy koniec c przedziału P należy do niego, to kładziemy $L(c) := f(c)$, $R(c) := \lim\limits_{x\to c+} f(x)$. Jeżeli prawy koniec c przedziału P należy do niego, to kładziemy $L(c) := \lim\limits_{x\to c-} f(x)$, $R(c) := f(c)$.

Wtedy $-\infty < L(c) \leqslant R(c) < \infty$ oraz dla dowolnych $c_1, c_2 \in P$, $c_1 < c_2$, mamy $R(c_1) \leqslant L(c_2)$, a stąd
$$(L(c_1), R(c_1)) \cap (L(c_2), R(c_2)) = \varnothing.$$
W takim razie $c \in N(f) \iff L(c) < R(c) \iff \exists_{q(c)\in\mathbb{Q}\cap(L(c),R(c))}$. Zbudowaliśmy injekcję $N(f) \longrightarrow \mathbb{Q}$.

(b) Przypuśćmy, że $a \in N(f) \neq \varnothing$. Z poprzednich rozważań istnieje $q \in (L(a), R(a)) \setminus \{f(a)\}$. Zdefiniujmy $U := (-\infty, q) \cap f(P)$, $V := (q, +\infty) \cap f(P)$. Zbiory U oraz V są otwarte w $f(P)$, $U, V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$ oraz $U \cup V = f(P)$, co oznacza, że $f(P)$ nie jest zbiorem spójnym. $\square$

Twierdzenie 4.4.19. *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, będzie ciągłą injekcją. Wtedy:*

(a) *f jest silnie monotoniczna;*
(b) *funkcja odwrotna $f^{-1} : f(P) \longrightarrow P$ jest ciągła.*

(8) Jean Darboux (1842–1917).

Dowód. (a) Wystarczy pokazać, że dla dowolnego przedziału $[a,b] \subset P$, $a < b$, funkcja $f|_{[a,b]}$ jest ściśle monotoniczna. Ustalmy a, b i przypuśćmy, że $f(a) < f(b)$ (przypadek $f(a) > f(b)$ jest analogiczny — ĆWICZENIE). Z twierdzenia Weierstrassa istnieją $c_-, c_+ \in [a,b]$ takie, że $f(c_-) = \min f([a,b])$ oraz $f(c_+) = \max f([a,b])$. Pokażemy, że $c_- = a$ oraz $c_+ = b$. Przypuśćmy, że np. $a < c_-$ (przypadek $c_+ < b$ jest analogiczny — ĆWICZENIE). Wtedy $f(c_-) < f(a) < f(b)$. Z własności Darboux funkcji f wynika istnienie $c \in (c_-, b)$ takiego, że $f(c) = f(a)$, co daje sprzeczność.

Zatem $c_- = a$ i $c_+ = b$.

Ustalmy $a \leqslant x < y \leqslant b$. Przypuśćmy, $f(x) > f(y)$. Wtedy $f(a) \leqslant f(y) < f(x) \leqslant f(b)$. Wobec własności Darboux, istnienie $c \in [a,x]$ taki, że $f(c) = f(y)$, co daje sprzeczność.

(b) Oczywiście $f^{-1} : f(P) \longrightarrow P$ jest funkcją ściśle monotoniczną oraz $f(P)$ jest przedziałem. Ponieważ $f^{-1}(f(P)) = P$, więc z Twierdzenia 4.4.18(b) wnioskujemy, że f^{-1} jest funkcją ciągłą. □

Wniosek 4.4.20. *Dla dowolnego $a > 1$ (odp. $a \in (0,1)$) funkcja wykładnicza $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest bijektywna i ściśle rosnąca (odp. malejąca). W szczególności, jest ona homeomorfizmem, funkcją do niej odwrotną jest funkcja logarytmiczna $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto \log_a x \in \mathbb{R}$.*

Piszemy $\ln x := \log_e x$.

Ćwiczenie 4.4.21. Korzystając z własności funkcji wykładniczej wyprowadzić następujące własności funkcji logarytmicznej $\log_a$ dla $a > 0$, $a \neq 1$.

(a) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1, x_2 > 0$.
(b) $\log_a(b^x) = x \log_a b$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$.
(c) $a^x = e^{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$.
(d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Wniosek 4.4.22. (a) *Funkcja $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \longmapsto \sin x \in [1,1]$ jest bijektywna i ściśle rosnąca. W szczególności, jest ona homeomorfizmem; funkcją do niej odwrotną jest $[-1,1] \ni x \longmapsto \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*

(b) *Funkcja $[0,\pi] \ni x \longmapsto \cos x \in [1,1]$ jest bijektywna i ściśle malejąca. W szczególności, jest ona homeomorfizmem; funkcją do niej odwrotną jest $[-1,1] \ni x \longmapsto \arccos x \in [0,\pi]$.*

(c) *Funkcja $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni x \longmapsto \sin x \in \mathbb{R}$ jest bijektywna i ściśle rosnąca. W szczególności, jest ona homeomorfizmem; funkcją do niej odwrotną jest $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arctg} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.*

(d) *Funkcja $(0,\pi) \ni x \longmapsto \operatorname{ctg} x \in \mathbb{R}$ jest bijektywna i ściśle malejąca. W szczególności, jest ona homeomorfizmem; funkcją do niej odwrotną jest $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arcctg} x \in (0,\pi)$.*

Ćwiczenie 4.4.23 (Funkcje hiperboliczne)**.** Definiujemy:

- *sinus hiperboliczny*: $\mathbb{R} \ni x \overset{\sinh}{\longmapsto} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \in \mathbb{R}$,
- *cosinus hiperboliczny*: $\mathbb{R} \ni x \overset{\cosh}{\longmapsto} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \in [1, +\infty)$,
- *tangens hiperboliczny*: $\mathbb{R} \ni x \overset{\operatorname{tgh}}{\longmapsto} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \in (-1, 1)$,
- *cotangens hiperboliczny*: $\mathbb{R}_* \ni x \overset{\operatorname{ctgh}}{\longmapsto} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

(a) Które ze wzorów trygonometrycznych, po ewentualnej zmianie znaków, pozostają prawdziwe dla funkcji hiperbolicznych?, np. $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ (*jedynka hiperboliczna*).

(b) Odwzorowania $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$, $\cosh|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty)$, $\operatorname{ctgh}|_{\mathbb{R}>0} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow (1, +\infty)$ są homeomorfizmami. Funkcje odwrotne do nich to odpowiednio:

- $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geqslant 1$,
- $\operatorname{artgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$,
- $\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$.

4.5. Krzywe

Definicja 4.5.1. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Każde odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ nazywamy *krzywą*. Zbiór $\gamma^* := \gamma([a,b])$ nazywamy *obrazem geometrycznym* krzywej γ;

γ^* jest zbiorem zwartym spójnym.

W przyszłości będziemy zawsze utożsamiać krzywą $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ z dowolną krzywą

$$\gamma \circ \sigma : [c,d] \longrightarrow X,$$

gdzie $\sigma : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ jest bijekcją rosnącą (zwaną *zmianą parametryzacji*). Oczywiście, zmiana parametryzacji nie zmienia obrazu geometrycznego krzywej. W szczególności, można się zawsze ograniczyć do krzywych sparametryzowanych w przedziale $[0,1]$. Jeżeli $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ jest krzywą, to:

- $\gamma(a)$ nazywamy *początkiem* krzywej,
- $\gamma(b)$ nazywamy *końcem* krzywej,
- jeżeli $\gamma(a) = \gamma(b)$, to mówimy, że γ jest *zamknięta*,
- jeżeli γ jest odwzorowaniem injektywnym, to mówimy, że γ jest *łukiem Jordana* (9) — wtedy $\gamma : [a,b] \longrightarrow \gamma^*$ jest homeomorfizmem,
- Jeżeli $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem ciągłym injektywnym, to krzywą zamkniętą $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, $\gamma(t) := \sigma(\cos t, \sin t)$, nazywamy *krzywą Jordana*.

Dla krzywej $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ definiujemy krzywą *przeciwną*

$$\ominus\gamma : [a,b] \longrightarrow X, \quad \ominus\gamma(t) := \gamma(a+b-t).$$

Widać, że $(\ominus\gamma)^* = \gamma^*$.

Dla krzywych $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow X$, $j = 1,2$, takich, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ definiujemy ich *sumę*

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X,\ (\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases};$$

jest to oczywiście krzywa i $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$. (10)

Definicja 4.5.2. Mówimy, że X jest *łukowo spójna*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje krzywa $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ taka, że $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Każda przestrzeń łukowo spójna jest spójna (ale nie odwrotnie — Ćwiczenie).

Obserwacja 4.5.3. Dla $X_1 \neq \varnothing$, ..., $X_N \neq \varnothing$ mamy:

$X_1, \dots, X_N$ są przestrzeniami łukowo spójnymi $\iff$ $X_1 \times \dots \times X_N$ jest przestrzenią łukowo spójną.

4.6. Przestrzenie unormowane

Definicja 4.6.1. *Przestrzenią unormowaną* nad ciałem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) nazywamy dowolną parę $(E, \|\ \|)$, gdzie E jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$, zaś $\|\ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją spełniającą następujące trzy warunki:

(a) $\forall_{x \in E} :\ \|x\| = 0 \iff x = 0$,
(b) $\forall_{\alpha \in \mathbb{K},\, x \in E} :\ \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
(c) $\forall_{x,y \in E} :\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Funkcję $\|\ \|$ nazywamy *normą*.

Obserwacja 4.6.2. (a) $(\mathbb{K}, |\ |)$ jest przestrzenią unormowaną.

(b) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$ dla dowolnych $x, y \in E$.

(c) Zdefiniujmy $\varrho(x,y) = \varrho_{\|\ \|}(x,y) := \|x-y\|$, $x, y \in E$. Wtedy $\varrho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest metryką *generowaną przez normę*. Oczywiście

$$x_\nu \xrightarrow{\varrho_{\|\ \|}} x_0 \iff \|x_\nu - x_0\| \longrightarrow 0.$$

(d) Mówimy, że dwie normy $\|\ \|_1, \|\ \|_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *równoważne*, jeżeli $\varrho_{\|\ \|_1} \sim \varrho_{\|\ \|_2}$.

(e) $B(a,r) = B_{\varrho_{\|\ \|}}(a,r) = \{x \in E : \|x-a\| < r\}$, $\overline{B}(a,r) = \overline{B}_{\varrho_{\|\ \|}}(a,r) = \{x \in E : \|x-a\| \leqslant r\}$, $B(r) := B(0,r)$, $\overline{B}(r) := \overline{B}(0,r)$.

(f) $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$, $r > 0$.

Istotnie, wystarczy pokazać inkluzję $\supset$. W tym celu zauważmy, że jeżeli $x_0 \in \overline{B}(a,r)$, to $a + \theta(x_0 - a) \in B(a,r)$ dla dowolnego $\theta \in [0,1)$.

---

(9) Camille Jordan (1838–1922).

(10) Oznaczenia $\ominus$ i $\oplus$ mają charakter roboczy i nie musimy się do nich zbyt przywiązywać.

(g) Działania w przestrzeni unormowanej są ciągłe. Istotnie,

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\| \leqslant \|x-x_0\| + \|y-y_0\|,$$
$$\|\alpha x - \alpha_0 x_0\| \leqslant |\alpha-\alpha_0|\|x_0| + |\alpha|\|x-x_0\|.$$

(h) $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$, $r>0$.

Istotnie, wystarczy pokazać inkluzję $\supset$. W tym celu zauważmy, że jeżeli $x_0 \in \overline{B}(a,r)$, to $a+\theta(x_0-a) \in B(a,r)$ dla dowolnego $\theta \in [0,1)$.

Obserwacja 4.6.3. (a) Podobnie jak dla metryk w iloczynie kartezjańskim przestrzeni unormowanych $(E_1, |\ |_1)$, ..., $(E_N, |\ |_N)$ możemy wprowadzić wiele norm. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją taką, że:

(i) $\varphi(\xi) = 0 \iff \xi = 0$,
(ii) $\xi \leqslant \eta \Longrightarrow \varphi(\xi) \leqslant \varphi(\eta)$,
(iii) $\varphi(\xi+\eta) \leqslant \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$,
(iv) $\varphi(t\xi) = t\varphi(\xi)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Wtedy funkcja dana wzorem

$$\|x\| := \varphi(|x_1|_1, \dots, |x_N|_N), \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in E_1 \times \dots \times E_N,$$

jest normą na $E_1 \times \dots \times E_N$ — Ćwiczenie.

(b) Jeżeli $(E_1, |\ |_1), \dots, (E_N, |\ |_N)$ są przestrzeniami unormowanymi, to w $E_1 \times \dots \times E_N$ mamy następujące klasyczne normy (Ćwiczenie):

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|_j^p\Big)^{1/p} = \textit{norma } l^p, \quad p \geqslant 1,$$
$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|_1, \dots, |x_N|_N\} = \textit{norma } \ell^\infty = \textit{norma maksimum}.$$

W szczególności, normami są funkcje:

$$\|x\|_1 = |x_1|_1 + \dots + |x_N|_N = \textit{norma suma},$$
$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|_j^2\Big)^{1/2} = \textit{norma euklidesowa}.$$

Zauważmy, że metryki generowane przez te normy odpowiadają metrykom d_p, d_∞, d_1 i d_2 (utworzonym dla $(E_1, \varrho_{|\ |_1}), \dots (E_N, \varrho_{|\ |_N})$ — por. Wniosek 3.5.6. W szczególności, są to normy równoważne, zadające topologię iloczynu kartezjańskiego.

(c) Dla przykładu, $\mathbb{K}^N$ jest przestrzenią unormowaną przez *normę euklidesową*

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N.$$

Dla kul w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w normie euklidesowej rezerwujemy specjalne oznaczenia $\mathbb{B}(a,r)$, $\overline{\mathbb{B}}(a,r)$, $\mathbb{B}(r)$, $\overline{\mathbb{B}}(r)$.

Definicja 4.6.4. Niech $(E, \|\ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Dla $A, B \subset E$ niech

$$A + B := \{x+y : x \in A,\ y \in B\}, \quad A, B \subset E,$$
$$A \cdot B := \{\alpha x : \alpha \in A,\ x \in B\}, \quad A \subset \mathbb{K},\ B \subset E.$$

Ponadto przyjmujemy $a + B := \{a\} + B$, $\alpha \cdot B := \{\alpha\} \cdot B$ ([11]). Mamy następującą własność translatywności kul: $B(a,r) = a + B(r)$, $\overline{B}(a,r) = a + \overline{B}(r)$. Ponadto, $B(r) = r \cdot B(1)$, $\overline{B}(r) = r \cdot \overline{B}(1)$.

Dla dowolnych $x, y \in E$ definiujemy *segment* o końcach x, y:

$$[x,y] := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}.$$

Odnotujmy, że $[x,y] = [y,x]$ oraz $[x,x] = \{x\}$. Zauważmy, że $[x,y]$ jest obrazem geometrycznym krzywej $[0,1] \ni t \longmapsto x + t(y-x)$. W szczególności, segment jest zbiorem zwartym i spójnym.

Zbiór $A \subset E$ nazywamy:

([11]) Oczywiście $a + B = T_a(B)$, gdzie $T_a : E \longrightarrow E$ oznacza *translację* $x \longmapsto a + x$.

- *wypukłym*, jeżeli $[x,y] \subset A$ dla dowolnych $x, y \in A$;
- *gwiaździstym względem punktu* $a \in A$, jeżeli $[a,x] \subset A$ dla dowolnego $x \in A$.

Każdy zbiór wypukły jest gwiaździsty względem dowolnego punktu $a \in A$.

Obserwacja 4.6.5 (Zbiory wypukłe). (a) A jest wypukły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_2$ i dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in A$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, dla których $t_1 + \dots + t_n = 1$ mamy $t_1x_1 + \dots + t_nx_n \in A$. Wyrażenie $t_1x_1 + \dots + t_nx_n \in A$ nazywamy *kombinacją barycentryczną punktów* $x_1, \dots, x_n$.

(b) Kule $B(a,r)$ i $\overline{B}(a,r)$ są wypukłe. Istotnie,

$$\|x + t(y-x) - a\| = \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \leqslant (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\|.$$

(c) Dla dowolnej rodziny zbiorów wypukłych $(A_i)_{i\in I} \subset E$ zbiór $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ jest wypukły. W szczególności, dla dowolnego zbioru $A \subset E$ istnieje najmniejszy zbiór wypukły $\operatorname{conv} A = \operatorname{conv}(A) \subset E$ zawierający A.

(d) $\operatorname{conv} A = \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{n} t_jx_j : n \in \mathbb{N}_2,\ x_j \in A,\ t_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, n,\ t_1 + \dots + t_n = 1 \Big\}$.

(e) (Twierdzenie Carathéodory'ego ([12]) — Ćwiczenie*) Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^d$, to
$\operatorname{conv} A = \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{d+1} t_jx_j : x_j \in A,\ t_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, d+1,\ t_1 + \dots + t_{d+1} = 1 \Big\}$.

(f) (Ćwiczenie) Dla dowolnego $d \geqslant 2$ istnieje zbiór $A \subset \mathbb{R}^d$ taki, że
$\operatorname{conv} A \supsetneq \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{d} t_jx_j : x_j \in A,\ t_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, d,\ t_1 + \dots + t_d = 1 \Big\}$.

(g) $\operatorname{conv}(A \times B) = (\operatorname{conv} A) \times (\operatorname{conv} B)$.

(h) Jeżeli A jest wypukły, to $\overline{A}$ jest wypukły.
Istotnie, jeżeli $x_n \longrightarrow x_0$ i $y_n \longrightarrow y_0$, to $x_n + t(y_n - x_n) \longrightarrow x_0 + t(y_0 - x_0)$, $t \in [0,1]$.

(i) Jeżeli A jest wypukły, to $\operatorname{int} A$ jest wypukły.
Istotnie, jeżeli $B(a,r), B(b,r) \subset A$, to

$$\begin{aligned}[a,b] + B(r) &= \{(1-t)a + tb + x : t \in [0,1],\ x \in B(r)\}\\ &= \{(1-t)(a+x) + t(b+x) : t \in [0,1],\ x \in B(r)\} \subset \operatorname{conv}(B(a,r) \cup B(b,r)) \subset A,\end{aligned}$$

co dowodzi, że $[a,b] \subset \operatorname{int} A$.

(j) Jeżeli A jest wypukły i $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, to dla dowolnych $a \in \operatorname{int} A$ i $b \in A$ mamy

$$[a,b) := \{(1-t)a + tb : t \in [0,1)\} \subset \operatorname{int} A.$$

W szczególności, $A \subset \overline{\operatorname{int} A}$.
Istotnie, jeżeli $B(a,r) \subset A$, to

$$B((1-t)a + tb, r(1-t)) \subset \operatorname{conv}(B(a,r) \cup \{b\}) \subset A, \quad t \in [0,1).$$

Definicja 4.6.6. Dla dowolnych $x_0, \dots, x_N \in E$ definiujemy *łamaną* o wierzchołkach $x_0, \dots, x_N$

$$[x_0, \dots, x_N] := [x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N].$$

Zauważmy, że każda łamana jest zbiorem łukowo spójnym (Definicja 4.5.2). Łamaną $[x_0, \dots, x_N]$ możemy utożsamiać z krzywą będącą sumą odcinków.

Twierdzenie 4.6.7. *Dla dowolnego zbioru otwartego $D \subset E$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *D jest* obszarem *(tzn. zbiorem otwartym i spójnym);*

(ii) *dla dowolnych $x, y \in D$ istnieje łamana $[x_0, \dots, x_N] \subset D$ taka, że $x_0 = x$ i $x_N = y$.*

Dowód. Dowodu wymaga jedynie implikacja ((i) $\Longrightarrow$ (ii)). Ustalmy $x_0 \in D$ i niech D_0 oznacza zbiór tych wszystkich $x \in D$, dla których istnieje łamana $[x_0, \dots, x_N] \subset D$ taka, że $x_N = x$. Problem polega na pokazaniu, że $D_0 = D$ o ile D jest obszarem. Wystarczy pokazać, że D_0 jest niepusty, otwarty i domknięty w D. Oczywiście $D_0 \neq \varnothing$, bo $x_0 \in D_0$.

Jeżeli $a \in D_0$ i $B(a,r) \subset D$ (D jest otwarty), to $B(a,r) \subset D_0$, bo jeżeli $[x_0, \dots, x_N]$ „dochodzi” do a, to $[x_0, \dots, x_N, x]$ dochodzi do x dla dowolnego $x \in B(a,r)$.

([12]) Constantin Carathéodory (1873–1950).

Jeżeli b jest punktem skupienia D_0 w D i $B(b,r) \subset D$, to bierzemy dowolny punkt $a \in B(b,r) \cap D_0$ i teraz, jeżeli $[x_0,\dots,x_N]$ dochodzi do a, to $[x_0,\dots,x_N,b]$ dochodzi do b, czyli $b \in D_0$. $\square$

Niech $D \subset E$ będzie obszarem. Dla dowolnych punktów $x, y \in D$, niech

$$\varrho_D^i(x,y) := \Big\{ \sum_{j=1}^n \|x_j - x_{j-1}\| : [x_0,\dots,x_n] \subset D,\ x_0 = x,\ x_N = y \Big\}.$$

Dostajemy funkcję $\varrho_D^i : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Obserwacja 4.6.8. (a) Na podstawie nierówności trójkąta, mamy $\varrho_D^i(x,y) \geqslant \|x-y\|$.

(b) ϱ_D^i jest metryką. Jest to tzw. *metryka wewnętrzna* dla obszaru D.

(c) Jeżeli $[x,y] \subset D$, to $\varrho_D^i(x,y) = \|x-y\|$. W szczególności, ϱ_D^i jest ciągła w wyjściowej topologii.

(d) Jeżeli D jest ograniczonym obszarem gwiaździstym względem punktu a, to

$$\varrho_D^i(x,y) \leqslant \|x-a\| + \|y-a\| \leqslant 2\operatorname{diam} D.$$

(e) Istnieją obszary ograniczone $D \subset \mathbb{R}^2$ takie, że ϱ_D^i nie jest funkcją ograniczoną — Ćwiczenie.

Definicja 4.6.9. Przestrzeń unormowaną $(E, \|\ \|)$ nazywamy *przestrzenią Banacha*, jeżeli przestrzeń metryczna $(E, \varrho_{\|\ \|})$ jest zupełna.

Obserwacja 4.6.10. (a) Niech $X \neq \varnothing$ będzie dowolnym zbiorem i niech E będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy $\mathcal{B}(X,E)$ ([13]) z *normą Czebyszewa*

$$\|f\|_X := \sup\{\|f(x)\|_E : x \in X\}, \quad f \in \mathcal{B}(X,E),$$

ma naturalną strukturę przestrzeni unormowanej (Ćwiczenie); odnotujmy, że powyższa norma generuje metrykę Czebyszewa (Definicja3.3.1).

Ponadto, E jest Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}(X,E)$ jest Banacha (por. Obserwacja 3.3.3(c)).

(b) Jeżeli E jest przestrzenią Banacha, to przestrzeń $\mathcal{C}_b(X,E)$ wraz z normą Czebyszewa jest przestrzenią Banacha.

4.6.1. Przestrzenie funkcji spełniających warunek Höldera. Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną, $X \neq \varnothing$, i nich $(E, \|\ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, $E \neq \{0\}$. Dla $0 < \alpha \leqslant 1$ niech $\underline{h}^\alpha(X,E)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $f : X \longrightarrow E$, które spełniają globalny warunek Höldera z wykładnikiem α. Zauważmy, że jest to $\mathbb{K}$–przestrzeń wektorowa oraz $h^\alpha(X,E) \subset \mathcal{C}(X,E)$. Dla $f : X \longrightarrow E$ połóżmy

$$|f|_\alpha = |f|_{X,\alpha} := \sup\Big\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{(\varrho(x,y))^\alpha} : x, y \in X,\ x \neq y \Big\} \in [0, +\infty].$$

Jest oczywiste, że $f \in h^\alpha(X,E) \iff |f|_\alpha < +\infty$. Wtedy też $\|f(x) - f(y)\| \leqslant |f|_\alpha (\varrho(x,y))^\alpha$, $x, y \in X$.

Łatwo sprawdzić, że $|\ |_\alpha : h^\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest $\mathbb{K}$–*seminormą*, tzn. $|0|_\alpha = 0$, $|\lambda f|_\alpha = |\lambda||f|_\alpha$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) oraz $|f+g|_\alpha \leqslant |f|_\alpha + |g|_\alpha$.

Definiujemy $\mathcal{H}^\alpha(X,E) := h^\alpha(X,E) \cap \mathcal{B}(X,E)$. Jest to $\mathbb{K}$–przestrzeń wektorowa. Przestrzeń tę normujemy przy pomocy normy $\|f\|_{X,\alpha} := \|f\|_X + |f|_{X,\alpha}$.

Jeżeli $d := \operatorname{diam} X < +\infty$, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy $|\ |_\beta \leqslant d^{\alpha-\beta} |\ |_\alpha$; w szczególności, $\mathcal{H}^\alpha(X,E) \subset \mathcal{H}^\beta(X,E)$ oraz $\|\ \|_{X,\beta} \leqslant C \|\ \|_{X,\alpha}$, gdzie $C := \max\{1, d^{\alpha-\beta}\}$.

Twierdzenie 4.6.11. *Jeżeli E jest Banacha, to $(\mathcal{H}^\alpha(X,E), \|\ \|_{X.\alpha})$ jest Banacha.*

Dowód. Niech $(f_s)_{s=1}^\infty \subset \mathcal{H}^\alpha(X,E)$ będzie ciągiem Cauchy'ego w sensie $\|\ \|_{X,\alpha}$. Ponieważ $(\mathcal{C}_b(X,E), \|\ \|_X)$ jest przestrzenią Banacha (Obserwacja 4.4.8(c)), mamy $f_s \overset{\|\ \|_X}{\longrightarrow} f_0 \in \mathcal{C}_b(X,E)$. Pozostaje, wykazać, że $|f_s - f_0|_\alpha \longrightarrow 0$. Dla $x, y \in X$, $x \neq y$, mamy

$$\frac{\|f_s(x) - f_0(x) - (f_s(y) - f_0(y))\|}{(\varrho(x,y))^\alpha} = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\|f_s(x) - f_\nu(x) - (f_s(y) - f_\nu(y))\|}{(\varrho(x,y))^\alpha}$$
$$\leqslant \limsup_{\nu \to +\infty} |f_s - f_\nu|_\alpha \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

([13]) Odnotujmy, że $\mathcal{B}(X,E) := \{f : X \longrightarrow E : \exists_{R>0} : f(X) \subset B(R)\}$.

Twierdzenie 4.6.12. (a) *Jeżeli* $f \in \mathcal{H}^\alpha(X, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{H}^\alpha(X, E)$, *to* $f \cdot g \in \mathcal{H}^\alpha(X, E)$ *oraz* $\|fg\|_{X,\alpha} \leqslant \|f\|_{X,\alpha}\|g\|_{X,\alpha}$.

(b) *Niech* F *będzie przestrzenią unormowaną nad* $\mathbb{K}$ *i* $\varnothing \neq Y \subset E$. *Jeżeli* $\varphi \in \mathcal{H}^\beta(X, E)$, $\varphi(X) \subset Y$ *i* $f \in \mathcal{H}^\alpha(Y, F)$, *to* $f \circ \varphi \in \mathcal{H}^{\alpha\beta}(X, F)$.

Zauważmy, że biorąc $E = F = \mathbb{R}$, $X = Y = (-1, 1)$, $\varphi(t) := |t|^\beta$, $f(x) = |x|^\alpha$, widzimy, że wyniku z (b) nie da się poprawić (Ćwiczenie).

Dowód. (a) $\dfrac{\|f(x)g(x) - f(y)g(y)\|}{(\varrho(x,y))^\alpha} \leqslant \dfrac{\|(f(x) - f(y))g(y)\| + \|f(x)(g(x) - g(y))\|}{(\varrho(x,y))^\alpha} \leqslant |f|_\alpha \|g\|_X + \|f\|_X |g|_\alpha$, skąd wynika, że $\|fg\|_{X,\alpha} = \|fg\|_X + |fg|_\alpha \leqslant \|f\|_X\|g\|_X + |f|_\alpha\|g\|_X + \|f\|_X|g|_\alpha \leqslant \|f\|_{X,\alpha}\|g\|_{X,\alpha}$.

(b) $\dfrac{\|f(\varphi(t)) - f(\varphi(u))\|_F}{(\varrho(t,u))^{\alpha\beta}} \leqslant |f|_{Y,\alpha}\Big(\dfrac{\|\varphi(t) - \varphi(u)\|_E}{(\varrho(t,u))^\beta}\Big)^\alpha \leqslant |f|_{Y,\alpha}|\varphi|^\alpha_{X,\beta}$, skąd wynika, że $\|f \circ \varphi\|_{X,\alpha\beta} \leqslant \|f\|_Y + |f|_{Y,\alpha}|\varphi|^\alpha_{X,\beta}$. $\square$

ROZDZIAŁ 5

Pochodna

5.1. Podstawowe pojęcia

W tym rozdziale $P \subset \mathbb{R}$ będzie nietrywialnym przedziałem nieredukującym się do punktu, zaś E — przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E \neq \{0\}$.

Definicja 5.1.1. Niech $f : P \longrightarrow E$, $a \in P$. Powiemy, że f ma w punkcie a *pochodną*, jeżeli istnieje granica

$$f'(a) := \lim_{P-a \ni h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in E,$$

gdzie $P - a = \{x - a : x \in P\}$ (zauważmy, że $P - a$ jest przedziałem i $0 \in P - a$). Piszemy wtedy $f \in \mathcal{D}(P, E; a)$ — *jest to oznaczenie niestandardowe, dla potrzeb naszego wykładu.* W przypadku $E = \mathbb{R}$ piszemy $f \in \mathcal{D}(P; a)$. Jeżeli a jest prawym końcem przedziału P, to wtedy mamy tu do czynienia z granicą lewostronną i mówimy o pochodnej lewostronnej

$$f'_-(a) := \lim_{P-a \ni h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Podobnie dla pochodnych prawostronnych.

Niech $\mathcal{D}(P, E) := \bigcap_{a \in P} \mathcal{D}(P, E; a) = \{f : P \longrightarrow E : \forall_{a \in P} : f'(a) \text{ istnieje}\}$ — *jest to oznaczenie niestandardowe, dla potrzeb naszego wykładu.* Jak zwykle $\mathcal{D}(P) := \mathcal{D}(P, \mathbb{R})$.

Przykład 5.1.2. Niech $f(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f'_-(0) = -1$ oraz $f'_+(0) = +1$.

Twierdzenie 5.1.3. *Niech $f : P \longrightarrow E$, $a \in P$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f'(a)$ istnieje;*

(ii) *istnieje $\ell \in E$ oraz funkcja $\alpha : P - a \longrightarrow E$ taka, że*
$f(a+h) = f(a) + \ell h + \alpha(h)h$ dla $h \in P - a$ oraz $\lim_{P-a \ni h \to 0} \alpha(h) = 0$.

Wyrażenie $\alpha(h)h$ zapisujemy krótko $o(h)$ przy $h \longrightarrow 0$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): $\ell := f'(a)$, $\alpha(h) := \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a), & \text{jeżeli } h \in P - a,\ h \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0 \end{cases}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell + \alpha(h)$. $\square$

Obserwacja 5.1.4 (Interpretacja geometryczna pochodnej)**.** Niech $f, g : P \longrightarrow E$, $a \in \operatorname{int} P$. Mówimy, że *$f, g$ są styczne w punkcie a*, jeżeli $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{x-a} = 0$.

W tym języku, dla $a \in \operatorname{int} P$, mamy: $f'(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $\ell \in E$ odwzorowania f i $P \ni x \longmapsto f(a) + \ell(x - a)$ są styczne w punkcie a.

Twierdzenie 5.1.5. $\mathcal{D}(P, E; a) \subset \mathcal{C}(P, E; a)$.

Dowód. $\lim_{h \to 0}(f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)h = f'(a) \cdot 0 = 0.$ $\square$

Twierdzenie 5.1.6. (a) *Niech $f, g \in \mathcal{D}(P, E; a)$. Wtedy $f + g \in \mathcal{D}(P, E; a)$ oraz $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

(b) *Jeżeli F_1, F_2 są przestrzeniami unormowanymi, $f_j \in \mathcal{D}(P, F_j; a)$, $j = 1, 2$, oraz $B : F_1 \times F_2 \longrightarrow E$ jest odwzorowaniem dwuliniowym ciągłym ($B \in \mathcal{L}(F_1, F_2; E)$), to $B(f_1, f_2) \in \mathcal{D}(P, E; a)$ oraz $(B(f_1, f_2))'(a) = B(f_1'(a), f_2(a)) + B(f_1(a), f_2'(a))$.*

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{D}(P, \mathbb{K}; a)$, $g \in \mathcal{D}(P, E; a)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}(P, E; a)$ oraz $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(c) *Niech* $f \in \mathcal{D}(P,E;a)$, $g \in \mathcal{D}(P,\mathbb{K};a)$, $g(x) \neq 0$, $x \in P$. *Wtedy* $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(P,E;a)$ *oraz* $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

(d) *Jeżeli* $E = E_1 \times \dots \times E_N$ *i* $f = (f_1,\dots,f_N) : P \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_N$ *to:*
$f \in \mathcal{D}(P, E_1 \times \dots \times E_N; a) \iff f_j \in \mathcal{D}(P,E_j;a)$, $j = 1,\dots,N$.

(e) *Jeżeli* $L : E \longrightarrow F$ *jest odwzorowaniem liniowym ciągłym* ($L \in \mathcal{L}(E,F)$) *oraz* $f \in \mathcal{D}(P,E;a)$, *to* $L \circ f \in \mathcal{D}(P,F)$ *i* $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$.

Dowód. (a) Ćwiczenie.

(b)
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{B(f_1(a+h), f_2(a+h)) - B(f_1(a), f_2(a))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} B\Big(\frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h}, f_2(a+h)\Big) + \lim_{h\to 0} B\Big(f_1(a), \frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h}\Big)\\ &= B(f_1'(a), f_2(a)) + B(f_1(a), f_2'(a)).\end{aligned}$$

(c) Wystarczy rozważyć przypadek $f \equiv 1$.
$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}{g(a+h)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

(d), (e) Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 5.1.7 (Twierdzenie o pochodnej złożenia)**.** *Niech* $\varphi : Q \longrightarrow P$, *gdzie* Q *jest przedziałem niedredukującym się do punktu i niech* $t_0 \in Q$, $a := \varphi(t_0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(Q;t_0)$ *i* $f \in \mathcal{D}(P,E;a)$. *Wtedy* $f \circ \varphi \in \mathcal{D}(Q,E;t_0)$ *oraz* $(f\circ\varphi)'(t_0) = f'(a)\varphi'(t_0)$.

Dowód. Mamy
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \alpha(h)h, \quad h \in P - a, \text{ gdzie } \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0,$$
$$\varphi(t_0+t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)t + \beta(t)t, \quad t \in Q - t_0, \text{ gdzie } \lim_{t\to 0}\beta(t) = 0.$$
Wynika stąd, że
$$\begin{aligned}f(\varphi(t_0+t)) &= f(a) + f'(a)(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0)) + \alpha(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0))(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0))\\ &= f(a) + f'(a)(\varphi'(t_0)t + \beta(t)t) + \alpha(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)t+\beta(t)t)\\ &= f(a) + f'(a)\varphi'(t_0)t + \gamma(t)t,\end{aligned}$$
gdzie $\gamma(t) := f'(a)\beta(t) + \alpha(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)+\beta(t))$. Pozostaje zauważyć, że $\gamma(t) \longrightarrow 0$ gdy $t \longrightarrow 0$. $\square$

Twierdzenie 5.1.8 (Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej)**.** *Niech* $f : P \longrightarrow Q$ *będzie bijekcją, gdzie* $P, Q \subset \mathbb{R}$ *są przedziałami,* $a \in P$, $b := f(a)$ *i niech* $g := f^{-1} : Q \longrightarrow P$. *Załóżmy, że* $f'(a)$ *istnieje. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $g'(b)$ *istnieje;*

(ii) g *jest ciągła w punkcie* b *oraz* $f'(a) \neq 0$.

Ponadto, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Ciągłość g w punkcie b jest oczywista. Ponieważ, $g \circ f = \mathrm{id}_P$, z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia dostajemy $g'(b)f'(a) = 1$. Wynika stąd, że $f'(a) \neq 0$ oraz że $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $t \in Q - b$ i niech $h(t) := g(b+t) - g(b)$. Wobec ciągłości funkcji g w punkcie b wnioskujemy, że $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$. Widać, że $t = f(a+h(t)) - f(a)$. Mamy
$$\lim_{t\to 0}\frac{g(b+t)-g(b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{h(t)}{f(a+h(t))-f(a)} = \frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{f(a+h(t))-f(a)}{h(t)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$ $\square$

Przykład 5.1.9 (Pochodne funkcji elementarnych)**.** (a) $\mathrm{const}' = 0$.

(b) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty.
$n \rightsquigarrow n+1$: $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n$.

(c) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}_*$, $n \in \mathbb{Z}_{<0}$.
Niech $n = -k$. Wtedy $(x^n)' = (\frac{1}{x^k})' = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = nx^{n-1}$.
(d) $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ (Twierdzenie 2.3.1(i)).
(e) $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.
(f) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Niech $y := \log_a x$. Wtedy $(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$.
(g) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^{\alpha \ln x})\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.
(h) $(\sin x)' = \cos x$.
Istotnie, ponieważ $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h}$, wystarczy pokazać, że $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$, co z kolei wynika z oszacowań $\sin t < t < \operatorname{tg} t$ dla $0 < t < \frac{\pi}{2}$.
(i) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.
Niech $y := \arcsin x$. Wtedy $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(j) $(\cos x)' = -\sin x$.
(k) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.
(l) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
(m) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
(n) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
(o) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
(p) $(\sinh x)' = \cosh x$.
(q) $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
(r) $(\cosh x)' = \sinh x$.
(s) $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.
(t) $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
(u) $(\operatorname{artgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.
(v) $(\operatorname{ctgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$.
(w) $(\operatorname{arctgh} x)' = \frac{1}{x^2-1}$, $x > 1$.

5.2. Twierdzenia o wartościach średnich

Definicja 5.2.1. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie X jest przestrzenią metryczną, i niech $a \in X$. Mówimy, że f ma w punkcie a *maksimum lokalne* (odp. *minimum lokalne*), jeżeli istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(x) \leqslant f(a)$ (odp. $f(x) \geqslant f(a)$) dla $x \in U$. Jeżeli f ma w punkcie a maksimum bądź minimum lokalne, to mówimy, że ma *ekstremum lokalne*.

Mówimy, że f ma w punkcie a *silne maksimum lokalne* (odp. *silne minimum lokalne*), jeżeli istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(x) < f(a)$ (odp. $f(x) > f(a)$) dla $x \in U \setminus \{a\}$. Jeżeli f ma w punkcie a silne maksimum bądź silne minimum lokalne, to mówimy, że ma *silne ekstremum lokalne*.

Twierdzenie 5.2.2 (Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)**.** *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in \operatorname{int} P$ ekstremum lokalne i $f'(a)$ istnieje. Wtedy $f'(a) = 0$.*

Dowód. Rozważmy przypadek maksimum lokalnego: niech $f(a + h) \leqslant f(a)$ dla $|h| < \delta$. Wtedy

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \begin{cases} \geqslant 0, & \text{jeżeli } h \in (-\delta, 0) \\ \leqslant 0, & \text{jeżeli } h \in (0, \delta) \end{cases},$$

a ponieważ powyższy iloraz różnicowy ma granicę, gdy $h \longrightarrow 0$, to musi być $f'(a) = 0$. $\square$

Przykład 5.2.3. Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji nie jest wystarczający. Na przykład, funkcja $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, spełnia w $x = 0$ warunek konieczny istnienia ekstremum, ale nie posiada w $x = 0$ ekstremum lokalnego.

Twierdzenie 5.2.4 (Twierdzenie Rolle'a (1) o wartości średniej)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{D}((a,b))$ będzie taka, że $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia Weierstrassa, istnieją $c_-, c_+ \in [a,b]$ takie, że

$$m := \min f = f(c_-), \quad M := \max f = f(c_+) \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli $m = M$, to f jest funkcją stałą, a więc $f' \equiv 0$. Możemy więc założyć, że $m < M$. Wtedy $c_- \in (a,b)$ lub $c_+ \in (a,b)$. Przyjmijmy, że $\xi := c_+ \in (a,b)$. Ponieważ f osiąga w ξ maksimum, więc z Twierdzenia 5.2.2 wynika, że $f'(\xi) = 0$. □

Twierdzenie 5.2.5 (Twierdzenie Lagrange'a (2) o wartości średniej)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{D}((a,b))$. Wtedy istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Korzystamy z twierdzenia Rolle'a dla funkcji

$$\varphi(x) := f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\Big), \quad x \in [a,b]. \qquad \square$$

Twierdzenie 5.2.6 (Twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej)**.** *Niech $f, g \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{D}((a,b))$. Wtedy istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Jeżeli ponadto $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$, to z Twierdzenia Rolle'a wynika, że $g(a) \neq g(b)$, a zatem mamy klasyczną postać twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dla $g(x) \equiv x$ dostajemy twierdzenie Lagrange'a.

Dowód. Jeżeli $g(a) = g(b)$, to z Twierdzenia Rolle'a dostajemy $\xi \in (a,b)$ taki, że $g'(\xi) = 0$ i wzór zachodzi. Jeżeli $g(a) \neq g(b)$, to stosujemy twierdzenie Rolle'a do funkcji

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)), \quad x \in [a,b]. \qquad \square$$

Twierdzenie 5.2.7. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$ i $f' \equiv 0$. Wtedy $f \equiv \mathrm{const}$.*

Dowód. Weźmy dowolne $a, b \in P$, $a < b$. Z twierdzenia Lagrange'a wynika istnienie $\xi \in (a,b)$ takiego, że $0 = f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. A stąd $f(a) = f(b)$. □

Obserwacja 5.2.8. Niech $f : (0,1) \cup (1,2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ dla $x \in (0,1)$, $f(x) := 1$ dla $x \in (1,2)$. Wtedy $f' \equiv 0$.

Twierdzenie 5.2.9. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$ i $|f'(x)| \leqslant M$, $x \in P$. Wtedy*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \quad x, y \in P.$$

Dowód. Ustalmy $x, y \in P$, $x < y$. Z twierdzenia Lagrange'a istnieje $\xi \in (x,y)$ taki, że $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. □

Twierdzenie 5.2.10. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest rosnąca (odp. malejąca);*
(ii) *$f'(x) \geqslant 0$ (odp. $f'(x) \leqslant 0$) dla dowolnego $x \in P$.*

---

(1) Michel Rolle (1652–1719).
(2) Joseph de Lagrange (1736–1813).

Dowód. Rozważymy przypadek funkcji rosnącej.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy $x \in P$. Jeżeli x nie jest prawym końcem przedziału, to

$$f'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Jeżeli x jest prawym końcem przedziału, to

$$f'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \geqslant 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $x, y \in P$, $x < y$. Na podstawie twierdzenia Lagrange'a mamy $0 \leqslant f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Przypadek funkcji malejącej jest analogiczny — Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 5.2.11. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest silnie rosnąca (odp. silnie malejąca);*
(ii) *$f'(x) \geqslant 0$ (odp. $f'(x) \leqslant 0$) dla dowolnego $x \in P$ oraz $\operatorname{int}(\{x \in P : f'(x) = 0\}) = \varnothing$.*

Dowód. Rozważymy przypadek funkcji ściśle rosnącej.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ponieważ f jest rosnąca, więc $f'(x) \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in P$. Przypuśćmy, że $(a, b) \subset \{x \in P : f'(x) = 0\}$, $a < b$. Wtedy f jest stała w (a, b) — sprzeczność.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wiemy, że f jest rosnąca. Przypuśćmy, istnieją $a, b \in P$ takie, że $a < b$ oraz $f(a) = f(b)$, a więc f jest stała w $[a, b]$, czyli $(a, b) \subset \{x \in P : f'(x) = 0\}$ — sprzeczność.

Przypadek funkcji ściśle malejącej jest analogiczny — Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 5.2.12. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$. Wtedy f' ma własność Darboux.*

Dowód. Niech $a, b \in P$, $a < b$, $f'(a) < \gamma < f'(b)$. Niech $g(x) := f(x) - \gamma x$. Wtedy $g \in \mathcal{D}(P)$, $g'(a) < 0$ oraz $g'(b) > 0$. W szczególności, minimum globalne funkcji g w przedziale $[a, b]$ musi być przyjęte w pewnym punkcie $c \in (a, b)$ (Ćwiczenie). Wtedy $g'(c) = 0$, czyli $f'(c) = \gamma$.

Przypadek $f'(a) > \gamma > f'(b)$ jest analogiczny (g osiąga maksimum globalne w $[a, b]$ w punkcie $c \in (a, b)$) — Ćwiczenie. $\square$

Przykład 5.2.13. Funkcja

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R}_* \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

f' nie jest ciągła w 0 (Ćwiczenie), choć ma własność Darboux.

5.3. Reguła de L'Hôpitala

Twierdzenie 5.3.1 (Reguła de L'Hôpitala ([3])). *Niech $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, będą różniczkowalne i takie, że $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$. Niech $c \in \{a, b\}$. Załóżmy, że spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

(i) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$;
(ii) $\lim\limits_{x\to c} |g(x)| = +\infty$.

Wtedy $\liminf\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \liminf\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

W szczególności, jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$, *to* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeżeli $(x_n)_{n=1}^\infty \subset (a, b)$, $x_n \longrightarrow c$, jest taki, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = d \in \overline{\mathbb{R}}$, to istnieje ciąg $(\xi_n)_{n=1}^\infty \subset (a, b)$, $\xi_n \longrightarrow c$, taki że $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = d$.

([3]) Guillaume de L'Hôpital (1661–1704).

Zauważmy, że na mocy twierdzenia Cauchy'ego, dla ustalonych dwóch punktów $x, y \in (a, b)$, $x \neq y$, istnieje $\xi = \xi(x, y) \in (x, y)$ (tutaj (x, y) oznacza zwykły przedział, gdy $x < y$, oraz przedział (y, x), gdy $y < x$) takie, że $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$, czyli

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}. \tag{*}$$

Ustalmy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset (a, b)$, $x_n \longrightarrow c$, taki że $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = d \in \overline{\mathbb{R}}$.

Przypadek (i): Dobieramy ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ taki że $y_n \longrightarrow c$ oraz $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{g(y_n)}{g(x_n)} = 0$. Niech $\xi_n := \xi(x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\xi_n \longrightarrow c$ oraz, wobec (*), $\lim_{n\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(y_n)}{g(x_n)}}{1 - \frac{g(y_n)}{g(x_n)}} = d$.

Przypadek (ii): z ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, taki że: $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(z_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{g(x_n)}{g(z_n)} = 0$ oraz $z_n \neq x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $\xi_n := \xi(z_n, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\xi_n \longrightarrow c$ oraz, wobec (*), $\lim_{n\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{f(z_n)}{g(z_n)} - \frac{f(x_n)}{g(z_n)}}{1 - \frac{g(x_n)}{g(z_n)}} = d$. □

Przykład 5.3.2. (a) Korzystając n–krotnie z reguły de L'Hôpitala dostajemy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

W konsekwencji, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ oraz $\lim_{x\to0+} x^\alpha \ln x = 0$ dla dowolnego $\alpha > 0$ (Ćwiczenie).

(b) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$, ale granica $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\sin x)'}{x'}$ nie istnieje.

(d) $\lim_{x\to0+} x \ln x = \lim_{x\to0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, ale

$\lim_{x\to0+} x \ln x = \lim_{x\to0+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0+} \frac{1}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = -\lim_{x\to0+} x \ln^2 x = \dots$ i problem jest jeszcze bardziej skomplikowany niż na początku.

5.4. Twierdzenie o przyrostach skończonych

Przykład 5.4.1. Twierdzenie Rolle'a nie zachodzi dla odwzorowań o wartościach w $\mathbb{R}^2$. Dla przykładu, niech

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) := (\cos x, \sin x).$$

Wtedy $f(0) = f(2\pi) = (1, 0)$, ale $f'(\xi) = (-\sin\xi, \cos\xi) \neq (0, 0)$, $\xi \in [0, 2\pi]$.

Twierdzenie 5.4.2 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Niech*

$$f : [a, b] \longrightarrow E, \quad \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

będą funkcjami ciągłymi takimi, że $f'_+(x)$ i $\varphi'_+(x)$ istnieją dla $x \in [a, b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$. Wtedy, jeżeli $\|f'_+(x)\| \leqslant \varphi'_+(x)$ dla dowolnego $x \in [a, b] \setminus S$, to

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli pochodne prawostronne zastąpimy przez pochodne lewostronne.

Dowód. Możemy założyć, że $\#S = \aleph_0$ oraz $a, b \in S$. Niech $S = \{a_1, a_2, \dots\}$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech

$$\Phi(x) := \|f(x) - f(a)\| - (\varphi(x) - \varphi(a)) - \varepsilon(x - a) - \varepsilon,$$

$$\Psi(x) := \varepsilon \sum_{n:\ a_n < x} \frac{1}{2^n}, \quad x \in [a, b] \quad \Big(\sum_{\varnothing} ... := 0\Big), \qquad (^4)$$

$$I := \{x \in [a, b] : \Phi(x) \leqslant \Psi(x)\}, \quad c := \sup I.$$

Wystarczy pokazać, że $b \in I$ (a następnie $\varepsilon \longrightarrow 0$).

Odnotujmy, że Φ jest funkcją ciągłą, zaś Ψ jest funkcją niemalejącą.

Zauważmy, że $a \in I$ (bo $\Phi(a) = -\varepsilon$) oraz $[a, a+\delta] \subset I$ dla pewnego $\delta > 0$ (z ciągłości Φ). W szczególności, $c > a$. Ponadto, $c \in I$.

Istotnie, niech $I \ni x_n \nearrow c$, wtedy

$$\Phi(x_n) \leqslant \Psi(x_n) \leqslant \Psi(c), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teraz $n \longrightarrow +\infty$ i korzystamy z ciągłości Φ.

Przypuśćmy, że $c < b$. Mamy dwa możliwe przypadki:

• $c = a_{n_0} \in S$. Z ciągłości Φ wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $\Phi(x) \leqslant \Phi(c) + \varepsilon/2^{n_0}$ dla $x \in [c, c+\delta] \subset [a, b]$. Wtedy, dla $x \in (c, c+\delta]$ mamy

$$\Phi(x) \leqslant \Psi(c) + \frac{\varepsilon}{2^{n_0}} \leqslant \Psi(x).$$

Wynika stąd, że $[c, c+\delta] \subset I$; sprzeczność.

• $c \notin S$. Niech

$$f(c+h) = f(c) + f'_+(c)h + \alpha(h)h, \quad \varphi(c+h) = \varphi(c) + \varphi'_+(c)h + \beta(h)h,$$

gdzie $\lim\limits_{h\to 0+} \alpha(h) = 0$ i $\lim\limits_{h\to 0+} \beta(h) = 0$. Wynika stąd, że dla małych $h > 0$ mamy

$$\begin{aligned}\Phi(c+h) &= \|f(c+h) - f(a)\| - (\varphi(c+h) - \varphi(a)) - \varepsilon(c+h-a) - \varepsilon \\ &\leqslant \Phi(c) + \|f(c+h) - f(c)\| - (\varphi(c+h) - \varphi(c)) - \varepsilon h \\ &\leqslant \Psi(c) + \|f'_+(c)\|h + \|\alpha(h)\|h - \varphi'_+(c)h - \beta(h)h - \varepsilon h \\ &\leqslant \Psi(c+h) + \big(\|\alpha(h)\| - \beta(h) - \varepsilon\big)h.\end{aligned}$$

W takim razie $[c, c+h] \subset I$ dla małych $h > 0$; sprzeczność.

W przypadku pochodnych lewostronnych definiujemy

$$g : [a,b] \longrightarrow E, \quad \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g(x) := -f(a+b-x), \quad \psi(x) := -\varphi(a+b-x).$$

Bez trudu sprawdzamy, że $g'_+(x) = f'_-(a+b-x)$ i $\psi'_+(x) = \varphi'_-(a+b-x)$ oraz $\|g'_+(x)\| \leqslant \psi'_+(x)$ dla $x \in [a,b] \setminus S'$, gdzie $S' := a+b-S$. Stąd, na podstawie wersji z pochodnymi prawostronnymi, mamy

$$\|f(b) - f(a)\| = \|-g(a) + g(b)\| \leqslant \psi(b) - \psi(a) = -\varphi(a) + \varphi(b). \qquad \square$$

Wniosek 5.4.3 (por. Twierdzenie 5.2.10)**.** *Jeżeli $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $\varphi'_+(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$, to φ jest niemalejąca. Wynik pozostaje prawdziwy dla pochodnych lewostronnych. W szczególności, jeżeli $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $\varphi'_+(x) = 0$ dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$, to $\varphi \equiv$ const.*

Dowód. Niech $x', x'' \in [a,b]$, $x' < x''$. Stosujemy twierdzenie o przyrostach skończonych dla $f := 0$ i $\varphi|_{[x',x'']}$. $\square$

Wniosek 5.4.4. *Jeżeli $f : [a,b] \longrightarrow E$ jest odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'_+(x)$ istnieje dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$, to dla dowolnego $\ell \in E$ mamy*

$$\|f(b) - f(a) - \ell(b-a)\| \leqslant \sup\{\|f'_+(x) - \ell\| : x \in [a,b] \setminus S\}(b-a).$$

W szczególności,

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup\{\|f'_+(x)\| : x \in [a,b] \setminus S\}(b-a).$$

Wynik pozostaje prawdziwy dla pochodnych lewostronnych.

Dowód. Zastępując f przez $[a,b] \ni x \longmapsto f(x) - \ell x$, redukujemy twierdzenie do $\ell = 0$.

Jeżeli $M := \sup\{\|f'_+(x)\| : x \in [a,b] \setminus S\} < +\infty$, to stosujemy twierdzenie o przyrostach skończonych do funkcji f i $\varphi(x) := Mx$, $x \in [a,b]$. $\square$

---

(4) Ponieważ nie dysponujemy jeszcze pojęciem szeregu, sumę $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{2^n}$ (dla $A \subset \mathbb{N}$) rozumiemy jako $\sup\Big\{\sum\limits_{n\in B} \frac{1}{2^n} : B \subset A,\ B \text{ skończony}\Big\}$. Wiemy, że $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$, więc funkcja Ψ jest poprawnie określona.

Wniosek 5.4.5. *Jeżeli $f : [a,b] \longrightarrow E$ jest odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'_+(x)$ istnieje dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$, oraz $\|f'_+(x)\| \leqslant M$, $x \in [a,b] \setminus S$, to*

$$\|f(x') - f(x'')\| \leqslant M|x' - x''|, \quad x', x'' \in [a,b],$$

tzn. f spełnia warunek Lipschitza ze stałą M.

Wynik pozostaje prawdziwy dla pochodnych lewostronnych.

Wniosek 5.4.6. *Niech $f : P \longrightarrow E$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w $P \setminus \{a\}$ dla pewnego $a \in P$. Jeżeli $\ell := \lim\limits_{x \to a} f'(x)$ istnieje, to $f'(a)$ istnieje i $f'(a) = \ell$.*

Dowód. Na podstawie Wniosku 5.4.4 mamy $f(a+h) = f(a) + \ell h + \alpha(h)h$, gdzie

$$\|\alpha(h)\| \leqslant \sup\{\|f'(x) - \ell\| : x \in (a, a+h]\} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

5.5. Pochodne wyższych rzędów

Definicja 5.5.1. Niech $f : P \longrightarrow E$, $a \in P$ i załóżmy, że $f'(x)$ istnieje dla $x \in U \subset P$, gdzie U jest pewnym relatywnym otoczeniem punktu a. Wtedy można rozważać *drugą pochodną funkcji f w punkcie a*: $f''(a) := (f')'(a)$. Ogólnie, jeżeli $f^{(n-1)}(x)$ istnieje dla $x \in U$, to możemy rozważać *n-tą pochodną funkcji f w punkcie a*: $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$. Niech

$$\mathcal{D}^n(P,E;a) : = \{f : P \longrightarrow E : f^{(n)}(a) \text{ istnieje}\}, \quad a \in P,$$

$$\mathcal{D}^n(P,E) : = \bigcap_{a \in P} \mathcal{D}^n(P,E;a) = \{f : P \longrightarrow E : f^{(n)}(a) \text{ istnieje dla dowolnego } a \in P\},$$

$$\mathcal{C}^n(P,E) : = \{f \in \mathcal{D}^n(P,E) : f^{(n)} \in \mathcal{C}(P,E)\}, \quad \mathcal{C}^0(P,E) := \mathcal{C}(P,E), \quad \mathcal{C}^\infty(P,E) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}^n(P,E);$$

$\mathcal{D}^n(P,E;a)$, $\mathcal{D}^n(P,E)$ *to oznaczenia niestandardowe*. Jak zwykle, $\mathcal{D}^n(P;a) := \mathcal{D}^n(P,\mathbb{R};a)$, $\mathcal{D}^n(P) := \mathcal{D}(P,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(P) := \mathcal{C}^n(P,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(P) := \mathcal{C}^\infty(P,\mathbb{R})$.

Obserwacja 5.5.2 (Ćwiczenie)**.** (a) $\mathcal{D}^{n+1}(P,E) \subset \mathcal{C}^n(P,E) \subset \mathcal{D}^n(P,E) \subset \mathcal{C}^{n-1}(P,E)$.

(b) $\mathcal{C}^\infty(P,E) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}^n(P,E)$.

(c) $f, g \in \mathcal{D}^n(P,E;a) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{D}^n(P,E;a)$ oraz $(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$.

(d) $f, g \in \mathcal{D}^n(P,E) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{D}^n(P,E)$.

(e) $f, g \in \mathcal{C}^n(P,E) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{C}^n(P,E)$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

(f) Dla funkcji $f_\ell : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_\ell(x) := \begin{cases} x^\ell \sin(\frac{1}{x}), & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0,$$

mamy:

- $f_\ell \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*)$, $\ell \in \mathbb{N}_0$,
- $f_0 \notin \mathcal{C}(\mathbb{R})$,
- $f_{2k-1} \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{D}^k(\mathbb{R})$,
- $f_{2k} \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.

(g) Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x}, & \text{jeżeli } x > 0 \end{cases}.$$

Wtedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Zauważmy, że $f^{(k)}(0) = 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$.

(h) Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } |x| \geqslant 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{jeżeli } |x| < 1 \end{cases}.$$

Wtedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Zauważmy, że $f^{(k)}(\pm 1) = 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$.

(i) Z (g) i (h) wynika, że dla dowolnego przedziału $(a,b) \subset \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ taka, że $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = (a,b)$.

(j) Wiadomo, że dla każdego zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}$, zbiór $\mathbb{R} \setminus F$ jest sumą co najwyżej przeliczalnej rodziny parami rozłącznych przedziałów otwartych. Stąd, na podstawie (i), dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ taka, że $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = F$, $f^{(j)}(x) = 0$ dla dowolnych $x \in F$ oraz $j \in \mathbb{N}$.

(k) Dla dowolnych $x_0 \in \mathbb{R}, c_0, \dots, c_n \in E$ istnieje wielomian $p : \mathbb{R} \longrightarrow E$ stopnia $\leqslant n$ taki, że $p^{(j)}(x_0) = c_j$, $j = 0, \dots, n$.

(l) Niech $f \in \mathcal{C}^n(P, E)$, gdzie $P \in \{[a,b], [a,+\infty), (-\infty, b]\}$. Wtedy (na podstawie (k)) $\mathcal{C}^n(P,E) = \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, E)|_P$.

Ćwiczenie 5.5.3. (a) Dla dowolnych $0 < a < b < +\infty$ skonstruować funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1])$ taką, że

$$f(x) \begin{cases} = 1, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant a \\ > 0, & \text{jeżeli } a < x < b \\ = 0, & \text{jeżeli } x \geqslant b \end{cases}.$$

(b) Dla dowolnych $-\infty < a < p < q < b < +\infty$ skonstruować funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ taką, że

$$f(x) \begin{cases} = 0, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant a \\ = 1, & \text{jeżeli } p \leqslant x \leqslant q \\ = 0, & \text{jeżeli } x \geqslant b \end{cases}.$$

Twierdzenie 5.5.4 (Wzór Leibniza (5)). *Niech $B \in \mathcal{L}(F_1, F_2; E)$. Jeżeli $f_j \in \mathcal{D}^k(P, F_j; a)$, $j =, 1, 2$, to $B(F_1, f_2) \in \mathcal{D}^k(P, E; a)$ oraz*

$$(B(f_1, f_2))^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(f_1^{(k)}(a), f_2^{(n-k)}(a)).$$

W konsekwencji,

- *jeżeli $f_j \in \mathcal{D}^n(P, F_j)$, $j = 1, 2$, to $B(f_1, f_2) \in \mathcal{D}^n(P, E)$,*
- *jeżeli $f_j \in \mathcal{C}^n(P, F_j)$, $j = 1, 2$, to $B(f_1, f_2) \in \mathcal{C}^n(P, E)$.*

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(P, \mathbb{K}; a)$, $g \in \mathcal{D}^k(P, E; a)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}^k(P, E; a)$ oraz

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Ponadto,

- *jeżeli $f \in \mathcal{D}^n(P, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{D}^n(P, E)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}^n(P, E)$,*
- *jeżeli $f \in \mathcal{C}^n(P, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{C}^n(P, E)$, to $f \cdot g \in \mathcal{C}^n(P, E)$.*

Dowód. Wynik jest nam znany dla $n = 1$ (Twierdzenie 5.1.6(b)).

$n \rightsquigarrow n+1$: Mamy $(B(f_1, f_2))'(x) = B(f_1'(x), f_2(x)) + B(f_1(x), f_2'(x))$, $x \in U$, gdzie U jest relatywnym otoczeniem punktu a. Jeżeli $f_j \in \mathcal{D}^{n+1}(P, F_j; a)$, $j = 1, 2$, to $f_j' \in \mathcal{D}^n(P, F_j; a)$, $j = 1, 2$. Zatem z założenia indukcyjnego $B(f', g), B(f, g') \in \mathcal{D}^n(P, E; a)$. Stąd $(B(f_1, f_2))' \in \mathcal{D}^n(P, E; a)$, a więc $B(f_1, f_2) \in \mathcal{D}^{n+1}(P, E; a)$. Ponadto,

$$(B(f_1, f_2))^{(n+1)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(B(f_1^{(k+1)}(a), f_2^{(n-k)}(a)) + B(f_1^{(k)}(a), f_2^{(n+1-k)}(a)) \Big)$$

$$\overset{\text{Ćwiczenie}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B(f_1^{(k)}(a), f_2^{(n+1-k)}(a)). \qquad \square$$

Twierdzenie 5.5.5. *Niech $f : P \longrightarrow E$, $\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie Q jest przedziałem, $\varphi(Q) \subset P$, $t_0 \in Q$, $a := \varphi(t_0)$. Wtedy:*

(a) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^n(P, E; a)$ i $\varphi \in \mathcal{D}^n(Q; t_0)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^n(Q, E; t_0)$.*

(b) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^n(P, E)$ i $\varphi \in \mathcal{D}^n(Q)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^n(Q, E)$.*

(c) *Jeżeli $f \in \mathcal{C}^n(P, E)$ i $\varphi \in \mathcal{C}^n(Q)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(Q, E)$.*

---

(5) Gottfryd Leibniz (1646–1716).

Wzór na $(f\circ\varphi)^{(n)}(t_0)$ wyprowadzimy w Twierdzeniu 5.6.12.

Dowód. (a) Wynik jest nam znany dla $n=1$.

$n \rightsquigarrow n+1$: Wiemy, że $(f\circ\varphi)'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x\in U$, gdzie U jest otoczeniem punktu t_0. Jeżeli $f\in\mathcal{D}^{n+1}(P,E;a)$ i $\varphi\in\mathcal{D}^{n+1}(Q;t_0)$, to z założenia indukcyjnego $f'\circ\varphi\in\mathcal{D}^n(Q,E;t_0)$. Na podstawie wzoru Leibniza $(f'\circ\varphi)\cdot\varphi'\in\mathcal{D}^n(Q,E;t_0)$. W takim razie $f\circ\varphi\in\mathcal{D}^{n+1}(Q,E;t_0)$.

(b) wynika z (a).

(c) Dla $n=1$ wystarczy wykorzystać związek $(f\circ\varphi)' = (f'\circ\varphi)\cdot\varphi'$. Krok indukcyjny pozostawiamy jako Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 5.5.6. *Niech $U,V\subset\mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi i niech $f:U\longrightarrow V$ będzie bijekcją klasy $\mathcal{C}^n(U)$ $(1\leqslant n\leqslant+\infty)$. Wtedy jeżeli $f'(a)\neq0$ dla pewnego $a\in U$, to funkcja $g:=f^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^n$ w pewnym otoczeniu punktu $b:=f(a)$.*

Dowód. Wiemy, że f jest ściśle monotoniczna oraz g jest ciągła (Twierdzenie 4.4.19). Jeżeli $f'(a)\neq0$, to $f'(x)\neq0$ dla pewnego otoczenia punktu a. Możemy wiec założyć, że $f'(x)\neq0$ dla $x\in U$. Z Twierdzenia 5.1.8 wynika, że $g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}=h\circ f'\circ g'(y)$, $y\in V$, gdzie $h(z):=\frac{1}{z}$ $(h\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*))$. Przypuśćmy, że już wiemy, że $g\in\mathcal{C}^k(V)$ dla pewnego $k\in\{0,\dots,n-1\}$ (wiemy, że tak jest dla $k=0$). Wtedy $h\circ f'\circ g\in\mathcal{C}^k(V)$ (Twierdzenie 5.5.5), a więc $g'\in\mathcal{C}^k(V)$. Stąd $g\in\mathcal{C}^{k+1}(V)$. Indukcja kończy dowód. $\square$

5.6. Wzór Taylora

Obserwacja 5.6.1. Niech $p:\mathbb{R}\longrightarrow E$ będzie wielomianem stopnia $\leqslant n$, tzn. $p(x)=p_0+p_1x\cdots+p_nx^n$, gdzie $p_0,\dots,p_n\in E$. Niech $a\in\mathbb{R}$. Wtedy:

(a) $p_k=\frac{1}{k!}p^{(k)}(0)$, $k=0,\dots,n$ (Ćwiczenie).

(b) $p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\frac12p''(a)(x-a)^2+\dots+\frac{1}{n!}p^{(n)}(a)(x-a)^n$, $x\in\mathbb{R}$.

Istotnie, niech $q(x):=p(a+x)$. Zauważmy, że $q^{(j)}(x)=p^{(j)}(a+x)$, $j\in\mathbb{N}$. Wtedy na podstawie (a) mamy $p(a+x)=q(x)=q(0)+q'(0)x+\frac12q''(0)x^2+\dots+\frac{1}{n!}q^{(n)}(0)x^n=p(a)+p'(a)x+\frac12p''(a)x^2+\dots+\frac{1}{n!}p^{(n)}(a)x^n$, $x\in\mathbb{R}$.

Definicja 5.6.2. Niech $f\in\mathcal{D}^n(P,E;a)$, przy czym, jeżeli $n\geqslant2$, to $f^{(n-1)}(x)$ istnieje dla dowolnego $x\in U$, gdzie U jest przedziałem będącym relatywnym otoczeniem punktu a. Zdefiniujmy

$$R_n(f,a,x):=f(x)-\Big(f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n\Big),\quad x\in P.$$

Ponadto kładziemy $R_0(f,a,x)=f(x)-f(a)$, $x\in P$.

Obserwacja 5.6.3. (a) $R_n(f,a,a+h)=f(a+h)-\Big(f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n\Big)$, $h\in P-a$, czyli

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_n(f,a,a+h),\quad h\in P-a.$$

(b) $R_n(f,a,\cdot)^{(k)}(x)=R_{n-k}(f^{(k)},a,x)$, $x\in U$, $k=0,\dots,n-1$.

(c) Jeżeli $f^{(n)}(x)$ istnieje dla dowolnego $x\in U$, to $R_n(f,a,\cdot)^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)=R_0(f^{(n)},a,x)$, $x\in U$.

(d) Jeżeli $f^{(n+1)}(x)$ istnieje dla dowolnego $x\in U$, to $R_n(f,a,\cdot)^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$, $x\in U$.

Twierdzenie 5.6.4 (Wzór Taylora (6) z resztą Peano (7))**.** *Niech f będzie jak w Definicji 5.6.2. Wtedy*

$$\lim_{P-a\ni h\to0}\frac{R_n(f,a,a+h)}{h^n}=0,\quad n\in\mathbb{N},$$

czyli $R_n(f,a,a+h)=o(h^n)$ przy $P-a\ni h\longrightarrow0$ $(n\in\mathbb{N})$.

---

(6) Brook Taylor (1717–1783).
(7) Giuseppe Peano (1858–1932).

Dowód. Indukcja względem n.

Dla $n=1$ mamy definicję pochodnej: $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+R_1(f,a,a+h)$.

$n \rightsquigarrow n+1$: Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla małych $0\neq h\in U-a$ mamy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|h|^{n+1}}\|R_{n+1}(f,a,a+h)\| &= \frac{1}{|h|^{n+1}}\|R_{n+1}(f,a,a+h)-R_{n+1}(f,a,a)\|\\ &\leqslant \frac{1}{|h|^n}\sup\{\|R_{n+1}(f,a,\cdot)'(x)\| : x\in(a,a+h]\}\\ &\leqslant \frac{1}{|h|^n}\sup\{\|R_n(f',a,a+\xi)\| : \xi\in(0,h]\}\\ &\leqslant \sup\Big\{\frac{1}{|\xi|^n}\|R_n(f',a,a+\xi)\| : \xi\in(0,h]\Big\}\xrightarrow[h\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.6.5 (Jednoznaczność wzoru Taylora)**.** *Niech f będzie jak w Definicji 5.6.2 i niech $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ będzie wielomianem $\mathbb{R}\longrightarrow E$ takim, że*

$$f(a+h)=p(h)+o(h^n)\ \textit{przy}\ P-a\ni h\longrightarrow 0. \tag{†}$$

Wtedy $a_j=\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)$, $j=0,\dots,n$.

Dowód. Ze wzoru Taylora z resztą Peano mamy

$$f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n=a_0+a_1h+a_2h^2+\dots+a_nh^n+\alpha(h)h^n,$$

przy czym $\lim\limits_{P-a\ni h\to 0}\alpha(h)=0$. Przy $h\longrightarrow 0$ wnioskujemy stąd natychmiast, że $f(a)=a_0$. W konsekwencji

$$f'(a)+\frac{1}{2!}f''(a)h+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^{n-1}=a_1+a_2h+\dots+a_nh^{n-1}+\alpha(h)h^{n-1},$$

co przy $h\longrightarrow 0$ daje $f'(a)=a_1$. Powtarzamy rozumowanie (Ćwiczenie). □

Obserwacja 5.6.6. Dla $n=1$ wzór (†) jest oczywiście równoważny istnieniu $f'(a)$. Dla $n\geqslant 2$ tak być nie musi. Np.

$$f(x):=\begin{cases}x^{n+1}\sin\frac{1}{x^{n+1}}, & \text{jeżeli } x\neq 0\\ 0, & \text{jeżeli } x=0\end{cases};$$

wtedy dla $a:=0$ wzór (†) zachodzi z $a_0=\dots=a_n=0$, ale $f''(0)$ nie istnieje. Istotnie, $f'(0)=0$, $f'(x)=(n+1)\big(x^n\sin(1/x^{n+1})-(1/x)\cos(1/x^{n+1})\big)$ dla $x\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ nie istnieje.

Twierdzenie 5.6.7 (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^n$)**.** *Niech $P=[a,b]\subset\mathbb{R}$ i niech $f\in\mathcal{C}^n(P,E)$. Wtedy*

$$\lim_{\delta\to 0+}\Big(\sup\Big\{\frac{\|R_n(f,x,y)\|}{|x-y|^n} : x,y\in P,\ 0<|x-y|\leqslant\delta\Big\}\Big)=0.$$

Dowód. Indukcja ze względu na n. Przypadek $n=1$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych (Wniosek 5.4.4):

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{\frac{\|R_1(f,a,a+h)\|}{|h|} : a,a+h\in P,\ 0<|h|\leqslant\delta\Big\}\\ &=\sup\Big\{\frac{\|f(a+h)-f(a)-f'(a)h\|}{|h|} : a,a+h\in P,\ 0<|h|\leqslant\delta\Big\}\\ &\leqslant\sup\{\|f'(x)-f'(a)\| : a,a+h\in P,\ x\in[a,a+h],\ 0<|h|\leqslant\delta\}\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

$n \rightsquigarrow n+1$: Podobnie, jak w dowodzie Twierdzenia 5.6.4 mamy:

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{\frac{\|R_{n+1}(f,a,a+h)\|}{|h|^{n+1}} : a,a+h\in P,\ 0<|h|\leqslant\delta\Big\}\\ &\qquad\leqslant\sup\Big\{\frac{\|R_n(f',a,a+\xi)\|}{|\xi|^n} : a,a+\xi\in P,\ 0<|\xi|\leqslant\delta\Big\}\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.6.8 (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{D}^{n+1}$)**.** *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^{n+1}(P, E)$ oraz*

$$\|f^{(n+1)}(x)\| \leqslant M, \quad x \in P,$$

to

$$\|R_n(f, a, a+h)\| \leqslant \frac{M|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a \in P,\ h \in P-a.$$

Dowód. Indukcja ze względu na n. Przypadek $n = 0$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych.

$n \rightsquigarrow n+1$: Ustalmy $a \in P$. Mamy

$$\|R_n(f', a, a+h)\| \leqslant \frac{M|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad h \in P-a.$$

Niech

$$g(h) := R_{n+1}(f, a, a+h), \quad \varphi(h) := \frac{Mh^{n+2}}{(n+2)!}, \quad h \in Q := (P-a) \cap \mathbb{R}_+.$$

Wobec poprzedniej nierówności mamy $\|g'\| \leqslant \varphi'$ na Q. Stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych,

$$\|R_{n+1}(f, a, a+h)\| = \|g(h) - g(0)\| \leqslant \varphi(h) - \varphi(0) = \frac{M|h|^{n+2}}{(n+2)!}, \quad h \in Q.$$

W analogiczny sposób traktujemy przypadek $h < 0$ ($\varphi(h) := -M(-h)^{n+2}/(n+2)!$, $h \in (P-a) \cap \mathbb{R}_-$). $\square$

Ćwiczenie 5.6.9. Pokazać, że jeżeli $f \in \mathcal{D}^{n+1}(P, E)$ oraz $|f^{(n+1)}| \leqslant M$, to z Twierdzenia 5.6.8 wynika Twierdzenie 5.6.7.

Twierdzenie 5.6.10 (Wzór Taylora z resztą Schlömilcha (8))**.** *Załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^{n+1}(P)$, $a \in P$, $h \in P-a$, $p > 0$. Wtedy istnieje $\theta = \theta_n(a, h, p) \in (0, 1)$ takie, że*

$$R_n(f, a, a+h) = \frac{1}{n!p} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^{n+1-p} h^{n+1}.$$

W przypadku $p = n+1$ dostajemy resztę Lagrange'a:

$$R_n(f, a, a+h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) h^{n+1}.$$

W przypadku $p = 1$ dostajemy resztę Cauchy'ego:

$$R_n(f, a, a+h) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^n h^{n+1}.$$

Dowód. Ustalamy a i $h \in P-a$, $h \neq 0$. Dla uproszczenia przyjmijmy, że $h > 0$ (przypadek $h < 0$ jest analogiczny — Ćwiczenie). Niech $b = a+h$,

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) := f(b) - \Big(f(t) + f'(t)(b-t) + \frac{1}{2} f''(t)(b-t)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(b-t)^n\Big),\\
&\psi(t) := (b-t)^p, \quad a \leqslant t \leqslant b.
\end{aligned}$$

Wtedy $\varphi(a) = R_n(f, a, a+h)$, $\varphi(b) = 0$, $\psi(a) = h^p$, $\psi(b) = 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -\Big(f'(t) - f'(t) + f''(t)(b-t) - f''(t)(b-t) + \frac{1}{2} f'''(t)(b-t)^2 + \dots\\
&\quad - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\Big) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(b-t)^n,\\
\psi'(t) &= -p(b-t)^{p-1}, \quad a \leqslant t < b.
\end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej istnieje $\theta \in (0, 1)$ taka, że

$$\frac{R_n(f, a, a+h)}{h^p} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)} = \frac{\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^n h^n}{p(1-\theta)^{p-1} h^{p-1}},$$

(8) Oscar Xavier Schlömilch (1823–1901).

a stąd

$$R_n(f,a,a+h) = \frac{1}{n!p} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^{n+1-p} h^{n+1}. \qquad \square$$

Przykład 5.6.11 (Przykłady użycia wzoru Taylora z resztą Lagrange'a dla $a=0$). (a) $f(x) = e^x$: Wobec wzoru Taylora mamy

$$e^h = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\Big) + R_n(\exp,0,h), \quad h \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

przy czym $R_n(\exp,0,h) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta h} h^{n+1}$, gdzie $\theta = \theta(h,n) \in (0,1)$. Stąd, dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ dostajemy $|R_n(\exp,0,h)| \leqslant \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|h|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Ćwiczenie). Oznacza to, że

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{(por. Twierdzenie 2.3.1(h))}\ (^9)\ .$$

(b) $f(x) = \sin x$: Zauważmy, że $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$. Wobec wzoru Taylora mamy

$$\sin h = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} h^{2k+1}\Big) + R_{2n-1}(\sin,0,h),$$

przy czym $R_{2n-1}(\sin,0,h) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin(\theta h) h^{2n}$, gdzie $\theta = \theta(h,n) \in (0,1)$. Stąd, dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ dostajemy $|R_{2n-1}(\sin,0,h)| \leqslant \frac{|h|^{2n}}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Oznacza to, że

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) (Ćwiczenie) $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(d) $f(x) := \ln(1+x)$, $x > -1$. Wtedy $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $x > -1$, $k \in \mathbb{N}$, a stąd:

$$\ln(1+h) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} h^k}{k}\Big) + R_n(f,0,h),$$

przy czym $R_n(f,0,h) = \frac{(-1)^n h^{n+1}}{(n+1)(1+\theta h)^{n+1}}$, gdzie $\theta = \theta(h,n) \in (0,1)$. Stąd, dla dowolnego $|h| < \frac{1}{2}$ dostajemy $|R_n(f,0,h)| \leqslant \frac{1}{n+1}\big(\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Oznacza to, że

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \quad |x| < \tfrac{1}{2}.$$

Uwaga: Można pokazać, że $R_n(f,0,h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dla $|h| < 1$ (zob. Przykład 7.3.4(c)), a więc powyższe przedstawienie funkcji $x \longmapsto \ln(1+x)$ zachodzi dla $|x| < 1$.

(e) $f(x) := (1+x)^\alpha$, $x > -1$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$: Mamy $f^{(k)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} = k!\binom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k}$, a stąd

$$(1+h)^\alpha = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} h^k\Big) + R_n(f,0,h),$$

przy czym $R_n(f,0,h) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta h)^{\alpha-n-1} h^{n+1}$, gdzie $\theta = \theta(h,n) \in (0,1)$. Stąd, dla dowolnego $|h| < \frac{1}{2}$ dostajemy $|R_n(f,0,h)| \leqslant \big|\binom{\alpha}{n+1}(1+\theta h)^\alpha\big|\big(\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1}$. Aby pokazać, że $R_n(f,0,h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ wystarczy

$(^9)$ Pojęcie szeregu $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ zostanie formalnie wprowadzone w Definicji 6.1.1.

udowodnić, że $\binom{\alpha}{n+1}\big(\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Wiemy, że $\sqrt[n]{\big|\binom{\alpha}{n}\big|} \longrightarrow 1$ (Przykład 2.4.3(c)). Ustalmy $|h| < \frac{1}{2}$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, ze $(1+\varepsilon)\frac{|h|}{1-|h|} < 1$. Wtedy dla $n \geqslant N(\varepsilon)$ mamy $\big|\binom{\alpha}{n+1}\big(\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1}\big| \leqslant \big((1+\varepsilon)\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Oznacza to, że

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k, \quad |x| < \tfrac{1}{2}.$$

Uwaga: Można pokazać, że $R_n(f,0,h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dla $|h| < 1$, a więc powyższe przedstawienie funkcji $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ zachodzi dla $|x| < 1$.

Jeżeli $\alpha \in \mathbb{N}_0$, to oczywiście $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 5.6.12 (Wzór na pochodną złożenia)**.** *Niech $f \in \mathcal{D}^n(P,E;a)$, $\varphi \in \mathcal{D}^n(Q;t_0)$, $\varphi(Q) \subset P$, $\varphi(t_0) = a$. Wtedy*

$$(f\circ\varphi)^{(n)}(t_0) = \sum_{\alpha\in\Pi_n}\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_n)}(a)\Big(\frac{\varphi'(t_0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(n)}(t_0)}{n!}\Big)^{\alpha_n},$$

gdzie $\Pi_n := \{\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n : \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n\}$.

Dowód. Wiemy, że $f\circ\varphi \in \mathcal{D}^n(Q,E;t_0)$ (Twierdzenie 5.5.5). Wobec Twierdzenia 5.6.5, wystarczy więc pokazać, że $(f\circ\varphi)(t_0+t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + o(t^n)$ przy $t \longrightarrow 0$, gdzie

$$a_s := \sum_{\alpha\in\Pi_s}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_s)}(a)\Big(\frac{\varphi'(t_0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(s)}(t_0)}{s!}\Big)^{\alpha_s}, \quad s = 0,\dots,n.$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\varphi_j := \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(t_0), \quad f_j := \frac{1}{j!}f^{(j)}(a), \quad j = 0,\dots,n.$$

Wtedy

$$a_s = \sum_{\alpha\in\Pi_s}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}f_{\alpha_1+\dots+\alpha_s}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_s^{\alpha_s}, \quad s = 0,\dots,n.$$

Zauważmy, że jeżeli $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{N}_0$ oraz $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = s$, to $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Stąd

$$a_s = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+n\alpha_n=s}}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}f_{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}, \quad s = 0,\dots,n.$$

Wiemy, że

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{n}f_ih^i + \alpha(h)h^n, \quad \varphi(t_0+t) = \sum_{j=0}^{n}\varphi_jt^j + \beta(t)t^n,$$

gdzie $\lim\limits_{h\to0}\alpha(h) = 0$, $\lim\limits_{t\to0}\beta(t) = 0$. Przechodzimy do obliczeń:

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)(t_0+t) &= \sum_{i=0}^{n}f_i\Big(\sum_{j=1}^{n}\varphi_jt^j + \beta(t)t^n\Big)^i + \alpha\big(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0)\big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\varphi_jt^j + \beta(t)t^n\Big)^n\\ &= \sum_{i=0}^{n}f_i\Big(\sum_{j=1}^{n}\varphi_jt^j\Big)^i + o(t^n) = \sum_{i=0}^{n}f_i\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=i}}\frac{i!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\ \varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}t^{\alpha_1+2\alpha_2+\dots+n\alpha_n} + o(t^n)\\ &= \sum_{s=0}^{n}\Big(\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+n\alpha_n=s}}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}f_{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}\Big)t^s + o(t^n).\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.6.13 (Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)**.** *Załóżmy, że $a \in \operatorname{int} P$, $f \in \mathcal{D}^n(P;a)$ oraz $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Wtedy:*

(i) *Jeżeli n jest nieparzyste, to f nie posiada w punkcie a ekstremum lokalnego.*

(ii) *Jeżeli n jest parzyste, to f ma w punkcie a silne ekstremum lokalne. Dokładniej, jeżeli $f^{(n)}(a) < 0$, to f ma w punkcie a silne maksimum lokalne, zaś jeżeli $f^{(n)}(a) > 0$, to f ma w punkcie a silne minimum lokalne.*

Dowód. Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano otrzymujemy (dla małych $\delta > 0$):

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \alpha(h)h^n = f(a) + \beta(h)h^n, \quad |h| < \delta,$$

gdzie $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, zaś $\beta(h)$ jest tego samego znaku, co $f^{(n)}(a)$. □

Przykład 5.6.14. Niech $f(x) := \frac{x^2}{2} + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że zachodzą równości $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ oraz $f^{(4)}(0) = 1 > 0$, a zatem funkcja f ma w punkcie $x = 0$ silne minimum lokalne.

5.7. Różniczkowanie ciągu wyraz po wyrazie

Twierdzenie 5.7.1 (Twierdzenie o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie)**.** *Niech E będzie przestrzenią Banacha, niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczonym przedziałem nieredukującym się do punktu, $k \in \mathbb{N}$ i niech $f_n \in \mathcal{D}^k(P,E)$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że:*
- $f_n^{(k)} \longrightarrow g_k$ *jednostajnie na P,*
- *istnieją punkty $c_0, \dots, c_{k-1} \in P$ takie, że ciąg $(f_n^{(j)}(c_j))_{n=1}^\infty$ jest zbieżny.*

Wtedy:
- $f_n^{(j)} \longrightarrow g_j$ *jednostajnie na P, $j = 0, \dots, k-1$,*
- $g_0 \in \mathcal{D}^k(P)$,
- $g_0^{(j)} \equiv g_j$, *czyli* $(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)^{(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.

Przykład 5.7.2. (a) Założenie, że P jest ograniczony jest istotne: Niech $f_n(x) := (x + \frac{1}{n})^2$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f_n' \longrightarrow 2x$ jednostajnie na $\mathbb{R}$, ale $f_n \longrightarrow x^2$ tylko lokalnie jednostajnie na $\mathbb{R}$ ($\sup\{|(x+\frac{1}{n})^2 - x^2| : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$).

(b) Niech $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f_n \longrightarrow 0$ jednostajnie na $\mathbb{R}$, ale ciąg funkcyjny $(f_n')_{n=1}^\infty$ nie jest nawet zbieżny punktowo.

Dowód Twierdzenia 5.7.1. Zastosujemy indukcję względem k.

$k = 1$: Dla $m, n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy $F_{n,m} := f_m - f_n$. Odnotujmy, że $F_{n,m} \in \mathcal{D}(P,E)$ oraz $F_{n,m}' = f_m' - f_n'$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ciąg $(f_n')_{n=1}^\infty$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego. Zatem istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych $m, n \geqslant n_0$ i $x \in P$ mamy $\|F_{n,m}'(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\operatorname{diam} P}$ oraz $\|F_{n,m}(c_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. W takim razie, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla dowolnych $m, n \geqslant n_0$ i $x \in P$, mamy

$$\|F_{n,m}(x)\| \leqslant \|F_{n,m}(x) - F_{n,m}(c_0)\| + \|F_{n,m}(c_0)\| \leqslant \sup\{\|F_{n,m}'(\xi)\| : \xi \in [x, c_0]\} \operatorname{diam} P + \tfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Oznacza to, że ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego w P, zatem jest zbieżny jednostajnie na P.

Ustalmy teraz $x_0 \in P$. Mamy

$$\frac{g_0(x_0+h) - g_0(x_0)}{h} - \lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - f_n'(x_0)\Big) =: \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(h),$$
$$h \in P - x_0,\ h \neq 0.$$

Połóżmy dodatkowo $\varphi_n(0) := 0$. Wtedy $\varphi_n \in \mathcal{C}(P - x_0, E; 0)$. Jeżeli udowodnimy, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie w $P - x_0$, to na podstawie Twierdzenia 4.4.1 jego granica będzie ciągła w $h = 0$, co zakończy dowód.

Sprawdzimy jednostajny warunek Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że dla dowolnego $m, n \geqslant n_0$ i $x \in P$ mamy $\|F_{n,m}'(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Teraz dla dowolnych $n, m \geqslant n_0$, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy

$$\|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)\| = \Big\|\frac{F_{n,m}(x_0+h) - F_{n,m}(x_0)}{h} - F_{n,m}'(x_0)\Big\|$$
$$\leqslant \sup\{\|F_{n,m}'(\xi) - F_{n,m}'(x_0)\| : \xi \in [x_0, x_0+h]\} \leqslant \varepsilon, \quad h \in P - x_0.$$

$k-1 \rightsquigarrow k$: Stosujemy przypadek $k=1$ do funkcji $h_n := f_n^{(k-1)}$. Wiemy, że ciąg $(h_n')_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji g_k oraz, ciąg $(h_n(c_{k-1}))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Z przypadku $k=1$ wynika, że ciąg $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $h_0 \in \mathcal{D}(P)$ oraz $h_0' = g_k$. Teraz możemy skorzystać z założenia indukcyjnego (Ćwiczenie). □

Definicja 5.7.3. Niech $\mathcal{D}_b^k(P,E) := \{f \in \mathcal{D}^k(P,E) : f^{(j)} \in \mathcal{B}(P,E), j=1,\dots,k\}$, $\mathcal{C}_b^k(P,E) := \mathcal{C}^k(P,E) \cap \mathcal{D}_b^k(P,E)$. W przestrzeni wektorowej $\mathcal{D}_b^k(P,E)$ wprowadzamy normę (Ćwiczenie) $\|f\|_{P,k} := \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_P = \sum_{j=0}^{k} \sup\{\|f^{(j)}(x)\| : x \in P\}$ (zob. Obserwacja 4.6.10(a)).

Obserwacja 5.7.4. (a) Norma $\mathcal{D}_b^k(P,E) \ni f \longmapsto \max\{\|f^{(j)}\|_P : j=0,\dots,k\}$ jest równoważna normie $\|\ \|_{P,k}$.

(b) Jeżeli P jest przedziałem zwartym, to $\mathcal{C}_b^k(P,E) = \mathcal{C}^k(P,E)$.

(c) $\mathcal{C}_b^k(P,E)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{D}_b^k(P,E)$.

(d) Jeżeli E jest przestrzenią Banacha, to $(\mathcal{D}_b^k(P,E), \|\ \|_{P,k})$ jest przestrzenią Banacha i w konsekwencji $(\mathcal{C}_b^k(P,E), \|\ \|_{P,k})$ jest również przestrzenią Banacha.

Istotnie, niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{D}_b^k(P,E), \|\ \|_{P,k})$. Wtedy $(f_n^{(j)})_{n=1}^{\infty})$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(P,E)$ dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k\}$. Na podstawie Obserwacji 4.6.10(b) istnieje funkcja $g_j \in \mathcal{B}(P,E)$ taka, że $f_n^{(j)} \longrightarrow g_j$ jednostajnie na P, $j=0,\dots,k$. Korzystając z Twierdzenia 5.7.1 wnioskujemy, że $f := g_0 \in \mathcal{D}^k(P,E)$ oraz $g_j = f^{(j)}$, $j=1,\dots,k$. Stąd $f_n \longrightarrow f$ w $(\mathcal{D}_b^k(P,E), \|\ \|_{P,k})$.

5.7.1. Funkcje różniczkowalne spełniające warunek Höldera.

Definicja 5.7.5. Dla $k \in \mathbb{N}_0$ i $0 < \alpha \leqslant 1$, niech $\mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E) := \{f \in \mathcal{D}_b^k(P,E) : f^{(k)} \in \mathcal{H}^{\alpha}(P,E)\} \subset \mathcal{C}_b^k(P,E)$ (zob. § 4.6.1). W przestrzeni wektorowej $\mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$ wprowadzamy normę $\|f\|_{P,k,\alpha} := \|f\|_{P,k} + |f^{(k)}|_{\alpha}$ (Ćwiczenie).

Obserwacja 5.7.6 (Ćwiczenie)**.** (a) Jeżeli P jest ograniczony, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy $\mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E) \subset \mathcal{H}^{k,\beta}(P,E)$ oraz $\|\ \|_{P,k,\beta} \leqslant C\|\ \|_{P,k,\alpha}$, gdzie $C := \max\{1, (\operatorname{diam} P)^{\alpha-\beta}\}$.

(b) Dla $f \in \mathcal{B}(P,E)$ mamy: $f \in \mathcal{H}^{k+1,\alpha}(P,E) \iff f' \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$. Ponadto, $\|f\|_{P,k+1,\alpha} = \|f\|_P + \|f'\|_{P,k,\alpha}$.

(c) $\mathcal{D}_b^{k+1}(P,E) \subset \mathcal{H}^{k,1}(P,E)$ oraz $\|f\|_{P,k,1} \leqslant \|f\|_{P,k+1}$ (wystarczy skorzystać z twierdzenia o przyrostach skończonych).

(d) Jeżeli E jest przestrzenią Banacha, to $(\mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E), \|\ \|_{P,k,\alpha})$ jest przestrzenią Banacha.

(e) Jeżeli $\sup\{\frac{\|f(t)-f(u)\|}{|t-u|^{\alpha}} : t,u \in P,\ t \neq u\} < +\infty$ dla $\alpha > 1$, to $f = \text{const}$.

Twierdzenie 5.7.7. *Jeżeli że P jest ograniczony, $f \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,\mathbb{K})$ i $g \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$, to $f \cdot g \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$.*

Dowód. Dowód indukcyjny względem k (przy dowolnych pozostałych elementach). Przypadek $k=0$ wynika z Twierdzenia 4.6.12(a).

$k \rightsquigarrow k+1$: Wobec Obserwacji 5.7.6(b) wystarczy wykazać, że $(fg)' \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$. Wynika to natychmiast z równości $(f,g)' = f'g + fg'$ oraz z założenia indukcyjnego (wszystkie funkcje po prawej stronie są klasy $\mathcal{H}^{k,\alpha}$). □

Ćwiczenie 5.7.8. Niech $P, Q \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami ograniczonymi. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{H}^{k,\beta}(Q,\mathbb{R})$, $\varphi(Q) \subset P$ i $f \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{H}^{k,\boxed{?}}(Q,E)$ (por. Twierdzenie 4.6.12(b)).

Twierdzenie 5.7.9 (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{H}^{k,\alpha}$)**.** *Jeżeli $f \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$, to*

$$\frac{\|R_k(f,a,a+h)\|}{|h|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k)}|_{\alpha}, \quad [a,a+h] \subset P.$$

W szczególności, jeżeli $P = [a,b]$, to

$$\lim_{\delta \to 0+} \Big(\sup \Big\{ \frac{\|R_k(f,x,y)\|}{|x-y|^{k+\beta}} : x,y \in P,\ 0 < |x-y| \leqslant \delta \Big\} \Big) = 0, \quad 0 \leqslant \beta < \alpha.$$

Dowód. Indukcja względem k (przy dowolnych pozostałych elementach). Dla $k=0$ wystarczy skorzystać z definicji $|f|_{\alpha}$. Dla dowodu $k \rightsquigarrow k+1$ mamy:

$$\frac{\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|}{|h|^{k+1+\alpha}} \leqslant \frac{\sup\{\|R'_{k+1}(f,a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\}|h|}{|h|^{k+1+\alpha}}$$
$$= \frac{\sup\{\|R_k(f',a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\}}{|h|^{k+\alpha}} \leqslant \frac{\sup\{|(f')^{(k)}|_\alpha |\xi|^{k+\alpha} : \xi \in (0,h]\}}{|h|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k+1)}|_\alpha. \quad \square$$

5.8. Funkcje półciągłe

Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną.

Definicja 5.8.1. Powiemy, że funkcja $u : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest *półciągła z góry* na X, jeżeli dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : u(x) < t\}$ jest otwarty. Zbiór wszystkich funkcji półciągłych z góry na X będziemy oznaczać przez $\mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Powiemy, że u jest *półciągła z dołu* na X ($u \in \mathcal{C}^{\downarrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$), jeżeli $-u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Dla dowolnego przedziału $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$ niech $\mathcal{C}^{\uparrow}(X, \Delta) := \{u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) : u(X) \subset \Delta\}$. Podobnie definiujemy $\mathcal{C}^{\downarrow}(X, \Delta)$.

Obserwacja 5.8.2. Jeżeli $A \subset X$ jest zbiorem domkniętym, to jego funkcja charakterystyczna $\chi_{A,X}$ jest półciągła z góry. Jeżeli $A \subset X$ jest zbiorem otwartym, to $\chi_A \in \mathcal{C}^{\downarrow}(X)$.

Obserwacja 5.8.3. (a) Funkcja $u : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest półciągła z dołu na X, jeżeli dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : u(x) > t\}$ jest otwarty.

(b) Dla dowolnych przedziałów $\Delta, \Delta' \subset \overline{\mathbb{R}}$, dla dowolnej ściśle rosnącej bijekcji $\varphi : \Delta \longrightarrow \Delta'$ i dla dowolnej funkcji $u : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mamy:

$$u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \Delta) \Longleftrightarrow \varphi \circ u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \Delta').$$

W szczególności, $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) \Longleftrightarrow \operatorname{arctg} u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.

Istotnie, zapiszmy $\overline{\mathbb{R}}$ w postaci sumy trzech rozłącznych przedziałów

$$\overline{\mathbb{R}} = L \cup \Delta' \cup R,$$

gdzie L jest przedziałem „na lewo” od Δ', zaś R — przedziałem „na prawo” od Δ'; nie wykluczamy przypadków gdy L lub R jest pusty. Dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\{x \in X : (\varphi \circ u)(x) < t\} = \begin{cases} \{x \in X : u(x) < \varphi^{-1}(t)\}, & \text{jeżeli } t \in \Delta' \\ \varnothing, & \text{jeżeli } t \in L \\ X, & \text{jeżeli } t \in R \end{cases}.$$

(c) $\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{C}^{\downarrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Inkluzja $\subset$ jest oczywista. Dla dowodu inkluzji $\supset$ ustalmy $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{C}^{\downarrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$ oraz $a \in X$. Jeżeli $u(a) \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$, zbiór $\{x \in X : u(x) < u(a) + \varepsilon\} \cap \{x \in X : u(x) > u(a) - \varepsilon\}$ jest otwartym otoczeniem punktu a, co dowodzi ciągłości u w punkcie a.

Jeżeli $u(a) = +\infty$, to dla dowolnego $M > 0$ zbiór $\{x \in X : u(x) > M\}$ jest otwartym otoczeniem punktu a, co daje ciągłość w a. Przypadek $u(a) = -\infty$ jest analogiczny (Ćwiczenie).

(d) Jeżeli $f : Y \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem ciągłym, to $u \circ f \in \mathcal{C}^{\uparrow}(Y, \overline{\mathbb{R}})$ dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Istotnie, $\{y \in Y : (u \circ f)(y) < t\} = f^{-1}(\{x \in X : u(x) < t\})$.

(e) $\mathbb{R}_{>0} \cdot \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

(f) Dla dowolnych $u, v \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$, jeżeli $u(x) + v(x)$ ma sens dla każdego $x \in X$, to $u + v \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Istotnie, $\{u + v < t\} = \bigcup\limits_{\theta \in \mathbb{R}} \{u < \theta\} \cap \{v < t - \theta\}$.

(g) Jeżeli $u, v \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$, to $\max\{u, v\} \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Istotnie, $\{\max\{u, v\} < t\} = \{u < t\} \cap \{v < t\}$.

(h) Jeżeli $(u_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$, to $u := \inf\{u_\alpha : \alpha \in A\} \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

W szczególności, jeżeli $\mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) \ni u_n \searrow u$ punktowo na X, to $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Istotnie, $\{u < t\} = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \{u_\alpha < t\}$.

(i) Jeżeli $\mathcal{C}^{\uparrow}(X,\mathbb{R}) \ni u_n \longrightarrow u$ jednostajnie na X, to $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,\mathbb{R})$.

Istotnie, niech $u(a) < t - 2\varepsilon < t$ i niech $N \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|u_N - u| < \varepsilon$ na X. W szczególności, $u_N(a) < t - \varepsilon$. Ponieważ funkcja u_N jest półciągła z góry, zatem istnieje otoczenie U punktu a takie, że $u_N < t - \varepsilon$ na U. W konsekwencji, $u < t$ na U.

Twierdzenie 5.8.4 (Twierdzenie Weierstrassa)**.** *Niech X będzie przestrzenią topologiczną zwartą i niech $f \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,\overline{\mathbb{R}})$. Wtedy istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = \sup f(X)$.*

Dowód. Niech $M := \sup f(X)$. Jeżeli $M = -\infty$, to $f \equiv -\infty$ i wynik jest oczywisty. Załóżmy więc, że $M > -\infty$. Przypuśćmy, że $f(x) < M$ dla dowolnego $x \in X$. Ustalmy ciąg $M_s \nearrow M$, $-\infty < M_s < M$, $s \in \mathbb{N}$. Z półciągłości funkcji f wynika, że każdy ze zbiorów $U_s := \{x \in X : f(x) < M_s\}$ jest otwarty. Wobec definicji M mamy $U_s \subsetneq X$, $s \in \mathbb{N}$. Z naszego przypuszczenia wynika, że $U_s \nearrow X$. Teraz, korzystając ze zwartości X wnioskujemy, że musi być $X = U_{s_0}$ dla pewnego s_0 — sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 5.8.5. *Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną i niech $u : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy*

$$u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,\overline{\mathbb{R}}) \Longleftrightarrow \forall_{a \in X} : \limsup_{x \to a} u(x) = u(a). \quad ({}^{10})$$

Dowód. ($\Longrightarrow$): Weźmy $a \in X$. Jeżeli $u(a) = +\infty$, to prawa strona jest oczywista. Niech więc $u(a) < +\infty$. Weźmy $t > u(a)$ i niech U będzie takim otoczeniem punktu a, że $u < t$ w U. Niech teraz $x_n \longrightarrow a$. Wtedy $u(x_n) < t$ dla $n \gg 1$. Stąd $\limsup\limits_{n\to+\infty} u(x_n) \leqslant t$, co wobec dowolności t, daje żądaną nierówność.

($\Longleftarrow$): Niech $u(a) < t$ i przypuśćmy, że w dowolnym otoczeniu U punktu a istnieje punkt x taki, że $u(x) \geqslant t$. Wtedy, bez trudu, konstruujemy ciąg $x_n \longrightarrow a$ taki, że $u(x_n) \geqslant t$, $n \in \mathbb{N}$. W takim razie, $\limsup\limits_{n\to+\infty} u(x_n) \geqslant t > u(a)$; sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 5.8.6 (Twierdzenie Baire'a)**.** (11) *Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,\overline{\mathbb{R}})$ istnieje ciąg $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X,\overline{\mathbb{R}})$ taki, że $u_n \searrow u$ punktowo na X (por. Obserwacja 5.8.3*(h)*).*

Ponadto, jeżeli $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,[-\infty,+\infty))$, to ciąg $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ można wybrać w $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Dowód. Zastępując u poprzez $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} u$ (por. Obserwacja 5.8.3(b)), sprowadzamy problem do przypadku, gdy $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,[-1,1])$ (odpowiednio, $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,[-1,1))$), a funkcji aproksymujących poszukujemy w $\mathcal{C}(X,[-1,1])$ (odpowiednio, $\mathcal{C}(X,(-1,1))$).

Zdefiniujmy

$$\varphi_{a,n}(x) := u(a) - n\varrho(x,a), \quad a \in X,\ x \in X,$$
$$u_n := \sup\{\varphi_{a,n} : a \in X\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Na wstępie sprawdzimy, że $u_n \in \mathcal{C}(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$|\varphi_{a,n}(x') - \varphi_{a,n}(x'')| = n|\varrho(x',a) - \varrho(x'',a)| \leqslant n\varrho(x',x''), \quad x',x'' \in X,$$

a stąd $|u_n(x') - u_n(x'')| \leqslant n\varrho(x',x'')$, $x',x'' \in X$. W szczególności, u_n jest ciągła.

Jest rzeczą widoczną, że $\varphi_{a,n+1} \leqslant \varphi_{a,n}$, skąd wynika, że $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ponadto, $\varphi_{x,n}(x) = u(x)$, a zatem $-1 \leqslant u(x) = \varphi_{x,n}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant 1$, $x \in X$. W szczególności, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant u$.

Ustalmy $x_0 \in X$ oraz $t > u(x_0)$ (jeżeli $u(x_0) < 1$, to dobieramy t tak, by $u(x_0) < t < 1$). Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $u(x) < t$ dla $x \in B(x_0,\delta)$. Wtedy

$$\varphi_{a,n}(x_0) = u(a) - n\varrho(x_0,a) \leqslant \max\{t, 1 - n\delta\}, \quad a \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

Wynika stąd, że $u_n(x_0) \leqslant \max\{t, 1-n\delta\}$, $n \in \mathbb{N}$ (jeżeli $u(x_0) < 1$, to $u_n(x_0) < 1$, $n \in \mathbb{N}$). Przechodząc do granicy dostajemy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_0) \leqslant t$, co dowodzi, że $u_n(x_0) \longrightarrow u(x_0)$.

---

(10) Uwaga: W tym wzorze, przy braniu $\limsup\limits_{x\to a} u(x)$ dopuszczamy w definicji zbioru $\mathcal{S}(u,a)$ ciągi stałe $x_n = a$, $n \in \mathbb{N}$. Innymi słowy, zawsze mamy $u(a) \in \mathcal{S}(u,a)$, a wiec zawsze jest $\limsup\limits_{x\to a} u(x) \geqslant u(a)$ oraz $\liminf\limits_{x\to a} u(x) \leqslant u(a)$. Jeżeli nie chcemy zmieniać definicji $\limsup\limits_{x\to a} u(x)$, to wtedy prawą stronę należy rozumieć jako $\forall_{a\in X'} : \limsup\limits_{x\to a} u(x) \leqslant u(a)$.

(11) René-Louis Baire (1874–1932).

W przypadku gdy $u(X) \subset [-1,1)$, wystarczy jeszcze tylko zastąpić u_n przez $\max\{u_n, -1+\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Obserwacja 5.8.7. Można pokazać (zob. np. [Kat 1951], [Ton 1952]), że Twierdzenie 5.8.6 pozostaje prawdziwe dla przestrzeni topologicznej X wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią *doskonale normalną*, tzn. dla dowolnych rozłącznych zbiorów domkniętych $A, B \subset X$ istnieje funkcja ciągła $f : X \longrightarrow [0,1]$ taka, że $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$.

Zauważmy, że jeżeli (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną, to warunek ten spełnia funkcja $f(x) := \frac{\varrho(x,B)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$, $x \in X$, czyli *każda przestrzeń metryczna jest doskonale normalna.*

5.9. Funkcje wypukłe

Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym nietrywialnym przedziałem nieredukującym się do punktu.

Definicja 5.9.1. Funkcję $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą* (odp. *silnie wypukłą*), jeżeli

$$f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b), \quad a,b \in P,\ a<b,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$
$$(\text{odp. } f(ta+(1-t)b) < tf(a)+(1-t)f(b), \quad a,b \in P,\ a<b,\ t \in (0,1)).$$

Funkcję f nazywamy *wklęsłą* (odp. *silnie wklęsłą*), jeżeli $-f$ jest wypukła (odp. silnie wypukła).

Obserwacja 5.9.2. Warunek wypukłości z Definicji 5.9.1 można zapisać w równoważnej postaci:

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad a,b \in P,\ a<b,\ a \leqslant x \leqslant b. \tag{†}$$

Warunek (†) będziemy nazywać *warunkiem wypukłości funkcji f dla przedziału $[a,b]$ w punkcie x.*

Istotnie, mamy $x = ta+(1-t)b$ dla pewnego $t \in [0,1]$, a więc (†) to $f(ta+(1-t)b) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b-a) = f(a)+(f(b)-f(a))(1-t) = tf(a)+(1-t)f(b)$.

Ćwiczenie 5.9.3. Udowodnić, że jeżeli $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, to

$$f(t_1a_1+\dots+t_ka_k) \leqslant t_1f(a_1)+\dots+t_kf(a_k),\ k \in \mathbb{N}_2,\ t_1,\dots,t_k \geqslant 0,\ t_1+\dots+t_k=1,\ a_1,\dots,a_k \in P.$$

Twierdzenie 5.9.4. *Dla $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest wypukła (odp. silnie wypukła);*

(ii) *dla dowolnych $a,b,c \in P$ takich, że $a<c<b$ mamy*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \quad \Big(\text{odp. } \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\Big).$$

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): $c = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b = ta+(1-t)b$, gdzie $t = \frac{b-c}{b-a} \in (0,1)$. Zatem z definicji wypukłości (odp. silnej wypukłości) f otrzymujemy

$$f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b) \quad \Big(\text{odp. } f(c) < \frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b)\Big),$$

co daje (ii) (Ćwiczenie).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $a,b \in P$, $a<b$, $t \in (0,1)$, $c := ta+(1-t)b \in (a,b)$. Wobec (ii) mamy

$$\frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{(1-t)(b-a)} \leqslant \frac{f(b)-f(ta+(1-t)b)}{t(b-a)} \quad \Big(\text{odp. } \frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{(1-t)(b-a)} < \frac{f(b)-f(ta+(1-t)b)}{t(b-a)}\Big),$$

co daje warunek z Definicji 5.9.1 (Ćwiczenie). $\square$

Twierdzenie 5.9.5. *Każda funkcja wypukła $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym, spełnia lokalnie warunek Lipschitza. W szczególności, jest ciągła.*

Obserwacja 5.9.6. Funkcja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0,1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$ jest wypukła (Ćwiczenie). W szczególności Twierdzenie 5.9.5 nie jest prawdziwe, gdy P nie jest otwarty.

Dowód Twierdzenia 5.9.5. Niech $p_0 < p < x' < x'' < q < q_0$, $[p_0, q_0] \subset P$. Wtedy na podstawie Twierdzenia 5.9.4 mamy

$$A := \frac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0} \leqslant \frac{f(x') - f(p)}{x' - p} \leqslant \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \leqslant \frac{f(q) - f(x'')}{q - x''} \leqslant \frac{f(q_0) - f(q)}{q_0 - q} =: B,$$

co daje $|f(x'') - f(x')| \leqslant L(x'' - x')$, gdzie $M := \max\{|A|, |B|\}$. Pokazaliśmy, że funkcja f spełnia lokalnie w P warunek Lipschitza. Jest więc w szczególności ciągła. □

Twierdzenie 5.9.7. *Dla funkcji różniczkowalnej $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest wypukła (odp. silnie wypukła);*
(ii) *f' jest rosnąca (odp. silnie rosnąca).*

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Na mocy Twierdzenia 5.9.4 wystarczy pokazać, że dla $a, b, c \in P$, $a < c < b$, mamy $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$ (odp. $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$). Korzystamy z twierdzenia Lagrange'a $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\xi_1)$, $\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\xi_2)$ dla $a < \xi_1 < c < \xi_2 < b$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy $a, b \in P$, $a < b$. Wiemy, że (Twierdzenie 5.9.4)

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(b) - f(c)}{b - c}, \quad a < c < b.$$

Biorąc raz $c \longrightarrow a+$, a drugi raz $c \longrightarrow b-$, dostajemy $f'(a) \leqslant f'(b)$.

W przypadku silniej wypukłości, jeżeli już wiemy, że f' jest rosnąca, równość $f'(a) = f'(b)$ oznaczałaby, że f' jest stała na $[a, b]$. Wynika stąd, że $f(x) = \alpha x + \beta$ dla $x \in [a, b]$, a taka funkcja nie jest silnie wypukła. □

Twierdzenie 5.9.8. *Jeżeli P jest przedziałem otwartym i $f \in \mathcal{D}(P)$ jest funkcją wypukłą, to dla dowolnego $a \in P$ mamy*

$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \in P.$$

Dowód. Korzystamy z Twierdzenia 5.9.4. Dla $x < a < b$ mamy

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Biorąc $b \longrightarrow a+$ dostajemy

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant f'(a).$$

Dla $b < a < x$ mamy

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Biorąc $b \longrightarrow a-$ dostajemy

$$f'(a) \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$ □

Twierdzenie 5.9.9. *Dla $f \in \mathcal{D}^2(P)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest wypukła (odp. silnie wypukła);*
(ii) *$f''(x) \geqslant 0$, $x \in P$ (odp. $f''(x) \geqslant 0$, $x \in P$, oraz $\operatorname{int}\{x \in P : f''(x) = 0\} = \varnothing$).*

Dowód. Wynika natychmiast z Twierdzeń 5.9.7 oraz 5.2.11. □

Przykład 5.9.10. Funkcja exp jest silnie wypukła. W konsekwencji:

$$e^{t_1 x_1 + \dots + t_n x_n} \leqslant t_1 e^{x_1} + \dots + t_n e^{x_n}, \quad n \geqslant 2,\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},\ t_1, \dots, t_n \in [0, 1] : t_1 + \dots + t_n = 1.$$

Biorąc $t_1 = \dots = t_n = 1/n$ i podstawiając $a_j := a^{x_j}$, $j = 1, \dots, n$, dostajemy

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Twierdzenie 5.9.11. *Jeżeli $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, to*
(a) *pochodne jednostronne $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ istnieją dla dowolnego $x \in Q := \operatorname{int} P$,*
(b) $f'_+(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_-(b)$, $a, b \in Q$, $a < b$,
(c) $f'_- \leqslant f'_+$,
(d) $\lim\limits_{Q \ni x \to a} f(x) \leqslant f(a)$, $a \in P \setminus Q$.
W szczególności:
(e) $f \in \mathcal{C}(Q)$,
(f) *f'_+ jest funkcją niemalejącą,*
(g) *$f'_-(x) = f'_+(x)$ dla $x \in Q \setminus S$, gdzie S jest co najwyżej przeliczalny,*
(h) $f \in \mathcal{C}^{\uparrow}(P)$.
Odwrotnie, jeżeli funkcja $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia (a), (c), (f), (h), *to f jest wypukła.* ([12])
W szczególności:
- *jeżeli $f \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{C}^{\uparrow}(P)$, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest niemalejąca w Q;*
- *jeżeli $f \in \mathcal{D}^2(Q) \cap \mathcal{C}^{\uparrow}(P)$, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f'' \geqslant 0$ w Q.*

Dowód. Na wstępie przyjrzyjmy się warunkom (e), (f), (g), (h):
(e) wynika z (a).
(f) wynika z (a), (b) i (c).
Jeżeli f'_+ jest niemalejąca, to f'_+ jest ciągła poza zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Z (b) i (c) mamy $f'_+(x-) \leqslant f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$, $x \in Q$ ([13]). Wynika stąd, że pochodna $f'(x)$ istnieje w każdym punkcie ciągłości f'_+, co daje (g).
(h) wynika z (d).

Załóżmy, że $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła. Korzystając z wypukłości funkcji f dla przedziału $[x, x+k]$ w punkcie $x+h$ dostajemy
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(x+k)-f(x)}{k}, \quad x \in Q,\ 0 < h < k,\ x+k \in P.$$
Oznacza to, że funkcja
$$(0,k) \ni h \longmapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
jest niemalejąca. Wynika stąd, że granica $f'_+(x)$ istnieje, $-\infty \leqslant f'_+(x) < +\infty$ oraz $f'_+(x) \leqslant \frac{f(x+k)-f(x)}{k}$. Uwaga: ponieważ jeszcze nie wiemy, czy $f'_+(x) \in \mathbb{R}$, symbol $f'_+(x)$ został tu użyty w sposób niezupełnie ścisły. Ponownie korzystając z wypukłości dla przedziału $[x-k, x]$ w punkcie $x-h$, mamy
$$\frac{f(x-h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(x-k)-f(x)}{k}, \quad x \in Q,\ 0 < h < k,\ x-k \in P.$$
Podobnie jak poprzednio wynika stąd, że $f'_-(x)$ istnieje, $-\infty < f'_-(x) \leqslant +\infty$ oraz $\frac{f(x)-f(x-k)}{k} \leqslant f'_-(x)$. Własność (b) jest więc wykazana.

Przechodzimy do własności (c). Zauważmy, że wyniknie z niej natychmiast, że $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ są skończone, czyli dostaniemy (a). Kolejny raz skorzystamy z wypukłości dla przedziału $[x-h, x+k]$ w punkcie x:
$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \leqslant \frac{f(x+k)-f(x)}{k}, \quad x \in Q,\ h, k > 0,\ x-h, x+k \in P,$$
a stąd $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$, $x \in Q$.

Pozostaje wykazać (d). Przypuśćmy np., że $b \in P$ jest prawym końcem przedziału P. Najpierw pokażemy, że granica lewostronna $f(b-) \in \overline{\mathbb{R}}$ istnieje. Ponieważ f'_+ jest funkcją niemalejącą, mamy następujące możliwości:
- $f'_+ \leqslant 0$ w Q lub $f'_+ \geqslant 0$ w Q: wtedy f jest monotoniczna w Q, a stąd granica $f(b-)$ istnieje;
- istnieje punkt $c \in Q$ taki, że $f'_+ \leqslant 0$ w $Q \cap (-\infty, c]$ i $f'_+ \geqslant 0$ w $Q \cap [c, +\infty)$: wtedy f jest niemalejąca w $Q \cap [c, +\infty)$; w szczególności, $f(b-)$ istnieje.

([12]) Oznacza to, że f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia (a), (b), (c), (d).
([13]) Tu i dalej będziemy stosować klasyczne oznaczenie $\varphi(a\pm) := \lim\limits_{x \to a\pm} \varphi(x)$.

Teraz pokażemy, że $f(b-) \leqslant f(b)$. Niech $b' \in P$, $b' < b$. Wtedy, korzystając z wypukłości dla przedziału $[b', b]$ w punkcie x, dostajemy

$$f(x) \leqslant f(b') + \frac{f(b) - f(b')}{b - b'}(x - b'), \quad x \in [b', b],$$

co przy $x \longrightarrow b$ daje $f(b-) \leqslant f(b)$.

Podobnie postępujemy, gdy $a \in P$ jest lewym końcem przedziału P — Ćwiczenie.

Załóżmy teraz, że warunki (a), (c), (f), (h) są spełnione. Najpierw pokażemy, że f jest wypukła w Q. Ustalmy $a, b \subset Q$, $a < b$, i niech

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Zauważmy, że $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Chcemy pokazać, że $\varphi \leqslant 0$. Zauważmy, że φ jest ciągła (wobec (a)). Przypuśćmy, że $\varphi(c) = \max_{[a,b]} \varphi > 0$ dla pewnego $c \in (a, b)$. Mamy więc $\frac{\varphi(c+h)-\varphi(c)}{h} \leqslant 0$, $0 < h \ll 1$, a stąd $\varphi'_+(c) \leqslant 0$. Podobnie, $\frac{\varphi(c-h)-\varphi(c)}{-h} \geqslant 0$, $0 < h \ll 1$, a stąd $\varphi'_-(c) \geqslant 0$. Korzystając z (c), dostajemy $\varphi'_+(c) = 0$. Stąd, wobec (f), φ jest funkcją niemalejącą w przedziale $[c, b]$ i w szczególności, $0 < \varphi(c) \leqslant \varphi(b) = 0$ — sprzeczność.

Teraz pokażemy, że f jest wypukła w całym przedziale P. Niech $a, b \in P$, $a < b$, $0 < t < 1$ będą ustalone. Zauważmy, że $ta + (1-t)b \in Q$. Wiemy, że $f(ta' + (1-t)b') \leqslant tf(a') + (1-t)f(b')$ dla $[a', b'] \subset Q$, $a' < b'$. Korzystając z (h) mamy

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leqslant \limsup_{\substack{Q \ni a' \to a \\ Q \ni b' \to b}} f(ta' + (1-t)b') \leqslant \limsup_{\substack{Q \ni a' \to a \\ Q \ni b' \to b}} \big(tf(a') + (1-t)f(b')\big) \\ &\leqslant t \limsup_{Q \ni a' \to a} f(a') + (1-t) \limsup_{Q \ni b' \to b} f(b') \leqslant tf(a) + (1-t)f(b). \quad \Box \end{aligned}$$

5.10. Średnie uogólnione

Ustalmy $n \in \mathbb{N}_2$ oraz liczby $a_1, \dots, a_n, t_1, \dots, t_n > 0$ takie, że $a_1, \dots, a_n$ są parami różne oraz $t_1 + \dots + t_n = 1$. Niech $a := (a_1, \dots, a_n)$, $t := (t_1, \dots, t_n)$. Rozważmy funkcję

$$\mathbb{R}_* \ni x \overset{S_{a,t}}{\longmapsto} \Big(t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x\Big)^{1/x} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Uwaga: Formalnie można zrezygnować z założenia, że $a_1, \dots, a_n$ są parami różne, ponieważ (poprzez zmianę n i $t_1, \dots, t_n$) zawsze można doprowadzić do sytuacji, w której bądź $n = 1$, bądź $a_1, \dots, a_n$ są parami różne.

Lemat 5.10.1. (a) $\lim_{x \to +\infty} S_{a,t}(x) = \max\{a_1, \dots, a_n\} =: S_{a,t}(+\infty)$.

(b) $\lim_{x \to 0} S_{a,t}(x) = a_1^{t_1} \cdots a_n^{t_n} =: S_{a,t}(0)$.

(c) $\lim_{x \to -\infty} S_{a,t}(x) = \min\{a_1, \dots, a_n\} =: S_{a,t}(-\infty)$.

Dowód. (a) i (c) są elementarne (Ćwiczenie).

(b) Zauważmy, że $S_{a,t} = \exp(\varphi)$, gdzie $\varphi(x) := \frac{1}{x} \ln(t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x)$. Granica $\lim_{x \to 0} \varphi(x)$ jest symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$. Stosujemy regułę d'Hôpitala

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{t_1 a_1^x \ln a_1 + \dots + t_n a_n^x \ln a_n}{t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x} = t_1 \ln a_1 + \dots + t_n \ln a_n. \quad \Box$$

Definicja 5.10.2. Funkcję $S_{a,t} : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ nazywamy *średnią uogólnioną liczb $a_1, \dots, a_n$ z wagami $t_1, \dots, t_n$*.

Obserwacja 5.10.3. W przypadku, gdy $t_1 = \dots = t_n := 1/n$, niech $S_a := S_{a,t}$. Wtedy dostajemy klasyczne średnie:

- $S_a(2) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} =$ średnia kwadratowa;
- $S_a(1) = \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n} =$ średnia arytmetyczna;

- $S_a(0) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ = średnia geometryczna;
- $S_a(-1) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ = średnia harmoniczna.

Uwaga: Definiując powyższe średnie rezygnujemy z założenia, że $a_j \neq a_k$ dla $j \neq k$.

Twierdzenie 5.10.4 (Ćwiczenie*). (a) *Funkcja $S_{a,t} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.*

(b) *Funkcja $S_{a,t}$ jest ściśle rosnąca.*

(c) *Istnieją liczby $x_\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $S_{a,t}$ jest wypukła w przedziale $(-\infty, x_-)$ i wklęsła w $(x_+, +\infty)$.*

Obserwacja 5.10.5. Odnotujmy, że problem wypukłości funkcji $S_{a,t}$ jest wysoce nietrywialny. Dla przykładu, korzystając z pomocy komputera można łatwo, sprawdzić, że dla $n = 4$, $a_1 := 0.1635$, $a_2 := 4.7965$, $a_3 := 9.3668$, $a_4 := 1.7856$, $t_1 := 0.0455$, $t_2 := 0.1430$, $t_3 := 0.0007$, $t_4 := 0,8108$, mamy co najmniej 5 punktów przegięcia.

5.11. Uzupełnienia

Ten podrozdział nie wiąże się bezpośrednio z różniczkowaniem. Stanowi uzupełnienie naszej wiedzy o odwzorowaniach liniowych i dwuliniowych, o iloczynach skalarnych i o kategoriach Baire'a. Z wyników przedstawionych w tym podrozdziale będziemy korzystać wielokrotnie w przyszłości.

5.11.1. Odwzorowania liniowe.

Niech E, F, G, ... będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$.

Definicja 5.11.1. Przez $\operatorname{Hom}(E, F)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich odwzorowań $\mathbb{K}$–liniowych $L : E \longrightarrow F$. Niech $E^* := \operatorname{Hom}(E, \mathbb{K})$. Przez $\mathcal{L}(E, F)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich odwzorowań liniowych i ciągłych $L : E \longrightarrow F$. Niech $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Obserwacja 5.11.2. Odnotujmy, że jeżeli E jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, to może być $E' \subsetneq E^*$. Na przykład, niech E oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej, niech $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$, $f \in E$, i niech $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $L(f) := f(3)$. Oczywiście $L \in E^*$. Zauważmy, że $\|(\frac{x}{2})^k\| = (\frac{1}{2})^k \longrightarrow 0$. Z drugiej strony $L((\frac{x}{2})^k) = (\frac{3}{2})^k \longrightarrow +\infty$. Oznacza to, że $L \notin E'$.

Obserwacja 5.11.3. Niech $L \in \operatorname{Hom}(E, F)$.

(a) Jeżeli $F = F_1 \times \cdots \times F_N$, $L = (L_1, \dots, L_N)$, to

$$L \in \mathcal{L}(E, F_1 \times \cdots \times F_N) \iff L_j \in \mathcal{L}(E, F_j),\ j = 1, \dots, N.$$

(b) Jeżeli $E = E_1 \times \cdots \times E_N$, $L_j : E_j \longrightarrow F$, $L_j(x_j) := L(\underbrace{0, \dots, 0}_{(j-1)\,\times}, x_j, \underbrace{0, \dots, 0}_{(N-j)\,\times})$, $j = 1, \dots, N$, to $L \in \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_N, F) \iff L_j \in \mathcal{L}(E_j, F),\ j = 1, \dots, N$. Zauważmy, że $L(x) = L_1(x_1) + \cdots + L_N(x_N)$ dla $x = (x_1, \dots, x_N) \in E_1 \times \cdots \times E_N$.

(c) Wiadomo, że zbiór $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^N, F)$ składa się ze wszystkich odwzorowań postaci

$$\mathbb{K}^N \ni (x_1, \dots, x_N) \longmapsto x_1 a_1 + \cdots + x_N a_N \in F,$$

gdzie $a_1, \dots, a_N \in F$. Wynika stąd, że $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^N, F) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^N, F) \simeq F^N$

Wiadomo również, że $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K}) = \mathbb{K}[m \times n]$ = przestrzeń macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$. Izomorfizm $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$ dany jest następującym przepisem. Odwzorowaniu liniowemu $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ przyporządkowujemy macierz, której i-ta kolumna składa się ze współrzędnych wektora $L(\boldsymbol{e}_i) = L(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. Izomorfizm odwrotny to odwzorowanie, które przypisuje macierzy $A \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$ odwzorowanie liniowe postaci $\mathbb{K}^n \ni x \longmapsto A.x \in \mathbb{K}^m$, gdzie $A.x$ oznacza wynik mnożenia macierzy A przez wektor x utożsamiany z macierzą kolumnową $n \times 1$.

Twierdzenie 5.11.4. *Niech $L \in \operatorname{Hom}(E, F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$L \in \mathcal{L}(E, F)$;*

(ii) *odwzorowanie L jest ciągłe w 0;*

(iii) *istnieje punkt $a \in E$ taki, że odwzorowanie L jest ciągłe w a;*

(iv) *istnieją $a \in E$, $r > 0$ takie, że $L(\overline{B}(a, r))$ jest zbiorem ograniczonym* (14)*;*

---

(14) Oczywiście warunek ten jest równoważny temu, że istnieją $a \in E$, $r > 0$ takie, że $L(B(a, r))$ jest zbiorem ograniczonym.

(v) *istnieje* $C \geqslant 0$ *takie, że* $\|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$ *dla dowolnego* $x \in E$.

Dowód. Jedyny problem to implikacja (iv) $\Longrightarrow$ (v). Niech $L(\overline{B}(a,r)) \subset \overline{B}(R)$. Wystarczy pokazać, że $\|L(x)\| \leqslant C$ dla $\|x\| = 1$. Weźmy dowolne $x \in E$ takie, że $\|x\| = 1$. Mamy:

$$\|L(x)\| = \frac{1}{r}\|L(rx)\| = \frac{1}{r}\|L(a+rx) - L(a)\| \leqslant \frac{1}{r}(\|L(a+rx)\| + \|L(a)\|) \leqslant \frac{2R}{r} =: C. \qquad \square$$

Przypomnijmy, że normy $\| \|_1, \| \|_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są równoważne, jeżeli $\varrho_{\| \|_1} \sim \varrho_{\| \|_2}$, gdzie $\varrho_{\| \|_j}(x,y) := \|x-y\|_j$, $j = 1, 2$. Piszemy wtedy $\| \|_1 \sim \| \|_2$.

Wniosek 5.11.5. $\| \|_1 \sim \| \|_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $C \geqslant 1$ *takie, że* $\frac{1}{C}\| \|_1 \leqslant \| \|_2 \leqslant C\| \|_1$.

Powyższy wynik oznacza, iż w kategorii metryk zadanych przez normy równoważność takich metryk jest równoważna ich porównywalności.

Dowód. Stosujemy Twierdzenie 5.11.4 do identyczności $\mathrm{id}_E : (E, \| \|_1) \longrightarrow (E, \| \|_2)$. $\square$

Wniosek 5.11.6. $\mathcal{L}(E,F)$ *jest przestrzenią unormowaną przez funkcję*

$$\|L\| = \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup\{\|L(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}, \quad L \in \mathcal{L}(E,F).$$

Obserwacja 5.11.7. Niech $L \in \mathcal{L}(E,F)$.

(a) Jeżeli $E \neq \{0\}$, to $\|L\| = \sup\left\{\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} : x \in E_*\right\} = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| = 1\}$.

(b) $\|L\|$ jest najmniejszą stałą $C \geqslant 0$ taką, że Twierdzenie 5.11.4(v) zachodzi. W szczególności, $\|L(x)\| \leqslant \|L\|\|x\|$, $x \in E$.

(c) $L|_{\overline{B}(1)} \in \mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ (Obserwacja 4.6.10(a)) oraz $\|L\|$ jest identyczna z normą Czebyszewa odwzorowania $L|_{\overline{B}(1)}$ w $\mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$

(d) Jeżeli $A \in \mathcal{L}(E,F)$, $B \in \mathcal{L}(F,G)$, to $B \circ A \in \mathcal{L}(E,G)$, $\|B \circ A\| \leqslant \|B\|\|A\|$. W szczególności, jeżeli $A \in \mathcal{L}(E,E)$, to $A^k := \underbrace{A \circ \dots \circ A}_{k\times} \in \mathcal{L}(E,E)$ i $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.

Twierdzenie 5.11.8. *Jeżeli* F *jest przestrzenią Banacha, to* $\mathcal{L}(E,F)$ *jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Jeżeli $(L_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(E,F)$ jest ciągiem Cauchy'ego, to $(L_n|_{\overline{B}(1)})_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ wraz z normą Czebyszewa (Obserwacja 5.11.7(c)). Przypomnijmy, że przestrzeń $\mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ wraz z normą Czebyszewa jest przestrzenią Banacha (Obserwacja 4.6.10(a)). W takim razie istnieje odwzorowanie $\Phi \in \mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ takie, że $L_n|_{\overline{B}(1)} \longrightarrow \Phi$ in $\mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$. Pozostaje wykazać, że $\Phi = L|_{\overline{B}(1)}$ dla pewnego $L \in \mathrm{Hom}(E,F)$. W tym celu zauważmy, że jeżeli $x \neq 0$, to $L_n(x) = \|x\|L_n(\frac{x}{\|x|}) \longrightarrow \|x\|\Phi(\frac{x}{\|x\|})$. Oznacza to, że $L_n \longrightarrow L$ punktowo na E, $L = \Phi$ na $\overline{B}(1)$. Oczywiście $L : E \longrightarrow F$ jest operatorem liniowym. $\square$

Definicja 5.11.9. Niech $\mathrm{Isom}(E,F)$ oznacza rodzinę wszystkich izomorfizmów algebraicznych $L : E \longrightarrow F$ takich, że L i L^{-1} są ciągłe (tzn. L jest również izomorfizmem topologicznym).

Obserwacja 5.11.10. (a) Jeżeli $\mathrm{Isom}(E,F) \neq \varnothing$, to E jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy F jest przestrzenią Banacha.

(b) Jeżeli $L \in \mathrm{Isom}(E,F)$ i $E \neq \{0\}$, to $\|L^{-1}\| \geqslant \|L\|^{-1}$.

Istotnie, $1 = \|\mathrm{id}_E\| = \|L^{-1} \circ L\| \leqslant \|L^{-1}\|\|L\|$.

Twierdzenie 5.11.11. *Załóżmy, że* $1 \leqslant d := \dim E < \infty$. *Wtedy:*

(a) *Wszystkie normy w* E *są równoważne.*

(b) $\mathrm{Isom}(\mathbb{K}^d, E) \neq \varnothing$.

(c) $\mathcal{L}(E,F) = \mathrm{Hom}(E,F)$ *dla dowolnej przestrzeni unormowanej* F.

(d) E *jest przestrzenią Banacha.*

---

(14) $A_* := A \setminus \{0\}$.

Dowód. (a) Niech $\| \ \|$ będzie ustaloną normą na E i niech $e_1, \dots, e_d$ będzie dowolną bazą E. Zdefiniujmy $L : \mathbb{K}^d \longrightarrow E$, $L(t_1, \dots, t_d) := t_1 e_1 + \dots + t_d e_d$; L jest izomorfizmem algebraicznym. Ponadto L jest odwzorowaniem ciągłym bowiem $\|L(t)\| \leqslant \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_d\|\}\|t\|_1 = C\|t\|_1$, $t \in \mathbb{K}^d$.

Zauważmy, że funkcja $q : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $q(x) := \|L^{-1}(x)\|_1$, jest normą na E. Wystarczy pokazać, że $\| \ \| \sim q$. Wiemy, że $\| \ \| \leqslant Cq$. Wystarczy więc pokazać, że $q \leqslant \operatorname{const} \| \ \|$ (co jest równoważne ciągłości L^{-1}). Chcemy pokazać, że $\|L^{-1}(x)\|_1 \leqslant \operatorname{const}\|x\|$, $x \in E$. Innymi słowy, $\|t\|_1 \leqslant \operatorname{const}\|L(t)\|$, $t \in \mathbb{K}^d$, co z kolei jest równoważne pokazaniu, że $\|L(t)\| \geqslant \operatorname{const} > 0$ dla $\|t\|_1 = 1$. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów (wobec faktu, że L jest ciągłe, a sfera $\{\|t\|_1 = 1\}$ jest zwarta).

(b) $L \in \operatorname{Isom}(\mathbb{K}^d, E)$.

(c) i (d) wynikają z faktu, że $\operatorname{Isom}(\mathbb{K}^d, E) \neq \varnothing$, a dla $E = \mathbb{K}^d$ własności (c) i (d) są oczywiste. □

Wniosek 5.11.12. *Niech $W \subset E$ będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią wektorową E. Wtedy W jest przestrzenią Banacha. W szczególności, W jest domknięta.*

Twierdzenie 5.11.13. *Następujące warunki są równoważne:*
(i) $\dim E < \infty$;
(ii) $\forall_{a \in E,\, r>0} : \overline{B}(a, r)$ *jest zbiorem zwartym;*
(iii) $\exists_{a \in E,\, r>0} : \overline{B}(a, r)$ *jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) są oczywiste. Pozostaje do wykazania (iii) $\Longrightarrow$ (i). Korzystając z translatywności kul, widzimy, że (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Ponieważ kula $\overline{B}(0, 2)$ jest zwarta, istnieje skończona liczba punktów $a_1, \dots, a_N \in \overline{B}(0, 2)$ taka, że $\overline{B}(0, 2) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(a_j, 1)$. Niech V oznacza podprzestrzeń generowaną przez wektory $a_1, \dots, a_N$. Na podstawie Wniosku 5.11.12, jest to podprzestrzeń domknięta. Pokażemy, że $E = V$. Ustalmy $a \in E$. Zamierzamy pokazać, że $a \in \overline{V}$. Możemy założyć, że $\|a\| < 1$. Ponieważ $a \in \overline{B}(0, 2)$, istnieją $j_1 \in \{1, \dots, N\}$ oraz $x_1 \in B(0, 1)$ takie, że $a = a_{j_1} + x_1 =: b_1 + x_1$. Powtarzając to samo dla wektora $2x_1$, wnioskujemy, że $a = b_2 + \frac{1}{2}x_2$, gdzie $b_2 \in V$ i $\|x_2\| < 1$. Po k krokach dostajemy: $a = b_k + \frac{1}{2^{k-1}}x_k$, gdzie $b_k \in V$ i $\|x_k\| < 1$. W szczególności, $a \in \overline{V}$. □

5.11.2. Odwzorowania dwuliniowe.

Definicja 5.11.14. Przez $\operatorname{Hom}(E, F; G)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich odwzorowań dwuliniowych $B : E \times F \longrightarrow G$. Jeżeli $E = F$, to piszemy $\operatorname{Hom}^2(E, G)$ zamiast $\operatorname{Hom}(E, E; G)$.

Przez $\mathcal{L}(E, F; G)$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągłych odwzorowań dwuliniowych $E \times F \longrightarrow G$. Niech $\mathcal{L}^2(E, G) := \mathcal{L}(E, E; G)$. Oczywiście, $\mathcal{L}(E, F; G)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową.

Obserwacja 5.11.15. Przypomnijmy pewien fakt algebraiczny. Niech

$$\operatorname{Hom}(E, F; G) \ni B \overset{\Phi}{\longmapsto} \Big(E \ni x \longmapsto B(x, \cdot) \in \operatorname{Hom}(F, G)\Big) \in \operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(F, G));$$

Φ jest dobrze określone, liniowe, bijektywne i $\Psi = \Phi^{-1}$ jest dane wzorem

$$\operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(F, G)) \ni A \overset{\Psi}{\longmapsto} \Big(E \times F \ni (x, y) \longmapsto A(x)(y) \in G\Big) \in \operatorname{Hom}(E, F; G).$$

Tak więc $\operatorname{Hom}(E, F; G) \simeq \operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(F, G))$. W identyczny sposób można pokazać, że

$$\operatorname{Hom}(E, F; G) \simeq \operatorname{Hom}(F, \operatorname{Hom}(E, G));$$

$$\operatorname{Hom}(E, F; G) \ni B \longmapsto \Big(F \ni y \longmapsto B(\cdot, y) \in \operatorname{Hom}(E, G)\Big) \in \operatorname{Hom}(F, \operatorname{Hom}(E, G)).$$

Twierdzenie 5.11.16. *Niech $B \in \operatorname{Hom}(E, F; G)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
(i) $B \in \mathcal{L}(E, F; G)$;
(ii) *odwzorowanie B jest ciągłe w $(0, 0)$;*
(iii) *istnieje punkt $(a, b) \in E \times F$ taki, że odwzorowanie B jest ciągłe w (a, b);*
(iv) *istnieją $(a, b) \in E \times F$ i $r > 0$ takie, że $B(\overline{\mathbb{B}}(a, r) \times \overline{\mathbb{B}}(b, r))$ jest zbiorem ograniczonym* [15]*;*
(v) *istnieje $C \geqslant 0$ takie, że $\|B(x, y)\|_G \leqslant C\|x\|_E\|y\|_F$ dla dowolnego $(x, y) \in E \times F$.*

[15] Równoważnie: istnieją $(a, b) \in E \times F$ i $r > 0$ takie, że $B(\mathbb{B}(a, r) \times \mathbb{B}(b, r))$ jest zbiorem ograniczonym. Uwaga: dla uniknięcia kolizji oznaczeń piszemy chwilowo $\mathbb{B}(a, r)$ zamiast $B(a, r)$.

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Niech $B(\overline{\mathbb{B}}(a,r) \times \overline{\mathbb{B}}(b,r)) \subset \overline{\mathbb{B}}(R)$.

Wystarczy pokazać, że $\|B(x,y)\| \leqslant C$ dla $\|x\| = \|y\| = 1$. Weźmy $(x,y) \in E \times F$, $\|x\| = \|y\| = 1$:

$$\begin{aligned}\|B(x,y)\| &= \frac{1}{r^2}\|B(rx,ry)\| = \frac{1}{r^2}\|B(a+rx,b+ry) - B(a,b+ry) - B(a+rx,b) + B(a,b)\| \\ &\leqslant \frac{1}{r^2}(\|B(a+rx,b+ry)\| + \|B(a,b+ry)\| + \|B(a+rx,b)\| + \|B(a,b)\|) \leqslant \frac{4R}{r^2} =: C.\end{aligned}$$

(v) $\Longrightarrow$ (i): $\|B(x,y) - B(x_0,y_0)\| = \|B(x-x_0,y) + B(x_0,y-y_0)\| \leqslant C(\|x-x_0\|\|y\| + \|x_0\|\|y-y_0\|)$
$\leqslant C\max\{\|x_0\|, \|y\|\}\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_1$. □

Obserwacja 5.11.17. (a) $\mathcal{L}(E,F;G)$ wraz z normą

$$\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(E,F;G)} := \sup\{\|B(x,y)\| : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\}, \quad B \in \mathcal{L}(E,F;G)$$

jest przestrzenią unormowaną.

(b) Jeżeli $E \neq \{0\}$ i $F \neq \{0\}$, to

$$\|B\| = \sup\Big\{\frac{\|B(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} : (x,y) \in E_* \times F_*\Big\} = \sup\{\|B(x,y)\| : \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\}.$$

(c) $\|B\|$ jest najmniejszą stałą $C \geqslant 0$ taką, że Twierdzenie 5.11.16(v) zachodzi. W szczególności,

$$\|B(x,y)\| \leqslant \|B\|\|x\|\|y\|, \quad (x,y) \in E \times F.$$

Przykład 5.11.18 (Przykłady odwzorowań dwuliniowych)**.** (a) $\mathcal{L}(E,F) \times E \ni (L,x) \xmapsto{B} L(x) \in F$, $\|B\| \leqslant 1$. Ponadto (Ćwiczenie*), jeżeli $E \neq \{0\}$ i $F \neq \{0\}$, to $\|B\| = 1$.

(b) $\mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) \ni (Q,P) \xmapsto{B} Q \circ P \in \mathcal{L}(E,G)$, $\|B\| \leqslant 1$. Ponadto (Ćwiczenie*), jeżeli $E \neq \{0\}$, $F \neq \{0\}$ i $G \neq \{0\}$, to $\|B\| = 1$.

Twierdzenie 5.11.19. (a) *Odwzorowanie* $\mathcal{L}(E,F;G) \ni B \xmapsto{\Phi} \big(E \ni x \longmapsto B(x,\cdot) \in \mathcal{L}(F,G)\big) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ *jest dobrze określone, izomorficzne i izometryczne, tzn.*

$$\Phi \in \operatorname{Isom}(\mathcal{L}(E,F;G), \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))), \quad \|\Phi(B)\| = \|B\|,\ B \in \mathcal{L}(E,F;G). \quad (^{16})$$

(b) *Jeżeli E i F są skończenie wymiarowe, to* $\mathcal{L}(E,F;G) = \operatorname{Hom}(E,F;G)$.

Analogiczne własności przysługują odwzorowaniu $\mathcal{L}(E,F;G) \ni B \longmapsto \big(F \ni y \longmapsto B(\cdot,y) \in \mathcal{L}(E,G)\big) \in \mathcal{L}(F,\mathcal{L}(E,G))$.

Dowód. (a) Jest oczywiste, że $B(x,\cdot) \in \mathcal{L}(F,G)$ dla dowolnego $x \in E$. Ponadto, $\|B(x,\cdot)\| \leqslant \|B\|\|x\|$. Stąd $\Phi(B) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ i $\|\Phi(B)\| \leqslant \|B\|$. Ostatecznie $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F;G), \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)))$ i $\|\Phi\| \leqslant 1$.

Teraz przechodzimy do odwzorowania $\Psi = \Phi^{-1}$:

$$\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)) \ni A \xmapsto{\Psi} \Big(E \times F \ni (x,y) \longmapsto A(x)(y) \in G\Big) \in \mathcal{L}(E,F;G).$$

Ponieważ $\|A(x)(y)\| \leqslant \|A(x)\|\|y\| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|$, zatem $\Psi(A) \in \mathcal{L}(E,F;G)$, $\|\Psi(A)\| \leqslant \|A\|$. Wynika stąd, że $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)), \mathcal{L}(E,F;G))$ i $\|\Psi\| \leqslant 1$.

(b) Na podstawie (a) i Twierdzenia 5.11.11 mamy: $\mathcal{L}(E,F;G) \simeq \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)) = \operatorname{Hom}(E,\operatorname{Hom}(F,G)) \simeq \operatorname{Hom}(E,F;G)$. □

Wniosek 5.11.20. *Jeżeli G jest przestrzenią Banacha, to $\mathcal{L}(E,F;G)$ jest przestrzenią Banacha* (17).

---

(16) W szczególności, $\|\Phi\| = \|\Phi^{-1}\| = 1$ o ile $E \neq \{0\}$, $F \neq \{0\}$ i $G \neq \{0\}$.

(17) Bo $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ jest przestrzenią Banacha.

5.11.3. Iloczyn skalarny. Niech $\mathcal{H}$ będzie dowolną przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicja 5.11.21. Odwzorowanie $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ nazywamy *semi-iloczynem skalarnym*, jeżeli:

(a) odwzorowanie $\mathcal{H} \ni x \longmapsto \langle x, y\rangle$ jest $\mathbb{K}$-liniowe dla dowolnego $y \in \mathcal{H}$,

(b) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$, ([18])

(c) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_+$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$.

Jeżeli ponadto

(d) $\langle x, x\rangle > 0$ dla $x \neq 0$,

to mówimy, że $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ jest *iloczynem skalarnym*, a parę $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ nazywamy *przestrzenią unitarną*.

Dla przykładu, odwzorowanie $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \ni (z, w) \longmapsto \langle z, w\rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{K}^n$.

Twierdzenie 5.11.22 (Nierówność Schwarza)**.** *Jeżeli S spełnia* (a), (b) *i* (c)*, to*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H},$$

przy czym równość zachodzi, gdy x i y są liniowo zależne.

Jeżeli $\langle\ ,\ \rangle$ spełnia dodatkowo (d)*, to równość zachodzi jedynie, gdy x i y są liniowo zależne.*

Dowód. Niech $x, y \in \mathcal{H}$. Można założyć, że $\langle x, y\rangle \neq 0$. Dla $\xi = te^{i\theta} \in \mathbb{K}$ $(t, \theta \in \mathbb{R})$ ([19]) mamy:

$$0 \leqslant \langle \xi x + y, \xi x + y\rangle = |\xi|^2\langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\xi\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle.$$

Dobierając θ tak, by $e^{i\theta}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$, dostajemy $t^2\langle x, x\rangle + 2t|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$, co oznacza, że $\frac{1}{4}\varDelta = |\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0$.

Jeżeli $y = tx$, to $|\langle x, y\rangle|^2 = |t|^2\langle x, x\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

Załóżmy teraz, że zachodzi (d) oraz $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. Możemy założyć, że $\langle x, y\rangle \neq 0$. Równość $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ oznacza, że $\varDelta = 0$, skąd wynika istnienie pierwiastka i dalej, istnienie $\xi \in \mathbb{K}$ takiego, że $\langle \xi x + y, \xi x + y\rangle = 0$. Teraz, korzystamy z (d) i wnioskujemy, że $\xi x + y = 0$. □

Twierdzenie 5.11.23. *Jeżeli $\langle\ ,\ \rangle$ jest semi-iloczynem skalarnym na $\mathcal{H}$, to funkcja*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in \mathcal{H},$$

jest seminormą taką, że $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$, $x, y \in \mathcal{H}$. Jeżeli $\langle\ ,\ \rangle$ jest iloczynem skalarnym, to $\|\ \|$ jest normą.

Dowód. Jedyną wątpliwość może budzić nierówność trójkąta. Korzystamy z nierówności Schwarza:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$ □

Definicja 5.11.24. Jeżeli przestrzeń unitarna z normą daną przez iloczyn skalarny jest zupełna, to nazywamy ją *przestrzenią Hilberta* ([20]).

Obserwacja 5.11.25. (a) Norma dana przez iloczyn skalarny spełnia *regułę równoległoboku*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in \mathcal{H} \quad (\text{Ćwiczenie}).$$

(b) Dla $n \geqslant 2$ norma $\|\ \|_p : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ spełnia regułę równoległoboku wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Istotnie, niech $x = \boldsymbol{e}_1$, $y = \boldsymbol{e}_2$. Wtedy:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 - 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \begin{cases} 2 \cdot 2^{2/p} - 4, & \text{jeżeli } 1 \leqslant p < +\infty \\ 1 + 1 - 4, & \text{jeżeli } p = +\infty \end{cases}.$$

([18]) W szczególności, wobec (a), $\langle x, \alpha' y' + \alpha'' y''\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y'\rangle + \overline{\alpha}''\langle x, y''\rangle$. Własności (a) i (b) są czasem nazywane *półtoraliniowością*. Zauważmy, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ odwzorowanie $\langle\ ,\ \rangle$ jest po prostu dwuliniowe symetryczne.

([19]) Jeżeli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to $\theta \in \{0, \pi\}$.

([20]) Dawid Hilbert (1862–1943).

Twierdzenie 5.11.26. *Jeżeli norma (w przestrzeni unormowanej) spełnia regułę równoległoboku, to jest dana przez iloczyn skalarny określony wzorem Frécheta–Jordana–von Neumanna* [21][22][23]

$$S_{\mathbb{K}}(x,y)=S(x,y):=\begin{cases}\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2), & \text{jeżeli } \mathbb{K}=\mathbb{R},\\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2), & \text{jeżeli } \mathbb{K}=\mathbb{C}\end{cases}, \quad x,y\in\mathcal{H}.$$

Dowód. Jest widoczne, że $S(x,x)=\|x\|^2$, $S(y,x)=\overline{S(x,y)}$, $S(x,0)=0$, $S(-x,y)=-S(x,y)$ oraz że S jest odwzorowaniem ciągłym. Ponadto, $S_{\mathbb{C}}(ix,y)=iS_{\mathbb{C}}(x,y)$. Cały problem polega na pokazaniu, że $S(\cdot,y)$ jest addytywne. Jeżeli bowiem tak jest, to najpierw dowodzimy indukcyjnie, że $S(nx,y)=nS(x,y)$, $n\in\mathbb{Z}$, a następnie, że $S(\alpha x,y)=\alpha S(x,y)$, $\alpha\in\mathbb{Q}$. Stąd, wobec ciągłości dostajemy $S(\alpha x,y)=\alpha S(x,y)$, $\alpha\in\mathbb{K}$.

Przechodzimy do addytywności. Mamy $S_{\mathbb{C}}(x,y)=S_{\mathbb{R}}(x,y)-iS_{\mathbb{R}}(ix,y)$. Wystarczy więc udowodnić addytywność w przypadku rzeczywistym. Z reguły równoległoboku dostajemy

$$\|x\pm z+y\|^2+\|x\pm z-y\|^2=2(\|x\pm z\|^2+\|y\|^2),\quad x,y,z\in\mathcal{H},$$

co po odjęciu stronami daje $S(x+y,z)+S(x-y,z)=2S(x,z)$. Biorąc $x:=\frac{1}{2}(x'+y')$, $y:=\frac{1}{2}(x'-y')$ mamy $S(x',z)+S(y',z)=2S(\frac{1}{2}(x'+y'),z)$, $x',y',z\in\mathcal{H}$. W przypadku $y'=0$ daje to $S(x',z)=2S(\frac{x'}{2},z)$, $x',z\in\mathcal{H}$. Ostatecznie, $S(x',z)+S(y',z)=S(x'+y',z)$, $x',y',z\in\mathcal{H}$. $\square$

5.11.4. Kategorie Baire'a. Poniżej $(X,\varrho),(Y,d)$ itd. oznaczają przestrzenie metryczne.

Definicja 5.11.27. Zbiory postaci $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, gdzie każdy zbiór $A_n\subset X$ jest nigdziegęsty, nazywamy *zbiorami I kategorii Baire'a*. Zbiory niebędące zbiorami I kategorii Baire'a noszą nazwę *zbiorów II kategorii Baire'a*.

Twierdzenie* 5.11.28 (Twierdzenie Baire'a)**.** *Niech $X\neq\varnothing$ będzie przestrzenią zupełną. Wtedy:*

(a) *Jeżeli $\Omega_n\subset X$ jest zbiorem otwartym i gęstym w X, $n\in\mathbb{N}$, to zbiór $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$ jest gęsty w X.*

(b) *Jeżeli $A\subset X$ jest zbiorem I kategorii Baire'a, to $\operatorname{int}A=\varnothing$, w szczególności, $A\subsetneq X$.*

Obserwacja 5.11.29. Powyższe warunki (a), (b) są równoważne.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Niech $A_n:=X\setminus\Omega_n$. Wtedy A_n jest domknięty oraz $\operatorname{int}A_n=\varnothing$, $n\in\mathbb{N}$. Wobec (b) mamy $\varnothing=\operatorname{int}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\operatorname{int}(X\setminus\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n)$.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Niech $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, przy czym $\operatorname{int}\overline{A}_n=\varnothing$, $n\in\mathbb{N}$. Niech $\Omega_n:=X\setminus\overline{A}_n$. Wtedy Ω_n jest zbiorem otwartym i gęstym w X, $n\in\mathbb{N}$. Wobec (a) mamy $\varnothing=\operatorname{int}(X\setminus\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n)=\operatorname{int}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\supset\operatorname{int}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\operatorname{int}A$.

Definicja 5.11.30. Funkcja $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ jest *I klasy Baire'a*, jeżeli istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^{\infty}\subset\mathcal{C}(X)$ taki, że $f_s\longrightarrow f$ punktowo na X. Powiemy, że funkcja f jest *n–tej klasy Baire'a*, jeżeli istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^{\infty}$ funkcji $(n-1)$–szej klasy Baire'a taki, że $f_s\longrightarrow f$ punktowo na X.

Twierdzenie 5.11.31 (Punkty nieciągłości funkcji I klasy Baire'a)**.** *Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią zupełną i niech $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie I-klasy Baire'a. Oznaczmy przez $N(f)$ zbiór punktów nieciągłości f. Wtedy $N(f)$ jest zbiorem I kategorii Baire'a.*

Dowód. Niech $f=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{C}(X)$. Zdefiniujmy

$$A_{k,\ell}:=\{x\in X:\forall_{n\geqslant\ell}:\ |f_n(x)-f_\ell(x)|\leqslant 1/k\},\quad k,\ell\in\mathbb{N}.$$

Zbiór $A_{k,\ell}$ jest domknięty, zbiór $F_{k,\ell}:=A_{k,\ell}\setminus\operatorname{int}A_{k,\ell}$ jest domknięty i nigdziegęsty. Wystarczy więc pokazać, że $N(f)\subset\bigcup\limits_{k,\ell\in\mathbb{N}}F_{k,\ell}$. Ustalmy punkt $x_0\in N(f)$. Ponieważ $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego,

---

[21] René Fréchet (1878–1973).
[22] Pascual Jordan (1902 – 1980).
[23] John von Neumann (1903 – 1957).

zatem dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $\ell(k)$ takie, że $x_0 \in A_{k,\ell(k)}$. Gdyby $x_0 \in \operatorname{int} A_{k,\ell(k)}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, wtedy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, istniałoby $r_k > 0$ takie, że $B(x_0, r_k) \subset A_{k,\ell(k)}$. Oznacza to, że $|f_n(x) - f_{\ell(k)}(x)| \leqslant 1/k$ dla $x \in B(x_0, r_k)$ i $n \geqslant \ell(k)$. W szczególności, $|f(x) - f_{\ell(k)}(x)| \leqslant 1/k$ dla $x \in B(x_0, r_k)$. Dla $x \in B(x_0, r_k)$ mamy więc

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{\ell(k)}(x)| + |f_{\ell(k)}(x) - f_{\ell(k)}(x_0)| + |f_{\ell(k)}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant \tfrac{2}{k} + |f_{\ell(k)}(x) - f_{\ell(k)}(x_0)|,\end{aligned}$$

co, wobec ciągłości $f_{\ell(k)}$, dawałoby ciągłość funkcji f w punkcie x_0. Tak więc $x_0 \in F_{k,\ell(k)}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Definicja 5.11.32. Funkcję $f : X \times Y \longrightarrow Z$ nazywamy *oddzielnie ciągłą*, jeżeli:
- $f(x, \cdot) \in \mathcal{C}(Y, Z)$ dla dowolnego $x \in X$,
- $f(\cdot, y) \in \mathcal{C}(X, Z)$ dla dowolnego $y \in Y$.

Ćwiczenie 5.11.33. Udowodnić, że funkcja $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{jeżeli } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ jest oddzielnie ciągła, ale nie jest ciągła.

Twierdzenie 5.11.34 (Funkcje oddzielnie ciągłe)**.** *Dla dowolnej oddzielnie ciągłej funkcji $f : \mathbb{R}\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^\infty \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}\times Y)$ taki, że $f_s \longrightarrow f$, tzn. dowolna funkcja oddzielnie ciągła $f : \mathbb{R}\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ jest I klasy Baire'a. W szczególności, zbiór $N(f)$ jest I kategorii Baire'a.*

Dowód.

$$f_n(x,y) := \Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big) f(\tfrac{k}{n}, y) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big) f(\tfrac{k+1}{n}, y), \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in Y,\ k \in \mathbb{Z}$$

(dla dowolnego $y \in Y$, $f_n(\cdot, y)$ jest funkcją afiniczną na każdym przedziale $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$). Jest rzeczą widoczną, że funkcja f_n jest ciągła (bo jest ciągła na każdym „pasie" $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times Y$). Ponadto,

$$\begin{aligned}|f_n(x,y) - f(x,y)| &= \Big|\Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big)\Big(f(\tfrac{k}{n}, y) - f(x,y)\Big) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big)\Big(f(\tfrac{k+1}{n}, y) - f(x,y)\Big)\Big| \\ &\leqslant \max\{|f(\tfrac{k}{n}, y) - f(x,y)|,\ |f(\tfrac{k+1}{n}, y) - f(x,y)|\}, \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in Y,\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Teraz dla ustalonego punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\times Y$ oraz $\varepsilon > 0$, dobierzmy $\delta > 0$ takie, że $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$ dla $|x - x_0| \leqslant \delta$. Niech $n \geqslant 1/\delta$ i niech $\frac{k}{n} \leqslant x_0 \leqslant \frac{k+1}{n}$. Wtedy z poprzedniego oszacowania dostajemy $|f_n(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$, co dowodzi, że $f_n \longrightarrow f$ punktowo. $\square$

Pojawia się naturalne pytanie czy dowolna funkcja oddzielnie ciągła $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \longrightarrow \mathbb{R}$ (tzn. $f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_k) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n_j})$ dla dowolnych $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \dots, x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ i $j \in \{1, \dots, k\}$) jest I klasy Baire'a ? Prawdziwy jest następujący wynik:

Twierdzenie 5.11.35. *Niech $f : \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\ell\times} \times \mathbb{R}^{n-\ell} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją oddzielnie ciągłą ($\ell \geqslant 2$). Wtedy f jest ℓ–tej klasy Baire'a.*

Okazuje się, że dla $\ell \geqslant 2$ wynik ten nie może być poprawiony, tzn. istnieją przykłady oddzielnie ciągłych funkcji f, które nie są $(\ell - 1)$–szej klasy Baire'a — zob. np. [Leb 1905].

Dowód. Dla dowolnej funkcji $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, zdefiniujmy ciąg $(g_s)_{s=1}^\infty$ tak, jak w Twierdzeniu 5.11.34:

$$g_s(x,y) := \Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big) g(\tfrac{k}{n}, y) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big) g(\tfrac{k+1}{n}, y), \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in \mathbb{R}^{n-1},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że:

(a) jeżeli funkcja $g(\cdot, y)$ jest ciągła dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, to $g_s \longrightarrow g$ punktowo,

(b) jeżeli $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ ($p, q, r \in \mathbb{N}_0$), $y = (u, v, w)$, oraz funkcja $g(x, (u, \cdot, w))$ jest ciągła dla dowolnych $(x, u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$, to każda z funkcji $g_s(\cdot, (u, \cdot, w))$ jest ciągła dla dowolnych $(u, w) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$.

Teraz postępujemy następująco:

• Stosujemy powyższą konstrukcję do $g := f$. Wobec (a), do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że każda z funkcji $f_s^1 := g_s$ jest $(\ell-1)$–szej klasy Baire'a. Na podstawie (b), wiemy, że każda funkcja $f_s^1(\cdot, x_2, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_\ell, x_{\ell+1})$ jest ciągła dla dowolnych $(x_2, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{(\ell-1)\times} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, $j = 2, \dots, \ell+1$.

• Powtarzamy konstrukcję dla $g := f_s^1$ względem zmiennej x_2. Dostajemy kolejny ciąg aproksymujący $(f_s^2)_{s=1}^\infty$ taki, że każda funkcja $f_s^2(\cdot, \cdot, x_3, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_\ell, x_{\ell+1})$ jest ciągła dla dowolnych $(x_3, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{(\ell-2)\times} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, $j = 3, \dots, \ell+1$.

• Powtarzamy powyższe rozumowanie ℓ razy. $\square$